Wdh.: • Letzte Woche haben wir ein Rank(k)-VB über X definiert als

$\begin{matrix} V \\ \downarrow \pi \\ X \end{matrix}$ stetige Abb., s.d. $\forall x \in X: \pi^{-1}(x)$ ist rank k - $\mathbb{C}$-VR

s.d. $\exists$ offene Überdeckung $\{U_i\}_i$ von X s.d.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[r, "\varphi_{U_i}", "\cong"', "\text{Homöo}"] \arrow[d, "\pi"'] & U_i \times \mathbb{C}^k \arrow[dl] \\ U_i \end{tikzcd}$$

mit $\varphi_i|_{\pi^{-1}(x)}: \pi^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{C}^k$ ist $\mathbb{C}$-linear (insbesondere Iso)

• **Bsp.:** Triviales Bündel

• Seien $\begin{matrix} V, \tilde V \\ \pi \downarrow \swarrow \tilde\pi \\ X \end{matrix}$ zwei VB über X, dann ist ein Morphismus eine stetige Abb. $\Psi: V \to \tilde V$, $\begin{matrix} \pi \searrow \swarrow \tilde\pi \\ X \end{matrix}$

die faserweise linear ist

• Somit erhalten wir die Kategorie $VB_{\mathbb{R}}(X)$

Eine Abb. Ψ ist genau dann ein Iso in $VB_{\mathbb{R}}(X)$, wenn Ψ faserweise ein Iso von VR ist.

Frage: Können wir Funktor $VB_{\mathbb{R}}: Top^{op} \to Cat$ konstruieren?

$$X \mapsto VB_{\mathbb{R}}(X)$$
$$(f: X \to Y) \mapsto \underbrace{(VB_{\mathbb{R}}(Y) \xrightarrow{f^*} VB_{\mathbb{R}}(X))}_{\text{Funktor}}$$

Wir definieren

$$\begin{tikzcd} f^*(V) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde\pi"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

als Pullback in Top, d.h. $f^*(V) = \{(x,v) \in X \times V \mid f(x) = \pi(v)\}$, $\tilde\pi \downarrow$, $(x,v) \downarrow x$, X

$VB_{\mathbb{R}}(U_i) \simeq VB_{\mathbb{R}}(Y) \xrightarrow{\mathrm{id}^*} VB_{\mathbb{R}}(X)$

$X \times \mathbb{C}^k \downarrow X \mapsto ((x),(y,v))$ ...

Ist (U_i) eine offene Überdeckung & $(\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C}^k)_i$, $(y,v) \mapsto (y, \varphi_i(v))$

dann $(f^{-1}(U_i))_i$, $\tilde\varphi_i: \tilde\pi^{-1}(f^{-1}(U_i)) \longrightarrow f^{-1}(U_i) \times \mathbb{C}^k$

$= \{(y,v) \in f^{-1}(U_i) \times V \mid f(y) = \pi(v)\}$

$= \{(y,v) \in f^{-1}(U_i) \times \pi^{-1}(U_i) \mid f(y) = \pi(v)\}$

Aber Erhalten: $f^*: VB_{\mathbb{R}}(Y) \to VB_{\mathbb{R}}(X)$ Funktor

Aber $\mathrm{id}_X^* V = \{(x,v) \in X \times V \mid \pi(v) = \mathrm{id}(x)\} = \{(\pi(v), v) \mid v \in V\} \xrightarrow{\cong} V$ aber nicht gleich

$g^* f^* \cong (f \circ g)^*$ aber nicht gleich

$\Rightarrow VB_{\mathbb{R}}$ ist <u>kein</u> Funktor

Bsp.: • $A \subseteq X$ Unterraum

Pullback bzgl. Inklusion ist die Einschränkung

• Möbiusband über S^1 ist rank 1-$\mathbb{R}$-VB

$S^1 \subseteq \mathbb{C} \to S^1 \subseteq \mathbb{C}$ die 2-fache Überlagerung, $z \mapsto z^2$

Dann ist der Pullback trivial.

Lösung: • High-Tech: Betrachte Cat als 2-Kategorie & VB als 2-Funktor

$\Rightarrow$ VB ist <u>Stack</u>

• Low-Tech: Betrachte Iso-Klassen

$Vekt_{\mathbb{R}}: Top \longrightarrow Set$ ist ein echter Funktor

$X \longmapsto \underbrace{\{\text{Isoklassen von VB über } X\}}_{\text{dies ist wirklich Menge}} = VB_{\mathbb{R}}(X)/_{Iso}$

$f \longmapsto f^*$

Ziel: 1) $Vekt_{\mathbb{R}}$ ist Homotopie-invariant, d.h. er schickt homotope Abb. auf die gleiche Abb.

$Vekt_{\mathbb{R}}: ho(Top) \longrightarrow Set$

Objekte: CW-Komplexe

Morphismen: Homotopie-Klassen stetiger Abb.

2) Insbesondere: Ist X zusammenziehbar, so ist $X \to *$ ist in $ho(Top)$ ein Iso, also $Vekt_{\mathbb{R}}(*) \xrightarrow{\cong} Vekt_{\mathbb{R}}(X)$ ist Bijektion. Somit ist jedes VB über einem zsh. Raum trivialisierbar.

$Vekt_{\mathbb{R}}(*) \cong \{[\text{triviale VB}]\}$

2) Der Funktor $Vekt_{\mathbb{R}}$ ist darstellbar, d.h. es ex. der sog. <u>klassifizierende Raum</u>

$BU(\mathbb{R}) \in Top$ s.d. $Vekt_{\mathbb{R}}(X) \cong Hom_{ho(Top)}(X, BU(\mathbb{R}))$

ist CW-Komplex, also in $ho(Top)$ — natürliche Äquivalenz, gegeben durch Pullback entlang

des ~~trivialen~~ universellen Bündels $EU(\mathbb{R}) \to BU(\mathbb{R})$

d.h. $(X \xrightarrow{f} BU(\mathbb{R})) \mapsto \begin{matrix} f^* EU(\mathbb{R}) \\ \downarrow \\ X \end{matrix}$

Vekt_k ist Homotopie-Funktor Y, X immer parakompakt ($\exists$ Zerlegung der Eins)

Satz: $f, g: X \to Y$ stetig, $H: X\times I \to Y$ Homotopie, d.h. $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$

Dann $f^*V \cong g^*V \quad \forall\, V \to X \in VB_k(X)$

Bew: $H^*V \to X \times I$ ist VB, s.d. $f^*V \cong i_0^* H^*V$, $g^*V \cong i_1^* H^*V$ $i_t: \{x\} \hookrightarrow I$, $x \mapsto t$ die Inklusion

Es genügt also ~~zu zeigen~~ folgende Prop. zu zeigen. □

Prop: Sei $V \to X \times I$ ein VB. dann
Dann sind $i_0^* V$ & $i_1^* V$ isomorph.

~~Kor: Ist $f: X \to Y$ eine Homotopie-Äquivalenz, so ist $VB_k(Y) \xrightarrow{f^*} VB_k(X)$ ein Bi~~

Bew: [Hatcher, VB&K Prop. 1.7] □

Kopplungsfunktion - Clutching-Konstruktion

Wir wollen die Homotopie-Gruppen des klass. Raumes $BU(k)$ ausrechnen:

$$\pi_n(BU(k)) := [S^n, BU(k)] \cong \mathrm{Vekt}_k(S^n) \underset{\text{zeigen wir jetzt}}{\cong} [S^{n-1}, Gl_k(\mathbb{C})] \cong: \pi_{n-1}(Gl(k))$$

f. loch für $\mathbb{R}$, orientierbare

Die Homotopiegruppen von $BU(k)$ & $Gl(k)$ stimmen also bis auf einen Shift überein.

Beh: $[S^{n-1}, Gl_k(\mathbb{C})] \cong \mathrm{Vekt}_k(S^n)$

Bew: Sei $f: S^{n-1} \to Gl_k(\mathbb{C})$ gegeben.
Dann definiere VB über S^n wie folgt:
$S^n = D^n_+ \amalg_{S^{n-1}} D^n_-$, $D^n_{+/-}$ obere/untere Hemisphäre

$$V_f := D^n_+ \times \mathbb{C}^k \amalg_f D^n_- \times \mathbb{C}^k, \text{ d.h. } (x,v) \in \underset{S^{n-1}}{\partial D^n_+} \times \mathbb{C}^k \sim (x, f(v)) \in \underset{S^{n-1}}{\partial D^n_-} \times \mathbb{C}^k$$

Sind $f \simeq g$ homotop mittels $H: S^{n-1} \times I \to Gl_k(\mathbb{C})$,
so gibt: $V_H \to S^n \times I$ ist Vektorbündel mit $i_0^* V_H \cong V_f$, $i_1^* V_H \cong V_g$

$\Rightarrow V_{(-)}: [S^{n-1}, Gl_k(\mathbb{C})] \to \mathrm{Vect}_k(S^n)$

Wir konstruieren Umkehrabb.

Sei $V \to S^n$ ein Vektorbündel
Da $D^n_{+/-}$ zusammenziehbar sind, können wir die Einschränkungen trivialisieren:

$$\varphi_{+/-}: V|_{D^n_{+/-}} \to D^n_{+/-} \times \mathbb{C}^k$$

Schränke auf $\partial D^n_{+/-} = S^{n-1}$ ein:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_{+/-}: V|_{S^{n-1}} & \to & S^n \times \mathbb{C}^k \\ \downarrow & \swarrow & \\ S^n & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}: S^n \times \mathbb{C}^k & \to & S^n \times \mathbb{C}^k \\ \downarrow & \swarrow & \\ S^n & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \varphi_+ \circ \varphi_-^{-1}: S^n \times \mathbb{C}^k \to S^n \times \mathbb{C}^k, \quad (x,v) \mapsto (x, \Phi(v))$$

$\Phi: S^n \to Gl_k(\mathbb{C})$

Dies ist unabhängig von der Wahl der Trivialisierung (bis auf Homotopie)
(Trivialisierung sind eindeutig bis auf Homotopie, da $D^n_{+/-}$ zsh.)

& unabhängig von der Wahl des Repräsentanten der Iso-Klasse.

V_f, Φ
Diese Operationen sind invers zueinander. □

Bsp: Jedes $\mathbb{C}$-VB über S^1 ist trivialisierbar, da $Gl_k(\mathbb{C})$ wegzshgd.

Klassifizierender Raum $B(U(k))$

Def.: $G_k(\mathbb{C}^n) := \{k\text{-dim. UVR von } \mathbb{C}^n\}$, $k \le n$

└ Grassmann Mannigfaltigkeit

Welche Topologie?

$$V_k(\mathbb{C}^n) := \{\underbrace{\overbrace{k\text{-Rahmen}}^{\text{orthonormal}} \text{ in } \mathbb{C}^n}_{(v_1,\dots,v_k) \text{ s.d. } \|v_i\|=1,\ v_i \perp v_j\ \forall i \ne j}\}$$

$V_k(\mathbb{C}^n) \subseteq \underbrace{S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}}_{k\text{-mal}}$ ist abgeschlossene Teilmenge, also kompakt

$V_k(\mathbb{C}^n) \twoheadrightarrow G_k(\mathbb{C}^n)$ Quotiententopologie $\Rightarrow$ $G_k(\mathbb{C}^n)$ ist kompakt.

$(v_1,\dots,v_k) \longmapsto \mathrm{span}(v_1,\dots,v_k)$

Sogar: $G_k(\mathbb{C}^n)$ ist top. Mfk & endlicher CW-Komplex

Die Inklusionen $\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+2} \subseteq \dots$

induzieren $G_k(\mathbb{C}^n) \subseteq G_k(\mathbb{C}^{n+1}) \subseteq G_k(\mathbb{C}^{n+2}) \subseteq \dots$

Kolimes $G_k(\mathbb{C}^\infty) := \varinjlim G_k(\mathbb{C}^n) = \coprod_{n \ge 0} G_k(\mathbb{C}^n) /\sim \; = \bigcup_{n \ge 0} G_k(\mathbb{C}^n)$

Als Menge: $\mathbb{C}^\infty$ ist $\mathbb{C}$-VR

$G_k(\mathbb{C}^\infty) = \{k\text{-dim UVR von } \mathbb{C}^\infty\}$

$U \subseteq G_k(\mathbb{C}^\infty)$ ist offen $\Leftrightarrow$ $U \cap G_k(\mathbb{C}^n)$ ist offen in $G_k(\mathbb{C}^n)$ $\forall n$

Analog: $E_k(\mathbb{C}^n) := \{(\ell, v) \in G_k(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n \mid v \in \ell\}$ tautologisches rank(k)-Vektorbündel über $G_k(\mathbb{C}^n)$

$\Rightarrow E_k(\mathbb{C}^\infty) \to G_k(\mathbb{C}^\infty)$ rank(k)-Vektorbündel

Bew.: Dies sind wirklich Vektorbündel.

1. Schritt: n endlich.

Fixiere $\ell \in G_k(\mathbb{C}^n)$

Sei $\pi : \mathbb{C}^n \to \ell$ die orthogonale Projektion

Definiere $U_\ell := \{\tilde{\ell} \in G_k(\mathbb{C}^n) \mid \pi(\tilde{\ell}) \text{ hat Dimension } k\} \subseteq G_k(\mathbb{C}^n)$

Beachte $\ell \in U_\ell$.

Es gilt: $U_\ell \subseteq G_k(\mathbb{C}^n)$ ist offen

$\Leftrightarrow$ Das Urbild $\hat{U}_\ell \subseteq V_k(\mathbb{C}^n)$ ist offen

$\hat{U}_\ell = \{k\text{-orthonormal Rahmen in } \mathbb{C}^n\ e_1,\dots,e_k \mid \pi(e_1),\dots,\pi(e_k) \text{ sind lin. unabhängig}\}$

$\Leftrightarrow \{e_1,\dots,e_k \text{ orthonormal Rahmen in } \mathbb{C}^n \mid \det(\pi(e_1),\dots,\pi(e_k)) \ne 0\}$

$\subseteq V_k(\mathbb{C}^n)$ offen da Determinante stetig

$\Rightarrow U_\ell \subseteq G_k(\mathbb{C}^n)$ ist offene Umgebung von ℓ.

$$\begin{tikzcd}
E_k(\mathbb{C}^n) \supseteq p^{-1}(U_\ell) \arrow[r, "\varphi_\ell"] \arrow[d, "p"] & U_\ell \times \mathbb{C}^k \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\
G_k(\mathbb{C}^n) \supseteq U_\ell &
\end{tikzcd}$$

$\varphi_\ell : p^{-1}(U_\ell) \to U_\ell \times \mathbb{C}^k$

$p^{-1}(U_\ell) = \{(\tilde{\ell}, v) \in U_\ell \times \mathbb{C}^n \mid v \in \tilde{\ell}\}$

$\varphi_\ell((\tilde{\ell}, v)) := (\tilde{\ell}, \pi(v))$

Zeige φ_ℓ ist Trivialisierung.

Klar ist: φ_ℓ ist faserweise $\mathbb{C}$-VR Iso

~~φ_ℓ ist stetig~~ & Bijektion

Schwieriger: φ_ℓ^{-1} ist stetig

2. Schritt: $k = \infty$

Folgt, da alles die schwache Topologie hat

Satz: X parakompakt

Dann: $[X, G_k(\mathbb{C}^\infty)] \longrightarrow Vekt_k(X)$ ist Bijektion, natürlich in X

$f \longmapsto f^* E_k(\mathbb{C}^\infty)$

d.h. $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ ist ein klassifizierender Raum: $BU(k) = G_k(\mathbb{C}^\infty)$

& $E_k(\mathbb{C}^\infty) \to G_k(\mathbb{C}^\infty)$ ist das universelle Rank(k)-VB.

Bew.: • Beobachte: Sei $p: E \to X$ ein Rank k-VB.

Dann entspricht ein Isomorphismus

$$E \to f^* E_k(\mathbb{C}^\infty)$$

einer Abbildung $g: E \to \mathbb{C}^\infty$ welche eine lineare Inklusion auf jeder Faser von E induziert.

Warum?

Sei $f: X \to G_k(\mathbb{C}^\infty)$ eine Abbildung & nehme an, dass $E \cong f^* E_k(\mathbb{C}^\infty)$.

Dann:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr] \arrow[rrr, bend left, "g"] & f^*E_k(\mathbb{C}^\infty) \arrow[r, "\tilde f"] \arrow[d] & E_k(\mathbb{C}^\infty) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathbb{C}^\infty \\ & X \arrow[r, "f"] & G_k(\mathbb{C}^\infty) & \end{tikzcd}$$

Da sowohl π als auch $\tilde f$ lineare Inklusionen auf jeder Faser induzieren, tut dies auch g.

Haben wir aber ein solches $g: E \to \mathbb{C}^\infty$, definiere $f: X \to G_k(\mathbb{C}^\infty)$ durch $f(x) := g(\underbrace{p^{-1}(x)}_{k\text{-dim. } \mathbb{C}\text{-VR}})$

k-dim $\mathbb{C}$-VR in $\mathbb{C}^\infty$, also ein Punkt von $G_k(\mathbb{C}^\infty)$

• Wir zeigen Surjektivität:

Sei $E \to X$ ein VB von rank k.

Da X parakompakt, ex. offene Überdeckung $(U_i)_i$ von X s.d. $E|_{U_i}$ trivial ist

d.h. $g_i: E|_{U_i} \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{C}^k$

~~$g_i: U_i$~~

und untergeordnete Zerlegung der Eins $\varphi_i: X \to [0,1]$, $\sum_i \varphi_i = 1$

supp $\varphi_i \subseteq U_i$, φ_i lokal endlich.

Setze $\tilde g_i: E|_{U_i} \to \mathbb{C}^k$, $\tilde g_i = pr \circ g_i$

$(\varphi_i p)\tilde g_i: E|_{U_i} \to \mathbb{C}^n$, $v \mapsto \varphi_i(p(v)) \cdot \tilde g_i(v)$ dehnt sich durch 0 auf $E \to \mathbb{C}^n$ aus.

$\Rightarrow \bigoplus_i (\varphi_i p)\tilde g_i: E \to (\mathbb{C}^n)^\infty = \mathbb{C}^\infty$ ist wohldef. stetige Abb., da (φ_i) lokal endlich.

Diese g ist faserweise lineare Inklusion

$\Rightarrow$ Surjektiv.

• Wir zeigen Injektivität:

Seien $f_0, f_1: X \to G_k(\mathbb{C}^\infty)$ s.d. $f_0^* E_k(\mathbb{C}^\infty) \underset{\varphi}{\cong} f_1^* E_k(\mathbb{C}^\infty)$

~~$\rightsquigarrow g_0, g_1$~~

Konstruiere wieder $g_0, g_1: E \to \mathbb{C}^\infty$

Beh.: $g_0 \simeq g_1$ sind homotop $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{dies impliziert}}$ $f_0 \simeq f_1$ sind homotop, also $[f_0] = [f_1] \Rightarrow$ Injektiv.

Bew.: Definiere $L_t: \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$

$$(v_1, v_2, \dots) \mapsto (1-t)(v_1, v_2, \dots) + t(x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots)$$

$L_0 = id$

Es gilt L_t ist linear $\forall t$

& $\ker L_t$ ist trivial $\forall t \Rightarrow L_t$ ist injektiv

Analog: $\hat L_t: \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$

$$(v_1, v_2, \dots) \mapsto (1-t)(v_1, v_2, \dots) + t(0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots)$$

~~$g_t := (1-t) L_t g_0 + (1-t)\hat L_t g_1$~~

~~g_t ist faserweise lineare Inklusion~~

$L_t g_0$ ist faserweise lineare Inklusion $\forall t$

$\hat L_t g_1$

Es gilt $g_0 \simeq L_1 g_0$, $g_1 \simeq \hat L_1 g_1$ $\Rightarrow$ z.z. $L_1 g_0 \simeq \hat L_1 g_1$ durch faserweise lin. inkl.

$g_t := (1-t) L_1 g_0 + t \hat L_1 g_1$ ist faserweise lineare Inklusion & Homotopie. $\square$

Anwendung: Vektorbündel haben Metriken/Tensor Produkte, da:

$E_k(\mathbb{C}^\infty)$ hat Standardmetrik von $\mathbb{C}^\infty$

$\rightsquigarrow$ pullback.