Übungsblatt 9

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

AUFGABE 1

Schreiben Sie einen kurzen Text über endliche Körper. Was fällt Ihnen zu endlichen Körpern ein? Welche Sätze kennen Sie im Zusammenhang mit endlichen Körpern?

AUFGABE 2

Man zeige:

(1) Die Identität und die komplexe Konjugation sind die beiden einzigen $\mathbb{R}$-Automorphismen auf $\mathbb{C}$.

(2) Die Identität ist der einzige $\mathbb{Q}$-Automorphismus auf $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

Ist im Folgenden I eine Menge und $\{L_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Unterkörpern eines Körpers F, so bezeichnet $\bigvee L_i$ den kleinsten Unterkörper von F, der jedes L_i enthält. Für eine algebraische Körpererweiterung $K \subseteq L$ ist der normale Abschulss L^{nc} von L (in $\bar{K}$) bekannt.

AUFGABE 3

Sei $K \subseteq L$ eine algebraische Körpererweiterung. Man zeige:

(1) Es gilt $L^{\mathrm{nc}} = \bigvee \{\sigma(L) \subseteq \bar{K} \mid \sigma : L \to \bar{K} \text{ ist } K\text{-Morphismus}\}$.

(2) Der normale Abschluss L^{nc} ist ein Zerfällungskörper der Menge von Polynomen $\{f_\alpha \in K[X] \mid \alpha \in L \text{ mit Minimaplolynom } f_\alpha\}$.

(3) Der normale Abschluss L^{nc} ist ein Zerfällungskörper der Menge von Polynomen $\{f_\alpha \in K[X] \mid \alpha \in B \text{ mit Minimaplolynom } f_\alpha\}$ für eine Basis B des K-Vektorraums L.

(4) Falls $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung ist, so ist auch die Körpererweiterung $K \subseteq L^{\mathrm{nc}}$ endlich.

AUFGABE 4

Seien K, F und F' Körper und $K \subseteq F$ eine Körpererweiterung. Für einen Körperhomomorphismus $\sigma : F \to F'$ sei die induzierte Abbildung auf den Polynomringen

$$\begin{array}{rcl} F[X] & \to & F'[X] \\ f = \sum a_i X^i & \mapsto & \sigma f = \sum \sigma(a_i) X^i \end{array}$$

definiert. Für ein Polynom $f \in F[X]$ sei $V_F(f) = \{\alpha \in F \mid f(\alpha) = 0\}$ die Nullstellenmenge von f in F. Man zeige:

(1) Für $f \in F[X]$ gilt $\alpha \in V_F(f)$ genau dann, wenn $\sigma(\alpha) \in V_{F'}(\sigma f)$.

(2) Für eine Familie $\{L_i\}_{i \in I}$ von Unterkörpern des Körpers F gilt $\sigma(\bigvee L_i) = \bigvee \sigma(L_i)$.

(3) Für Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ von F gilt

$$\sigma(K(\alpha_1. \ldots, \alpha_n)) = \sigma(K)(\sigma(\alpha_1), \ldots, \sigma(\alpha_n)).$$

(4) Sei $f \in K[X]$ ein Polynom. Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} K\text{-Morphismen} \\ F \to F \end{array} \right\} & \to & \left\{ \begin{array}{c} \text{Bijektionen} \\ V_F(f) \to V_F(f) \end{array} \right\} \\ \sigma & \mapsto & (\alpha \mapsto \sigma(\alpha)) \end{array}$$

ist wohldefiniert.

(Wer möchte, kann sich einmal überlegen, ob diese Abbildung im Allgemeinen injektiv bzw. surjektiv ist. Hinweis dazu: Nach Satz 14.2. gibt es für ein irreduzibles $f \in K[X]$ und $\alpha \in V_F(f)$ eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} K\text{-Morphismen} \\ K(\alpha) \to F \end{array} \right\} & \xrightarrow{\cong} & V_F(f) \\ \sigma & \mapsto & \sigma(\alpha) \end{array}$$

und man kann den Fall $F = K(\alpha)$ betrachten.)