Übungsblatt 7

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

AUFGABE 1

Sei K ein Körper. Die Menge $\hom_{\mathbf{Set}}(K,K)$ der Abbildungen von K nach K ist ein Ring durch punktweise Addition und Multiplikation. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl}\Phi : K[X] & \to & \hom_{\mathbf{Set}}(K,K) \\ f & \mapsto & (a \mapsto f(a))\end{array}$$

ist ein Ringhomomorphismus. Man zeige:

(1) Φ ist surjektiv genau dann, wenn K ein endlicher Körper ist.

(2) Φ ist injektiv genau dann, wenn K ein unendlicher Körper ist.

(Hinweis: Man betrachte das *Lagrange-Polynom* $\sum_{i=0}^{n} b_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$.)

AUFGABE 2

Diese Aufgabe ist Teil des Beweises des wichtigen Satzes 13.11. Sei R ein Ring, K ein Unterkörper von R, $\alpha \in R$ und

$$\begin{array}{rcl}E_\alpha : K[X] & \to & R \\ f & \mapsto & f(\alpha)\end{array}$$

der zugehörige Einsetzhomomorphismus. Es ist $K[\alpha]$ definiert als der kleinste Unterring von R, der K und α enthält. Man zeige:

(1) Es gilt $K[\alpha] = E_\alpha(K[X])$.

Sei nun R ein Körper und also $K[\alpha]$ ein Integritätsring. Es ist $K(\alpha)$ definiert als der kleinste Unterkörper von R, der K und α enthält. Man zeige:

(2) Es ist $K(\alpha)$ der Quotientenkörper von $K[\alpha]$.

AUFGABE 3

(1) Betrachte die komplexe Zahl $\alpha = \sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$. Man finde ein Polynom f aus $\mathbb{Q}[X]$ mit $f(\alpha) = 0$. Wie kann man nun das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ finden?

(2) Man finde das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ über $\mathbb{Q}$.
(Hinweis: Zunächst kann man den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}[\alpha]$ von $\mathbb{Q}$ mit der Gradschachtelungsformel bestimmen.)

Aufgabe 4

Man betrachte nun das Polynom $f = X^4 + 16X^2 + 4$ in $\mathbb{Q}[X]$ und zeige:

(1) Das Polynom f ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

Ist α die Restklasse von X unter der Projektion $\mathbb{Q}[X] \to \mathbb{Q}[X]/(f) = F$, so ist f das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ und man bekommt eine Isomorphie $F \cong \mathbb{Q}^4$ von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen durch die Basis $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$.

(2) Seien $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ und $b = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ Elemente aus $\mathbb{Q}^4$. Man bestimme analog zu Beispiel 13.16. die Multiplikation ab explizit, d.h. man finde $c = (c_0, c_1, c_2, c_3)$ in $\mathbb{Q}^4$ mit $ab = c$.