Vektorbündel über topologischen Räumen

Seminarvortrag von C. Dahlhausen
am 06. November 2013.
Hinweise auf Fehler und Korrekturen bitte an dahl.de@web.de.

Im folgenden sei X stets ein topologischer Raum. Nachfolgendes ist im wesentlichen aus [Ha] übernommen (Abschnitte 1.1 und 2.1).

1 Vektorbündel

1.1 Definition. Ein n-DIMENSIONALES VEKTORBÜNDEL (VB) ist eine stetige Abbildung $p\colon E \to X$ topologischer Räume, für die gilt:

(i) Für alle $x \in X$ ist die FASER $p^{-1}(x)$ ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(ii) Für alle $x \in X$ existiert eine offene Umgebung $x \in U \subseteq X$ und ein Homöomorphismus $h\colon p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \times \mathbb{R}^n$, der für alle $y \in X$ einen Isomorphismus $h_y\colon p^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} \{y\} \times \mathbb{R}^n$ von $\mathbb{R}$-Vektorräumen induziert.

In dieser Situation heißt h eine (LOKALE) TRIVIALISIERUNG, X der BASISRAUM und E der TOTALRAUM. Wir bezeichnen ein solches Bündel auch mit (E, p) oder lediglich E.

Ein MORPHISMUS VON VEKTORBÜNDELN $f\colon (E, p) \to (F, q)$ auf X ist eine stetige Abbildung $f\colon E \to F$, die $p = q \circ f$ erfüllt und für alle $x \in X$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $p^{-1}(x) \to q^{-1}(x)$ induziert.

Damit erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Kategorie $\mathrm{Vec}_n(X)$ der n-dimensionalen Vektorbündel auf X und die Kategorie $\mathrm{Vec}(X)$ aller Vektorbündel auf X.

Ein Vektorbündel auf X, welches isomorph zu einem VB der Form $X \times \mathbb{R}^n$ ist, heißt TRIVIAL.

1.2 Beispiel (Möbiusbündel)**.** Auf S^1 haben wir das triviale VB $\mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}$ mit Projektion auf den ersten Faktor. Ferner sei $E := {[0,1] \times \mathbb{R}}/{(0,t) \sim (1,-t)}$. Die Projektion $p_1\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to [0,1]$ induziert eine stetige Abbildung $p\colon E \to \mathrm{S}^1 = {[0,1]}/{0 \sim 1}$. Es ist für $x \in (0,1)$ klar, dass $p^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{R}$. Ferner ist

$$p^{-1}([0]) = \underset{(0,t)}{\overline{\{0\} \times \mathbb{R}}} \underset{\mapsto}{\cong} \underset{(1,-t)}{\overline{\{1\} \times \mathbb{R}}} = p^{-1}([1]),$$

wobei eckige Klammern Restklassen in S^1 und ein Querstrich oben die Menge der Restklassen in E bezeichne. Dies zeigt, dass E ein 1-dimensionales VB über S^1 ist.

Die Bündel E und $\mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}$ sind nicht isomorph. *Angenommen* doch, so existierte ein Homöomorphismus $h'\colon E \xrightarrow{\sim} \mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}$, der auf jeder Faser einen Vektorraumisomorphismus induzierte. Diese Abbildung induzierte einen Homöomorphismus $h\colon [0,1] \times \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} [0,1] \times \mathbb{R}$ mit gleicher Eigenschaft und $h(0,t) = h(0,-t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Stetigkeit von h lieferte

$p_2 \circ h(x, 1) \cdot p_2 \circ h(y, 1) > 0$ für alle $x, y \in [0, 1]$. Da $p_2 \circ h(0, 1) = -p_2 \circ h(1, 1)$, würde aber ein Widerspruch entstehen.

1.3 Beispiel (Kanonisches Geradenbündel auf dem reellen projektiven Raum)**.** Wir betrachten den reellen projektiven Raum

$$\mathbb{RP}^n := \{G \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \text{ UVR der Dimension } 1\},$$

also den Raum aller Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$, und den Raum

$$E := \{(G, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in G\}$$

mit der Teilraumtopologie. Die Projektion $p_1 \colon \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{RP}^n$ induziert eine stetige Abbildung $p \colon E \to \mathbb{RP}^n$. Vermöge lokaler orthogonaler Projektionen sehen wir, dass (E, p) ein Geradenbündel, d.h. ein VB der Dimension 1, auf $\mathbb{RP}^n$ ist, das sogenannte KANONISCHE GERADENBÜNDEL.

Für $n = 1$ ist $\mathbb{RP}^1 \cong \mathrm{S}^1$ und das kanonische Bündel ist isomorph zum Möbiusbündel.

1.4 Lemma ([Ha], Prop. 1.1)**.** *Ein stetige Abbildung zwischen den Totalräumen zweier VB auf X ist bereits ein Isomorphismus von VB, falls diese in jeder Faser einen Isomorphismus von Vektorräumen induziert.*

Beweis. In einer jeder Faser lässt sich eine solche Abbildung durch eine invertierbare Matrix ausdrücken, wobei diese Matrizen stetig vom Basispunkt abhängen, da die Abbildung stetig ist. Zusammen mit der Cramerschen Regel sehen wir, dass dann auch die Inversen dieser Matrizen stetig vom Basispunkt abhängen. Damit ist auch die Umkehrabbildung stetig und wir haben gewonnen. ⁒

1.5 Definition. (i) Ist (E, p) ein VB auf X, so heißt eine stetige Abbildung $s \colon X \to E$, welche $p \circ s = \mathrm{id}_X$ erfüllt, ein SCHNITT von (E, p).

(ii) Eine Menge von Schnitten $\{s_1, \ldots, s_n\}$ eines VB E auf X heißt LINEAR UNABHÄNGIG *gdw* für alle $x \in X$ die Menge $\{s_1(x), \ldots, s_n(x)\}$ linear unabhängig ist.

1.6 Lemma. *Ein n-dimensionales VB E auf X ist trivial* gdw *n linear unabhängige Schnitte von E existieren.*

Beweis. Ist $h \colon X \times \mathbb{R}^n \to E$ eine Trivialisierung, so ist für

$$s_i \colon X \to E \quad , \quad x \mapsto h(x, e_i)$$

die Menge der Schnitte $\{s_1, \ldots, s_n\}$ linear unabhängig, wobei e_i den i-ten Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichne.

Seien umgekehrt n linear unabhängige Schnitte $\{s_1, \ldots, s_n\}$ gegeben. Wir betrachten die Abbildung

$$h \colon X \times \mathbb{R}^n \to E \quad , \quad (x, v) \mapsto \sum_i = 1^n v_i \cdot \cdot_i (x).$$

Lokal um einen Punkt in X ist E trivial und h als Verkettung stetiger Funktionen stetig, da Addition, Skalarmultiplikation und freilich auch die s_i stetig sind. Außerdem ist h in jeder Faser ein Isomorphismus, da für alle $x \in X$ die Familie $\{s_1(x), \ldots, s_n(x)\}$ linear unabhängig der Länge n, also eine Basis ist. Nach Lemma 1.4 ist h ein Isomorphismus, also E trivial. ⁒

1.7 Bemerkung. Sei (E, p) ein VB auf X.

(i) Ist $Y \subseteq X$ ein Teilraum, so ist $(p^{-1}(Y), p|_{p^{-1}(Y)})$ ein VB auf Y.

(ii) Für offenes $U \subseteq X$ definiert die Zuordnung

$$U \mapsto E(U) := \{s \colon U \to E \mid s \text{ ist Schnitt } \}$$

eine Garbe von Mengen auf X. Für $x \in X$ ist der Halm $E_x = p^{-1}(x)$.

(iii) Ist $f \colon E \to F$ ein Morphismus von VB auf X, so erhalten wir einen Garbenmorphismus $f_* \colon E \to F$, welcher für $U \subseteq X$ offen durch

$$f_*(U) \colon E(U) \to F(U) \quad , \quad s \mapsto f \circ s$$

gegeben ist. Für weiteren Morphismus $g \colon F \to G$ von VB gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

(iv) Damit erhalten wir einen (kovarianten) Funktor

$$(\text{VB auf } X) \longrightarrow (\text{Garben auf } X).$$

(v) Bezeichne $\mathcal{C}$ die Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen auf X, so lässt sich die Garbe E mit einer C-Modulstruktur versehen. Ist X kompakt und hausdorffsch, so ist diese Modulgarbe lokal-frei und wir haben eine Äquivalenz von Kategorien

$$(\text{VB auf } X) \xleftrightarrow{\sim} (\text{lokal-freie } \mathcal{C}\text{-Moduln endlichen Rangs})$$

Für Details siehe [Sw], Abschnitte 1 bis 3.

1.8 Definition. Seien $(E, p), (F, q)$ VB auf X.

(i) Ein Untervektorbündel (UVB) von (E, p) ist ein Teilraum $E' \subseteq E$, so dass $E' \cap p^{-1}(x)$ für alle $x \in X$ ein Untervektorraum von $p \in (x)$ ist und $(E', p|_{E'})$ wieder ein VB ist.

(ii) Die (Whitney-)Summe $(E \oplus F, p \oplus q)$ von E und F ist der Pullback von E und F über X in der Kategorie der topologischen Räume. Explizit ist

$$E \oplus F = \{(e, f) \in E \times F \,|\, p(e) = q(f)\}$$

und $(p \oplus q)(e, f) = p(e) = q(f)$ für alle $(e, f) \in E \oplus F$ (da das Zurückziehen entlang $\{x\} \to X$ wieder ein Pullback ist).

(iii) Ein Skalarprodukt auf E ist eine stetige Abbildung $\langle -, - \rangle \colon E \oplus E \to \mathbb{R}$, die in jeder Faser ein Skalarprodukt (d.h. eine symmetrische, positiv-definite Bilinearform) induziert.

1.9 Bemerkung. Der Raum X heißt parakompakt *gdw* jede Übderdeckung von X eine lokal-endliche Verfeinerung $(V_i)_i$ besitzt, d.h. zu jedem $x \in X$ existiert eine Umgebung, die nur endlich viele der V_i nicht-trivial schneidet.

Ist X hausdorffsch und parakompakt, so existiert zu jeder Überdeckung $(U_i)_i$ von X eine untergeordnete Partition der Eins, d.h. eine Familie stetiger Abbildungen $(\varphi_i \colon X \to [0, 1])_i$ mit $\varphi_i^{-1}(0, 1] \subseteq U_i$, so dass $\sum_i \varphi_i = 1$ und für alle $x \in X$ fast alle $\varphi_i(x) = 0$ sind.

1.10 Lemma ([Ha], Prop. 1.2)**.** *Ist X hausdorffsch und parakompakt, so findet sich auf jedem VB über X ein Skalarprodukt.*

Beweis. Sei (E, p) ein VB auf X. Wir finden eine Überdeckung $(U_i)_i$ von X, so dass alle $p^{-1}(U_i)$ trivial sind, also für alle i ein Isomorphismus

$$h_i \colon p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{R}^n$$

existiert. Durch Zurückziehen des Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ erhalten wir auf allen $p^{-1}(U_i)$ ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle_i$. Auch finden wir eine der Überdeckung $(U_i)_i$ untergeordnete Partition der Eins $(\varphi_i)_i$. Wir definieren

$$\begin{array}{rcl} \langle -, - \rangle \colon E \oplus E & \to & \mathbb{R} \\ (v, w), & \mapsto & \langle v, w \rangle := \sum_i (\varphi_i \circ p)(v) \cdot \langle v, w \rangle_i, \end{array}$$

wobei $\langle v, w \rangle = 0$, falls $p(v) \notin U_i$ oder $p(w) \notin U_i$.

Die Abbildung $\langle -, - \rangle$ ist stetig als Verkettung stetiger Abbildungen. Weiter ist $\langle -, - \rangle|_{U_i} = \langle -, - \rangle_i$ für alle i und damit induziert $\langle -, - \rangle$ in jeder Faser ein Skalarprodukt. Folglich ist $\langle -, - \rangle$ ein Skalarprodukt auf E. ⁒

1.11 Obacht. Das konstruierte Skalarprodukt ist abhängig von der gewählten trivialisierenden Übderdeckung von X!

1.12 Proposition ([Ha], Prop 1.3)**.** *Sei X hausdorffsch und parakompakt, (E, p) ein VB auf X und $F \subseteq E$ ein UVB. Dann existiert ein UVB $F^\perp \subseteq E$, so dass $F \oplus F^\perp \cong E$.*

Beweis. Wir finden ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ auf E. Sei $F^\perp$ die Vereinigung aller bezüglich diesem Skalarprodukt orthogonalen Komplemente von F in jeder Faser. Wir zeigen, dass $p|_{F^\perp} \colon F^\perp \to X$ ein VB ist. Mit Lemma 1.4 folgt dann sogleich die Behauptung, wenn wir die (offensichtliche) stetige Abbildung $F \sqcup F^\perp \to E$ betrachten.

Es bleibt also zu zeigen, dass $p|_{F^\perp} \colon F^\perp \to X$ ein VB ist, d.h. dass jeder Punkt eine Umgebung besitz, auf der $F^\perp$ trivial ist. Wir können also *o.B.d.A.* annehmen, dass E bereits trivial ist, also $E = X \times \mathbb{R}^n$. Auch können wir *o.B.d.A.* F als trivial annehmen, wenn auch nicht von der Form $X \times \mathbb{R}^m \subseteq X \times \mathbb{R}^n$. Jedoch existieren nach Lemma 1.6 linear unabhängige Schnitte $\{s_i \colon X \to F \,|\, i = 1, \dots, m\}$. Diese können wir auch als Schnitte $s_i \colon X \to E$ auffassen und in stetiger Weise zu n linear unabhängigen Schnitten $\{s_i \colon X \to E \,|\, i = 1, \dots, n\}$ ergänzen. Nun ersetzen wir (wie in bei Gram-Schmid) die s_i induktiv durch

$$t_i := s_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle s_i, t_j \rangle}{\langle t_j, t_j \rangle} \cdot t_j$$

und erhalten paarweise orthogonale und zusammen linear unahängige Schnitte $\{t_1, \dots, t_n\}$, wobei die $\{t_1, \dots, t_m\}$ weiter über F faktorisieren. Aufgrund der Orthogonalität Faktorisieren dann die $\{t_{m+1}, \dots, t_n\}$ über $F^\perp$, welches somit nach Lemma 1.6 trivial ist. ⁒

1.13 Proposition ([Ha], Prop. 1.4)**.** *Ist X hausdorffsch und kompakt* (sic!)*, so ist jedes VB auf X isomorph zu einem UVB eines trivialen VB.*

Beweis. Sei $E \to X$ ein VB. Da X kompakt ist, finden wir eine endliche und trivialisierende Überdeckung $(U_i)_{i=1,\dots,k}$ zusammen mit einer untergeordneten Partition der Eins $(\varphi_i \colon X \to [0,1])_i$ mit *o.B.d.A.* $\varphi_i^{-1}(0,1] = U_i$. Ferner seien $(h_i \colon p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n)_i$ lokale Trivialisierungen und $(\pi_i \colon U_i \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)_i$ die Projektionen auf den zweiten Faktor. Wir definieren für alle i

$$g_i \colon E \to \mathbb{R}^n \quad , \quad v \mapsto \big(\varphi_i \circ p\big)(v) \cdot \pi_i \circ h_i(v).$$

Ist $x \in U_i = \varphi_i^{-1}(0,1]$, so erhalten wir auf der Faser einen induzierten Isomorphismus

$$p^{-1}(x) \to \mathbb{R}^n \quad , \quad v \mapsto \underbrace{\varphi_i(x)}_{=\text{const}\neq 0} \cdot \pi_i h_i(v),$$

da h_i ein Isomorphismus ist. Damit ist die Produktabbildung

$$g := (g_i)_i \colon E \to (R^n)^k \cong \mathbb{R}^{n \cdot k} \quad , \quad v \mapsto \big(g_i(v)\big)_{i=1,\dots,k}$$

in jeder Faser injektiv. Nun setzen wir

$$f\colon E \to B \times \mathbb{R}^{n\cdot k} \quad , \quad v \mapsto \big(p(v), g(v)\big).$$

Da p und g stetig sind, ist f stetig. Außerdem induziert f nach Konstruktion in jeder Faser einen Isomorphismus auf sein Bild. Es bleibt also noch zu zeigen, dass $f(E)$ ein VB ist. Dies folgt, da über U_i die Abbildung

$$f\big(p^{-1}(U_i)\big) \to U_i \times \mathbb{R}^n \quad , \quad \big(p(v), g(v)\big) \mapsto \big(v, g_i(v)\big)$$

eine lokale Trivialisierung ist. Damit ist E isomorph zu $f(E) \subseteq X \times \mathbb{R}^{n\cdot k}$. ⁒

1.14 Beispiel (Tangentialbündel und Normalenbündel auf S^2)**.** Das Tangentialbündel auf S^2 ist der Raum

$$\mathrm{TS}^2 := \{(x,t) \in \mathrm{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid x \perp t\}$$

zusammen mit der Projektion p auf S^2. Für $x \in \mathrm{S}^2$ ist die Faser isomorph zur Tangentialebene T_x von x, also ein 2-dimensionaler Vektorraum. In einer kleinen Umgebung von x ist die orthogonale Projektion auf $x + T_x$ eine lokale Trivialisierung. Somit ist TS^2 ein VB auf S^2.

Angenommen es existierte ein Isomorphismus $h\colon \mathrm{S}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{TS}^2$. Dann wäre $h(x, e_1) \neq 0 \in p^{-1}(x)$ für alle $x \in \mathrm{S}^2$, da h in jeder Faser einen Isomorphismus induzieren würde. Damit wäre jedoch $h(-, e_1)$ ein stetiges und nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^2, was nach dem Satz vom Igel nicht existiert. Folglich ist TS^2 nicht trivial.

Aber mit dem Normalenbündel

$$\mathrm{NS}^2 := \{(x, \lambda x) \in \mathrm{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

auf S^2 erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathrm{TS}^2 \oplus \mathrm{NS}^2 \cong \mathrm{S}^2 \times \mathbb{R}^3 \quad , \quad (x, t, \lambda x) \mapsto (x, t + \lambda x).$$

1.15 Ausblick. In Analogie zu Theorem 2.3 aus dem letzten Vortrag über projektive Moduln gilt das folgende *Real Cancellation Theorem* (vgl. [We], chapter I, theorem 4.3):

Sei X ein d-dimensionaler CW-Komplex und E ein n-dimensionales VB mit $n > d$. Dann gilt:

(i) $E \cong E' \oplus (X \times \mathbb{R}^{n-d})$ für ein geeignetes d-dimensionales VB E'.

(ii) Ist F ein weiteres VB auf X mit $E \oplus (X \times \mathbb{R}^k) \cong F \oplus (X \times \mathbb{R}^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt bereits $E \cong F$.

2 Die K-Gruppe

Im folgenden sei ein VB nicht notwendig von konstantem Rang, d.h. die Dimension der Fasern muss nicht auf ganz X gleich sein. Ist X zusammenhängend, so sind beide Definitionen identisch. Ist Y eine Zusammenhangskomponente von X, so ist mit dieser Notation jedes VB auf Y bereits ein VB auf X (durch Fortsetzen durch Null).

2.1 Definition. (i) Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\mathcal{E}^n := \mathcal{E}^n_X := X \times \mathbb{R}^n$.

(ii) Zwei VB E, F über X heißen zueinander STABIL-ISOMORPH *gdw* $E \oplus \mathcal{E}^n \cong F \oplus \mathcal{E}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Zwei VB E, F heißen zueinander SCHWACH STABIL-ISOMORPH *gdw* $E \oplus \mathcal{E}^n \cong F \oplus \mathcal{E}^m$ für zwei $n, m \in \mathbb{N}$.

2.2 Bemerkung. Durch stabile Isomorphie und schwache stabile Isomorphie werden Äquivalenzrelationen auf der Kategorie der VB definiert (was auch immer dies sein möge).

2.3 Definition. Es bezeichnen $\mathrm{M}(X)$ und $\tilde{\mathrm{K}}^0(X)$ die Mengen der Restklassen von VB über X bezüglich stabiler Isomorphie respektive schwacher stabiler Isomorphie.

2.4 Bemerkung. Durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{K}}^0(X) \times \tilde{\mathrm{K}}^0(X) &\to \tilde{\mathrm{K}}^0(X) \\ \big([E],[F]\big) &\mapsto [E] + [F] := [E \oplus F] \end{aligned}$$

definieren wir eine wohldefinierte Verknüpfung auf $\tilde{\mathrm{K}}^0(X)$. Analoges gilt für $\mathrm{M}(X)$.

2.5 Proposition. *Die Mengen* $\tilde{\mathrm{K}}^0(X)$ *und* $\mathrm{M}(X)$ *sind Monoide (bezüglich obigen Verknüpfungen).*

Beweis. Assoziativität ist klar und die Klasse der trivialen VB der Dimension Null ist jeweils das neutrale Element. ⁒

2.6 Proposition. *Ist* X *hausdorffsch und kompakt, so ist* $\tilde{\mathrm{K}}^0(X)$ *eine Gruppe (bezüglich obiger Verknüpfung).*

Beweis. Es bleibt die Existenz von Inversen zu zeigen. Sei also E ein VB auf X. Nach Proposition 1.13 lässt sich E lokal auf jeder Zusammenhangskomponente X_i von X durch Addition eines geeigneten $\mathcal{E}^{n_i}_{X_i}$ trivialisieren. Durch Addition weiterer $\mathcal{E}^{k_i}_{X_i}$ für geeignete k_i können wir erreichen, dass die Dimension überall gleich ist. Die Klasse der Summe aller dieser VB ist dann das Inverse der Klasse von E. ⁒

2.7 Definition. Wir bezeichnen mit $K^0(X)$ die Gruppenvervollständigung des Monoids $\mathrm{M}(X)$. Es ist also $K^0(X)$ die Menge der Äquivalenzklassen formaler Differenzen $[E]-[F]$ für VB E, F auf X bezüglich der Äquivalenzrelation

$$[E]-[F] \sim [E']-[F'] \iff \big(E \oplus F' \text{ stabil isomorph zu } E' \oplus F\big).$$

2.8 Bemerkung. Wir können die Gruppe $K^0(X)$ alternativ auch in Analogie zur Grothendieck-Gruppe definieren:

(i) Eine Sequenz $\ldots \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to \ldots$ von Morphismen von VB auf X heißt EXAKT bei F *gdw* auf jeder Faser die induzierte Sequenz von Vektorräumen bei F exakt ist. Eine Sequenz, die an jeder Stelle exakt ist, heißt EXAKT.

(ii) Eine KURZE EXAKTE SEQUENZ ist eine exakte Sequenz

$$\mathcal{E}^0 \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to \mathcal{E}^0. \tag{$\star$}$$

Man kann zeigen, dass jede kurze exakte Sequenz zerfällt (vgl. [Kn], Korollar 2.2.9), also $F \cong \mathcal{E} \oplus H$.

(iii) Sei nun $\mathrm{F}(X)$ die freie abelsche Gruppe über die Isomorphieklassen von VB auf X. Sei $\mathrm{R}(X)$ die von allen Elementen $[F]-[E]-[G]$ für alle kurzen exakten Sequenzen $(\star)$ erzeugte Untergruppe von $\mathrm{F}(X)$. Dann ist

$$K^0(X) = {}^{\mathrm{F}(X)}\!/\!_{\mathrm{R}(X)},$$

wie sich durch nachrechnen überprüfen lässt.

Literatur

[Ha] HATCHER, Allen: *Vector Bundles and K-Theory*, Version 2.1, May 2009.
http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html

[Kn] KNAPP, Karlheinz: *Vektorbündel: Vom Möbius-Bündel bis zum J-Homomorphismus*, Springer Spektrum, 2013.
http://www2.math.uni-wuppertal.de/~knapp/lehrbuch_vektorbuendel_knapp.html

[Sw] SWAN, Richard G.: *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), 264-277.
http://www.ams.org/journals/tran/1962-105-02/S0002-9947-1962-0143225-6/home.html

[We] WEIBEL, Charles: *The K-book: an introduction to algebraic K-theory*, Graduate Studies in Math. vol. 145, AMS, 2013.
http://www.math.rutgers.edu/~weibel/Kbook.html