Übungsblatt 6

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

Aufgabe 1 (Der „Chinesische Restsatz“)
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zwei Ideale I und J von R heißen *coprim*, wenn gilt $I + J = R$. Sei n eine positive natürliche Zahl und $I_1, \ldots, I_n$ Ideale in R. Man zeige:

(1) Es gilt $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n \subseteq I_1 \cap \ldots \cap I_n$.

(2) Die Zuordnung

$$\begin{aligned} \varphi : R/(I_1 \cap \ldots \cap I_n) &\to R/I_1 \times \ldots \times R/I_n \\ x + (I_1 \cap \ldots \cap I_n) &\mapsto (x + I_1, \ldots, x + I_n) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und ein injektiver Ringhomomorphismus.

Seien nun die Ideale $I_1, \ldots, I_n$ paarweise coprim. Man zeige:

(3) Es gilt $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = I_1 \cap \ldots \cap I_n$.

(4) Der Homomorphismus φ ist surjektiv (und also ein Isomorphismus).

Aufgabe 2
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, n eine positive natürliche Zahl und $a_1, \ldots, a_n$, d und v Elemente von R, d' ein $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$ und v' ein $\mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n)$. Man zeige:

(1) Es ist d ein $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn $d \sim d'$.

(2) Es ist v ein $\mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn $v \sim v'$.

Sei nun R ein Hauptidealring. Man zeige:

(3) Es ist d ein $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn $(d) = (a_1) + \ldots + (a_n)$.

(4) Es ist v ein $\mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann, wenn $(v) = (a_1) \cap \ldots \cap (a_n)$.

(Bemerkung: Es gibt also in Hauptidealringen stets größte gemeinsame Teiler und kleinste gemeinsame Vielfache.)

Ist n eine positive natürliche Zahl und a und b ganze Zahlen, die nicht beide Null sind, so definiert man, wie im Skript behandelt, $\mathrm{ggT}(a, b)$ als die eindeutige natürliche Zahl, die ein größter gemeinsamer Teiler von a und b ist. Ebenso ist $\mathrm{kgV}(a, b)$ als eine natürliche Zahl definiert.

Aufgabe 3 (Doppelte Punktzahl)

Sei n eine positive natürliche Zahl, $a_1, \ldots, a_n$ und $m_1, \ldots, m_n$ ganze Zahlen. Man betrachte das System

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned} \tag{1}$$

linearer Kongruenzen und zeige:

(1) Ist eine ganze Zahl x eine Lösung des Systems, so sind alle Lösungen des Systems gegeben durch $x + \lambda \cdot \mathrm{kgV}(m_1, \ldots, m_n)$ mit $\lambda \in \mathbb{Z}$.

(2) Man finde eine Lösung des Systems

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{60} \\ x &\equiv 0 \pmod{7}. \end{aligned}$$

(Hinweis: Mit der Bemerkung 10.22. aus dem Skript zu dem Euklidischen Algorithmus finde man ganze Zahlen λ_1 und λ_2 mit $1 = \mathrm{ggT}(60, 7) = \lambda_1 \cdot 60 + \lambda_2 \cdot 7$.)

(3) Seien i und j positive natürliche Zahlen und λ_i und λ_j ganze Zahlen mit $\mathrm{ggT}(m_i, m_j) = \lambda_i m_i + \lambda_j m_j$. Entfernt man aus dem System (1) die i-te und die j-te Kongruenz und fügt stattdessen die Kongruenz $x \equiv a_i - \lambda_i m_i (a_i - a_j)/\mathrm{ggT}(m_i, m_j) \pmod{\mathrm{kgV}(m_i, m_j)}$ hinzu, so verändert sich die Lösungsmenge des Systems nicht.

(4) Es gibt eine Lösung des Systems (1) genau dann, wenn für alle natürlichen i, j mit $1 \leq i < j \leq n$ gilt $a_i \equiv a_j \pmod{\mathrm{ggT}(m_i, m_j)}$.

(5) Man finde die kleinste natürliche Zahl, die bei Division durch 2, 3, 4, 5 und 6 jeweils den Rest 1 lässt und durch 7 teilbar ist.
(Hinweis: $\mathrm{kgV}(2, 3, 4, 5, 6) = 60$.)