Übungsblatt 3

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

Aufgabe 1

Sei G eine Gruppe und $\varphi : G \to G$ definiert durch $a \mapsto a^{-1}$ eine Abbildung.

(1) Man zeige, dass G abelsch ist genau dann, wenn φ ein Gruppenhomomorphismus (und damit ein Automorphismus) ist.

Ein Gruppenhomomorphismus $\psi : G \to G$ heiße *quasi-fixpunktfrei*, wenn gilt $\varphi(a) = a \Rightarrow a = e$ für alle a aus G und er heiße eine *Involution*, wenn gilt $\varphi^2 = \mathrm{id}_G$. Ist G eine abelsche Gruppe und eine beliebige quasi-fixpunktfreie Involution $\psi : G \to G$ gegeben, so ist $\psi = \varphi$, denn es gilt $\psi(a\psi(a)) = \psi(a)\psi^2(a) = \psi(a)a = a\psi(a)$ und damit $a\psi(a) = e$ für alle Elemente a von G.

(2) Man zeige, dass eine endlich Gruppe G abelsch ist, wenn es eine quasi-fixpunktfreie Involution $\psi : G \to G$ gibt.
(Hinweis: Man betrachte z.B. die Abbildung $a \mapsto a^{-1}\psi(a)$ auf G.)

Tatsächlich gibt es eine unendliche nicht-abelsche Gruppe G mit einer quasi-fixpunktfreien Involution.

Aufgabe 2

Sei G eine Gruppe und $Z(G)$ bezeichne das Zentrum von G. Man zeige, dass G abelsch ist, wenn die Gruppe $G/Z(G)$ zyklisch ist.

Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe U von G heisst *charakteristisch*, wenn $\varphi(U) = U$ für alle φ in $\mathrm{Aut}(G)$. Man zeige:

(1) Eine charakteristische Untergruppe ist ein Normalteiler,

(2) das Zentrum $Z(G)$ von G ist eine charakteristische Untergruppe.

Außerdem finde man ein Beispiel einer Gruppe G und eines Normalteilers N in G, der keine charakteristische Untergruppe von G ist.

Aufgabe 4

Man zeige, dass eine Gruppe G mit $|G| = p^2$ für eine Primzahl p eine abelsche Gruppe ist.