Zusatzaufgaben

(Die Bearbeitung dieser Aufgaben ist freiwillig.)

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

Im folgenden sei $K \subseteq K(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = L$ stets eine endliche galoissche Körpererweiterung. Es geht auf diesem zusätzlichen Übungsblatt um die folgenden praktischen Fragen:

- Was ist der Fixkörper $\Omega(H)$ für eine Untergruppe $H \subseteq Gal(L, K)$?
- Was ist die Galoisgruppe $Gal(L, K)$?

Am Ende des Übungszettels folgt ein Beispiel zu den Aufgaben.

Aufgabe 1

Sei $\alpha \in L$ algebraisch über K. Auf Übungsblatt 8 wurde für ein Element $x \in K(\alpha)$ dessen *Spur* und *Norm* durch $Sp_{K(\alpha)/K}(x) = \mathrm{Spur}(A_x)$ und $N_{K(\alpha)/K}(x) = \det(A_x)$ definiert. Nach dem Satz 16.15. gibt es ein primitives Element $\gamma \in L$ mit $L = K(\gamma)$.

(1) Man zeige für $x \in K(\alpha)$:

$$Sp_{L/K}(x) = \sum_{\sigma \in Gal(L,K)} \sigma(x) \quad \text{und} \quad N_{L/K}(x) = \prod_{\sigma \in Gal(L,K)} \sigma(x).$$

(2) Sei $B \subseteq L$ eine Basis des K-Vektorraums L und $H \subseteq Gal(L, K)$. Man zeige, dass die Menge

$$Sp_H(B) := \left\{ \sum_{\sigma \in H} \sigma(x) \mid x \in B \right\}$$

ein Erzeugendensystem des K-Vektorraums $\Omega(H)$ ist. Was hat das mit Aufgabe 1.1. zutun?

(Hinweis: Man zeige zunächst das folgende Dedekind'sche Lemma: Sind $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ verschiedene Monomorphismen $\sigma_i : K \to L$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in L$ mit $\sum \lambda_i \sigma_i(x) = 0$ für alle $x \in K$, so gilt $\lambda_1, \ldots, \lambda_m = 0$, d.h. L-lineare Unabhängigkeit von verschiedenen Monomorphismen $K \to L$ ist nur auf allen Elementen aus K zu testen.)

Zur Bestimmung des Isomorphietyps von $Gal(L, K)$ kann man wie folgt vorgehen bzw. das folgende beobachten:

- Man bestimme die Minimalpolynome $f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_n}$ über K und deren Wurzeln in L.
- Ein $\sigma \in Gal(L, K)$ ist durch die Elemente $\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_n)$ von L eindeutig festgelegt und $\sigma(\alpha_i)$ ist eine der Wurzeln *desselben* Minimalpolynoms f_{α_i} (wieso?).

- Ist insbesondere $L = K(\alpha)$ und sind $w_1, \ldots, w_l$ die Wurzeln des Minimalpolynoms von α in L, so ist $Gal(L, K) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_l\}$ mit $\sigma_i(\alpha) = w_i$ nach Satz 14.2. Es kommt dann also nur noch auf die Gruppenstruktur an.

Beispiel

Man betrachte das Polynom $f = X^4-2$ mit Koeffizienten in $K = \mathbb{Q}$. Sei L ein Zerfällungskörper von f. Es wird $Gal(L, K)$ und der Zwischenkörperverband von $K \subseteq L$ bestimmt.
Die vier Wurzeln von f in $\mathbb{C}$ sind $\sqrt[4]{2}$, $-\sqrt[4]{2}$, $i\sqrt[4]{2}$ und $-i\sqrt[4]{2}$, also gilt $L = K(\sqrt[4]{2}, i)$. Da $X^4 - 2$ nach dem Kriterium von Eisenstein irreduzibel ist, gilt $[K(\sqrt[4]{2}), K] = 4$ und da $i \notin K(\sqrt[4]{2})$ ist, gilt $[L, K] = 8$ nach der Gradschachtelungsformel. Als Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ ist die Körpererweiterung $K \subseteq L$ galoisch, also $|Gal(L, K)| = 8$.
Für ein Element $\sigma \in Gal(L, K)$ ist $\sigma(\sqrt[4]{2}) \in \{\sqrt[4]{2}, -\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2}, -i\sqrt[4]{2}\}$ und $\sigma(i) \in \{i, -i\}$ und diese Kombinationen führen genau zu den acht Elementen von $Gal(L, K)$. Es gibt verschiedene Gruppen der Ordung Acht, wie in den Wiederholungsaufgaben gezeigt wird. Man betrachte die durch

$$\begin{aligned} \sigma(\sqrt[4]{2}) &= \sqrt[4]{2}, \\ \sigma(i) &= -i, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \tau(\sqrt[4]{2}) &= i\sqrt[4]{2}, \\ \tau(i) &= i \end{aligned}$$

definierten Elemente σ und τ von $Gal(L, K)$. Es gilt $\sigma^2 = \mathrm{id}$ und $\tau^4 = \mathrm{id}$, aber $\tau^2 \neq \mathrm{id}$ und daher (wieso?) ist die Ordung von σ zwei und die von τ vier. Da $\sigma \notin \langle\tau\rangle$ ist $Gal(L, K) = \langle\tau\rangle \cup \sigma\langle\tau\rangle$. Aus der Klassifikation der Gruppen bis zur Ordung Acht auf dem Wiederholungszettel bekommt man, dass $Gal(L, K)$ isomorph zur der Diedergruppe D_4 ist, da gilt $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau^3 = \tau^{-1}$. Also hat $Gal(L, K)$ den folgenden Untergruppenverband, wobei nicht-Normalteiler mit $\widehat{\cdot}$ gekennzeichnet sind.

$$\begin{tikzcd}
 & & Gal(L,K) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & \langle\sigma,\tau^2\rangle \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \langle\tau\rangle \arrow[d, dash] & \langle\tau\sigma,\tau^2\rangle \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\widehat{\langle\tau^2\sigma\rangle} \arrow[drr, dash] & \widehat{\langle\sigma\rangle} \arrow[dr, dash] & \langle\tau^2\rangle \arrow[d, dash] & \widehat{\langle\tau\sigma\rangle} \arrow[dl, dash] & \widehat{\langle\tau^3\sigma\rangle} \arrow[dll, dash] \\
 & & \{\mathrm{id}\} & &
\end{tikzcd}$$

Genau diese gekennzeichneten Zwischenkörper $\Omega(\widehat{H})$ liefern eine nicht-galoissche Körpererweiterung $K \subseteq \Omega(\widehat{H})$ (wieso?).
Nun wird der zugehörige Zwischenkörperverband ermittelt. Man sieht dabei leicht die folgenden Einträge:

$$\begin{tikzcd}
& & K \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & & \\
& K(\sqrt{2}) \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & K(i) \arrow[d, no head] & K(i\sqrt{2}) \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\
K(i\sqrt[4]{2}) \arrow[drr, no head] & K(\sqrt[4]{2}) \arrow[dr, no head] & K(i,\sqrt{2}) \arrow[d, no head] & ? \arrow[dl, no head] & ? \arrow[dll, no head] \\
& & L & &
\end{tikzcd}$$

Schwierigkeiten bereiten die beiden nicht-galoischen Erweiterungen $\Omega(\langle\tau\sigma\rangle)$ und $\Omega(\langle\tau^3\sigma\rangle)$ von K.
Um den Fixkörper $\Omega(\langle\tau\sigma\rangle)$ zu bestimmen, wird Aufgabe 1.2. verwendet. Eine Basis $B = \{\beta_1, \ldots, \beta_8\}$ des K-Vektorraums L ist

$$B = \{1, \sqrt[4]{2}, \sqrt{2}, \sqrt[4]{8}, i, i\sqrt[4]{2}, i\sqrt{2}, i\sqrt[4]{8}\}$$

und damit

$$Sp_{\langle\tau\sigma\rangle}(B) = \{2, (1+i)\sqrt[4]{2}, 0, (1-i)\sqrt[4]{8}, 0, (1+i)\sqrt[4]{2}, 2i\sqrt{2}, (i-1)\sqrt[4]{8}\}$$

nach Aufgabe 1.2. ein Erzeugendensystem von $\Omega(\langle\tau\sigma\rangle)$. Da außerdem $((1+i)\sqrt[4]{2})^2 = 2i\sqrt{2}$ und $((1+i)\sqrt[4]{2})^3 = 2(i-1)\sqrt[4]{8}$ kann man dieses reduzieren und es ist $\Omega(\langle\tau\sigma\rangle) = K((1+i)\sqrt[4]{2})$.
Zur Anschauung wird der Fixkörper $\Omega(\langle\tau^3\sigma\rangle)$ hier auf eine andere und direkte Weise berechnet. Ein x aus L hat eine Darstellung $x = \sum \lambda_i\beta_i$ mit $\lambda_i \in K$. Das Element x gehört zu $\Omega(\langle\tau^3\sigma\rangle)$ genau dann, wenn

$$\tau^3\sigma(x) = x$$

und man berechnet

$$\tau^3\sigma(x) = \lambda_1 - \lambda_2 i\sqrt[4]{2} - \lambda_3\sqrt{2} + \lambda_4\sqrt[4]{8} - \lambda_5 i - \lambda_6\sqrt[4]{2} + \lambda_7 i\sqrt{2} + \lambda_8\sqrt[4]{8}$$

und daher (wieso?)

$$x = \lambda_1 + \lambda_2(1-i)\sqrt[4]{2} + \lambda_4(1+i)\sqrt[4]{8} + \lambda_7 i\sqrt{2}.$$

Mit $((1-i)\sqrt[4]{2})^2 = -2i\sqrt{2}$ und $((1-i)\sqrt[4]{2})^3 = -2(1+i)\sqrt[4]{8}$ kann man dies reduzieren und es ist $\Omega(\langle\tau^3\sigma\rangle) = K((1-i)\sqrt[4]{2})$ und damit

$$\begin{tikzcd}
& & K \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & & \\
& K(\sqrt{2}) \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & K(i) \arrow[d, no head] & K(i\sqrt{2}) \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\
K(i\sqrt[4]{2}) \arrow[drr, no head] & K(\sqrt[4]{2}) \arrow[dr, no head] & K(i,\sqrt{2}) \arrow[d, no head] & K((1+i)\sqrt[4]{2}) \arrow[dl, no head] & K((1-i)\sqrt[4]{2}) \arrow[dll, no head] \\
& & L & &
\end{tikzcd}$$

der zu $K \subseteq L$ gehörige Zwischenkörperverband.