Übungsblatt 12

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

Aufgabe 1

(1) Man finde ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{F}_3 \subseteq \mathbb{F}_9$.

(2) Man stelle eine Additions- und eine Multiplikationstabelle für den Körper $\mathbb{F}_9$ auf.

Aufgabe 2

Man bestimme die Galoisgruppe des Polynoms $X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3

Man bestimme die folgenden Galoisgruppen des Polynoms $f = X^4 - 5$ aus $\mathbb{Q}[X]$:

(1) $Gal_{\mathbb{Q}}(f)$ (2) $Gal_{\mathbb{Q}(\sqrt{5})}(f)$

(3) $Gal_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})}(f)$ (4) $Gal_{\mathbb{Q}(i)}(f)$

Aufgabe 4

Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein nicht-konstantes Polynom und bezeichne $V_L(f)$ die Nullstellen von f in einem Zerfällungskörper L von f. Es wurde gezeigt, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : Gal_K(f) & \to & \Sigma(V_L(f)) \\ \sigma & \mapsto & \sigma|_{V_L(f)} \end{array}$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus (vgl. auch Aufgabe 4.2. von Blatt 9: Hier wurde nichts über die Injektivität gesagt. Wieso?). Dies bedeutet, dass die Gruppe $Gal_K(f)$ auf der Menge $V_L(f)$ der Nullstellen von f *treu* operiert. Man zeige, dass $Gal_K(f)$ transitiv auf $V_L(f)$ operiert, falls f irreduzibel ist.

(Man kann sich einmal überlegen, wann $Gal_K(f)$ frei auf $V_L(f)$ operiert und ob $Gal_K(f)$ auf $V_L(f)$ transitiv operieren kann, obwohl f nicht irreduzibel ist.)