Übungsblatt 10

Körper und Galoistheorie
WS 2009/2010

Aufgabe 1

Seien $K \subseteq L \subseteq F$ endliche Körpererweiterungen und $\alpha \in F$. Man zeige

(1) Es gilt $[F : K]_i = [F : L]_i \cdot [L : K]_i$ für den Inseparabilitätsgrad.

(2) Es ist $K \subseteq F$ separabel genau dann, wenn $[F : K]_i = 1$ gilt.

(3) Hat F die Charakteristik $p > 0$, so gilt $[K(\alpha) : K]_i = p^d$, wobei d der Radikalexponent von α ist.

(4) Hat F die Charakteristik $p > 0$, so ist $[F : K]_i$ eine Potenz von p.

Aufgabe 2

Sei $K \subseteq L$ eine algebraische Körpererweiterung. Man zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) Es gibt eine Menge $M \subseteq L$ von inseparablen Elementen, sodass gilt $L = K(M)$.

(2) Es gilt $[L : K]_{\text{sep}} = 1$.

(3) Die Körpererweiterung $K \subseteq L$ ist rein-inseparabel.

Aufgabe 3

Sei $K \subseteq F$ eine Körpererweiterung, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(F, K)$ die Menge der Zwischenkörper von $K \subseteq F$ und $\mathcal{U} = \mathcal{U}(F, K)$ die Menge der Untergruppen der Gruppe der K-Automorphismen auf F. Es sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{Z} &\to \mathcal{U} \\ L &\mapsto \{\varphi \in \mathrm{Aut}(F) \mid \varphi \text{ ist } L\text{-Automorphismus}\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Omega : \mathcal{U} &\to \mathcal{Z} \\ U &\mapsto \{x \in F \mid \varphi(x) = x \text{ für alle } \varphi \in U\} \end{aligned}$$

bekannt. Man zeige:

(1) Die Abbildungen Π und Ω sind jeweils ordungsumkehrend.

(2) Für ein $L \in \mathcal{Z}$ gilt $L \subseteq \Omega\Pi(L)$ und $\Pi(L) = \Pi\Omega\Pi(L)$.

(3) Für ein $U \in \mathcal{U}$ gilt $U \subseteq \Pi\Omega(U)$ und $\Omega(U) = \Omega\Pi\Omega(U)$.

Aufgabe 4

Sei $K \subseteq F$ eine Körpererweiterung und setze

$$Cl(\mathcal{Z}) = \{L \in \mathcal{Z} \mid \Omega\Pi(L) = L\}$$

und

$$Cl(\mathcal{U}) = \{U \in \mathcal{U} \mid \Pi\Omega(U) = U\}.$$

Man zeige, dass $Cl(\mathcal{Z})$ und $Cl(\mathcal{U})$ vollständige Verbände sind.