Algebraische Geometrie

Florian Strunk

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung 1
2. Grundlagen und Notation 2
3. Das Spektrum eines Rings 3
4. Die Zariski Topologie auf dem Spektrum eines Rings 13
5. Die Ideale-Teilmengen Korrespondenz 20
6. Die klassische Zariski-Topologie und der Nullstellensatz 25
7. Prägarben und Garben 29
8. Geringte Räume und Verkleben 38
9. Die Strukturgarbe auf dem Spektrum eines Rings 45
10. Lokalgeringte Räume 52
11. Schemata, Beispiele und erste Eigenschaften 58
12. Faserprodukte 68
13. Einschub: Kategorielle Eigenschaften 76
14. Modulgarben 83
15. Abgeschlossene Immersionen und Separiertheit 96
16. Endlichkeitsbedingungen 107
Anhang A. Kommmutaive Algebra 118
A.1. Ringe und Ideale 118
A.2. Moduln und Tensorprodukte 128
Anhang B. Lösungen zu den Aufgaben 132

1. Einleitung

Dies ist ein Skript zur Vorlesung *Algebraische Geometrie I* an der Universität Regensburg im Wintersemester 2021/2022. Diese Einleitung ist stark beeinflusst von dem Buch [3].

Algebraische Geometrie hat ihren Ursprung in der Untersuchung von Systemen

$$\begin{aligned} f_1(a_1,\dots,a_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(a_1,\dots,a_n) &= 0 \end{aligned}$$

von Polynomgleichungen. Hier sind $f_1,\dots,f_m$ Polynome in n Variablen mit Koeffizienten in einem Körper k. Sei $\mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_m) \subseteq k^n$ die *Lösungsmenge* des obigen Systems, also

$$\mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_m) = \{(a_1,\dots,a_n) \in k^n \mid f_i(a_1,\dots,a_n) = 0 \text{ für alle } i \in \{1,\dots,m\}\}.$$

Sind die Polynome $f_1,\dots,f_m$ linear und haben jeweils keinen konstanten Term, so ist $\mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_m)$ ein Untervektorraum von k^n, mit dessen Untersuchung sich die *Lineare Algebra* beschäftigt. Für beliebige Polynome ist diese Lösungsmenge aber sicherlich nicht unbedingt ein Untervektorraum, wie das folgende Bild illustriert.

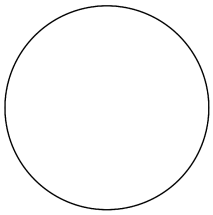


Abbildung 1: Die Lösungsmenge $\mathcal{V}_k(x_1^2 + x_2^2 - 1)$ in $\mathbb{R}^2$

Die Algebraische Geometrie untersucht den Zusammenhang zwischen der Geometrie der Lösungsmenge $\mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_m)$ und den algebraischen Eigenschaften der Polynome $f_1,\dots,f_m$. Um den Begriff dieser *algebraischen Eigenschaften* zu präzisieren, macht man zunächst die folgende Beobachtung[1]: Für eine Linearkombination $f := g_1 f_1 + \dots, g_m f_m$ mit Koeffizienten $g_i \in k[x_1,\dots,x_n]$ gilt $\mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_m) = \mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_m,f)$. Dieses bedeutet, dass die Lösungsmenge nur von dem durch die Polynome erzeugten Ideal $(f_1,\dots,f_m) \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ abhängt. Des Weiteren gilt, dass wenn

$$f^k(a_1,\dots,a_n) = f(a_1,\dots,a_n) \cdot \dots \cdot f(a_1,\dots,a_n) = 0,$$

auch folgt, dass $f(a_1,\dots,a_n) = 0$. Dieses bedeutet, dass die betrachtete Lösungsmenge nur von dem Radikalideal $I := \sqrt{(f_1,\dots,f_m)} \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ abhängt. Wir haben also eine per Konstruktion surjektive Zuordnung

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Radikalideale von} \\ k[x_1,\dots,x_n] \end{array} \right\} \xrightarrow{\quad \mathcal{V}_k \quad} \left\{ \begin{array}{c} \text{„Algebraische“} \\ \text{Lösungsmengen in } k^n \end{array} \right\}$$

wobei

$$\mathcal{V}_k(I) = \{\underline{a} \in k^n \mid f(\underline{a}) = 0 \text{ für alle } f \in I\}.$$

Man könnte nun versuchen, durch die Untersuchung der Radikalideale I von $k[x_1,\dots,x_n]$ (oder durch die Untersuchung des reduzierten Rings $k[x_1,\dots,x_n]/I$) etwas über die Geometrie der zugehörigen Lösungsmenge herauszufinden.

Umgekehrt kann man einer Teilmenge M des k^n die Menge von Polynomen

$$\mathcal{I}_k(M) = \{f \in k[x_1,\dots,x_n] \mid f(\underline{a}) = 0 \text{ für alle } \underline{a} \in M\}$$

zuordnen. Man sieht wie oben, dass $\mathcal{I}_k(M)$ ein Radikalideal ist und bekommt eine Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Radikalideale von} \\ k[x_1,\dots,x_n] \end{array} \right\} \xleftarrow{\quad \mathcal{I}_k \quad} \left\{ \begin{array}{c} \text{„Algebraische“} \\ \text{Lösungsmengen in } k^n \end{array} \right\}.$$

[1] An dieser Stelle benötigt man, dass $(f+g)(\underline{a}) = f(\underline{a}) + g(\underline{a})$ und $(fg)(\underline{a}) = f(\underline{a})g(\underline{a})$ gilt. Tatsächlich ist die Auswertung an $\underline{a} := (a_1,\dots,a_n)$ ein Ringhomomorphismus, der Einsetzhomomorphismus genannt wird.

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob die Abbildungen $\mathcal{V}_k$ und $\mathcal{I}_k$ invers zueinander sind. Dieses ist nicht unbedingt der Fall: Ist $k = \mathbb{R}$ und $f = x^2 + 1$ ein Polynom, so ist das Hauptideal $(f) \subseteq \mathbb{R}[x]$ ein Radikalideal. Es gilt allerdings $\mathcal{V}_k((f)) = \emptyset = \mathcal{V}_k(\mathbb{R})$ und daher ist $\mathcal{V}_k$ für den Fall $k = \mathbb{R}$ nicht injektiv. Ein positives Ergebnis ist das folgende:

Satz 1.1 (**Hilbertscher Nullstellensatz**). *Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so sind die Abbildungen $\mathcal{V}_k$ und $\mathcal{I}_k$ zueinander inverse Bijektionen.*

Dieser Satz ist der Grund, wieso sich die Entwicklung der Algebraischen Geometrie lange Zeit hauptsächlich auf algebraisch abgeschlossene Körper konzentriert hat. Die Frage nach der ganzzahligen Lösbarkeit von Gleichungen ist allerdings wesentlich älter. Schon seit der Antike interessiert man sich für ganzzahlige Lösungen von Polynomgleichungen, den sogenannten *Diophantischen Gleichungen*. Besonders prominent ist für ein $n \geq 3$ die Frage nach der ganzzahligen nichttrivialen Lösbarkeit der Fermatschen Gleichung

$$f := x_1^n + x_2^n - x_3^n = 0.$$

Eine wesentliche Idee der modernen Algebraischen Geometrie ist, die Korrespondenz von $\mathcal{V}_k$ und $\mathcal{I}_k$ auf den Fall eines beliebigen Basisrings R statt des (algebraisch abgeschlossenen) Körpers k auszudehnen, die geometrische Anschauung vom Körperfall zu benutzen und sogar eine strikte geometrische Sichtweise für einen beliebigen Basisring zu entwickeln.

Es sind allerdings noch zwei weitere Verallgemeinerungen sinnvoll: Die obige Sichtweise beschränkt sich nur auf die geometrische Analyse von *reduzierten* Ringen und es ist erstrebenswert auch nicht reduzierte Ringe geeignet in die Theorie zu integrieren. Des Weiteren ist es nützlich und natürlich „algebraische Mannigfaltigkeiten“ anstatt nur die obige affine Situation zu betrachten. Eine Motivation hierfür ist leicht zu bekommen, wenn man beispielsweise die Nützlichkeit von Riemannschen Mannigfaltigkeiten (anstatt nur des affinen Raums $\mathbb{R}^n$) anerkennt. Dieses führt zu dem Begriff des *Schemas* mit dem wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen werden.

Ein uns motivierendes Beispiel für den Nutzen der Sprache der Schemata ist das folgende: Wir werden zeigen, dass eine glatte projektive Varietät X über $\mathbb{Q}$ nur endlich viele „Stellen schlechter Reduktion“ hat. Ist X also im Speziellen durch eine Gleichung gegeben, so gibt es nur endlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{Z}$, sodass die Reduktion dieser Gleichung modulo p nicht mehr glatt ist. Ein Beweis dieses Ergebnises ist ohne den Begriff des Schemas von großer Schwierigkeit.

2. Grundlagen und Notation

In dieser Vorlesung werden einige Ergebnisse der Kommutativen Algebra vorausgesetzt. Im Anhang A findet sich eine Übersicht über die benötigten Begriffe und eine Festlegung der Notation.

3. Das Spektrum eines Rings

Sei R ein Ring und $R \to K$ eine beliebige R-Algebra. Wir betrachten die Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \Psi\colon K^n & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x_1,\dots,x_n],K) \\ \underline{a} & \mapsto & (\ f \mapsto f(\underline{a})\ ) \\ (\psi(x_1),\dots,\psi(x_n)) & \leftarrow\!\shortmid & \psi \end{array} \tag{3.1}$$

deren Bilder $\psi_{\underline{a}} := \Psi(\underline{a})$ *Einsetzhomomorphismen* genannt werden. Um nachzuprüfen, dass es sich bei Ψ tatsächlich um eine Bijektion handelt, kann man $K^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{x_1,\dots,x_n\},K)$ zusammen mit der universellen Eigenschaft des Polynomrings $R[x_1,\dots,x_n]$ benutzen.

Definition 3.2. Sei R ein Ring, $I \subseteq R[x_1\dots,x_n]$ ein Ideal und $R \to K$ eine R-Algebra.

$$\mathcal{V}_K(I) = \{\underline{a} \in K^n \mid f(\underline{a}) = 0 \text{ für alle } f \in I\}$$

heißt die *Verschwindungsmenge* von I in K^n. Eine Teilmenge $V \subseteq K^n$, die eine solche Verschwindungsmenge ist, heißt auch *R-algebraisch*.

Mit dieser Definition hat die Bijektion (3.1) nun die folgende Verallgemeinerung von $R[x_1,\dots,x_n]$ auf eine beliebige endlich erzeugte R-Algebra $A \cong R[x_1,\dots,x_n]/I$.

Lemma 3.3. *Sei R ein Ring, $I \subseteq R[x_1,\dots,x_n]$ ein Ideal und $R \to K$ eine R-Algebra. Dann passt die Bijektion 3.1 in ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow[\Psi]{\cong} & \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x_1,\dots,x_n],K) \\ \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi^*} \\ \mathcal{V}_K(I) & \xrightarrow[\bar\Psi]{\cong} & \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x_1,\dots,x_n]/I,K) \end{array}$$

wobei die Abbildung $\pi\colon R[x_1,\dots,x_n] \twoheadrightarrow R[x_1,\dots,x_n]/I$ die Quotientenabbildung ist.

Beweis. Sei $\underline{a} \in \mathcal{V}_K(I)$. Mit der universellen Eigenschaft

$$\begin{array}{ccc} R[x_1,\dots,x_n] & \xrightarrow{\Psi(\underline{a})} & K \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & \nearrow_{\bar\Psi(\underline{a})} & \\ R[x_1,\dots,x_n]/I & & \end{array}$$

bekommen wir eine R-Algebrenabbildung $\bar\Psi(\underline{a})$, falls $I \subseteq \ker(\Psi(\underline{a}))$. Ist also $f \in I$, so gilt $\Psi(\underline{a})(f) = f(\underline{a}) = 0$, da $\underline{a} \in \mathcal{V}_K(I)$. Dieses definiert die Abbildung $\bar\Psi$, sodass das angegebene Diagramm kommutiert.

Es gilt $\Psi^{-1}(\psi) = (\psi(x_1),\dots,\psi(x_n))$ für eine R-Algebrenabbildung $\psi\colon R[x_1,\dots,x_n] \to K$. Liegt diese Abbildung ψ im Bild von π^*, so gilt außerdem $\psi(f) = 0$ für alle $f \in I$. Wir zeigen, dass das n-Tupel $(\psi(x_1),\dots,\psi(x_n)) \in K^n$ für ein solches ψ in der Teilmenge $\mathcal{V}_K(I)$ liegt. Sei dazu $f \in I$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} f(\psi(x_1),\dots,\psi(x_n)) & = & \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\psi(x_1)^{\alpha_1}\cdot\dots\cdot\psi(x_n)^{\alpha_n} \\ & = & \psi(\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n} a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}x_1^{\alpha_1}\cdot\dots\cdot x_n^{\alpha_n}) \\ & = & \psi(f) \\ & = & 0 \end{array}$$

Also schränken sowohl Ψ als auch Ψ^{-1} auf die gewünschte Weise ein und sind zueinander inverse Bijektionen. □

Bemerkung 3.4. Es sei noch einmal daran erinnert, dass aus der abgeschlossenen Teilmenge $\mathcal{V}_K(I) \hookrightarrow K^n$ nicht unbedingt das Ideal $I \subseteq R[x_1,\dots,x_n]$ rekonstruiert werden kann. Ist beispielsweise $R = \mathbb{R}$ und $I = (x^2+1)$, so gilt $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x^2+1) = \emptyset = \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(1)$. Unter der Bijektion des vorherigen Lemmas 3.3 bedeutes dieses, dass es keine $\mathbb{R}$-Algebrenabbildung von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ nach $\mathbb{R} = K$ gibt, genau so, wie es keine $\mathbb{R}$-Algebrenabbildung von dem Nullring nach $\mathbb{R} = K$ gibt. Es ist $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}(x^2+1) = \{-i, i\}$.

Um die unbefriedigende Situation in der vorherigen Bemerkung zu verbessern, möchten wir den Begriff des „Punktes“ abändern und anstelle von $\underline{a} \in K^n$ eine alternative Sichtweise präsentieren, die eine natürliche Verallgemeinerung zulässt.

Definition 3.5. Für einen Ring A, bezeichne $\mathrm{mSpec}(A)$ die Menge seiner Maximalideale.

Sei nun $R = k$ ein Körper und $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Dann bekommen wir mit Lemma 3.3 eine Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V}_k(I) & \xrightarrow[\bar{\Psi}]{\cong} & \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[x_1,\ldots,x_n]/I, k) & \xrightarrow[\ker]{} & \mathrm{mSpec}(k[x_1,\ldots,x_n]/I) \\ \underline{a} & \mapsto & \psi_{\underline{a}} & \mapsto & \ker(\psi_{\underline{a}}) \end{array} \tag{3.6}$$

denn eine k-Algebrenabbildung $\psi_{\underline{a}}$ nach k ist surjektiv und daher $\ker(\psi_{\underline{a}})$ ein maximales Ideal, da k ein Körper ist.

Bemerkung 3.7. Ist R ein Ring, $R \to A$ eine R-Algebra und $R \twoheadrightarrow K$ eine R-Algebra mit surjektiver Strukturabbildung, so folgt aus der Gleichheit $\ker(\psi) = \ker(\psi')$ für $\psi, \psi' \in \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(A, K)$ dass $\psi = \psi'$, was die Injektivität der Abbildung (3.6) zeigt, denn hier ist $R = K = k$. Sei dafür $f \in A$. Aus $\psi(f - \psi(f)) = \psi(f) - \psi(f) = 0$ folgt, dass $f - \psi(f) \in \ker(\psi) = \ker(\psi')$ und damit $0 = \psi'(f - \psi(f)) = \psi'(f) - \psi(f)$.

Für algebraisch abgeschlossene Körper $k = \bar{k}$ ist die Abbildung (3.6) tatsächlich auch surjektiv, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.8 (**Schwacher Nullstellensatz**). *Es sei $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und $k \to A$ eine k-Algebra von endlichem Typ. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A, k) & \xhookrightarrow{\ker} & \mathrm{mSpec}(A) \\ \psi & \mapsto & \ker(\psi) \end{array}$$

auch surjektiv und also bijektiv.

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.9. *Sei k ein Körper und A eine k-Algebra von endlichem Typ. Ist $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal von A, so ist die Körpererweiterung $k \to A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$ endlich.*

Beweis. Wir wenden auf die Komposition $k \to A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m} =: K$ die Noether-Normalisierung

$$k \hookrightarrow k[x_1, \ldots, x_d] \xhookrightarrow{\text{endlich}} K$$

an. Da die letzte Abbidung endlich ist, ist sie insbesondere ganz. Weil K ein Körper ist, folgt $d = 0$ aus der Invarianz der Krull-Dimension unter ganzen und injektiven Ringhomomorphismen. Also ist $k \hookrightarrow K$ eine endliche Körpererweiterung. □

Beweis des schwachen Nullstellensatzes 3.8. Sei $\mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(A)$ ein maximales Ideal. Wir wollen ein ψ aus $\mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A, k)$ finden mit $\ker(\psi) = \mathfrak{m}$. Mit der algebraischen Abgeschlossenheit von k und dem vorherigen Lemma ist aber

$$\psi \colon A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m} = K \xhookleftarrow{\cong} k$$

ein solches Element. □

Bevor wir diese Situation (3.6) auf nicht algebraisch abgeschlossene Körper und sogar auf beliebige Ringe verallgemeinern, möchten wir noch wissen, wie die Ideale $\ker(\psi_{\underline{a}})$ aus (3.6) genau aussehen. Sei R ein Ring und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Ist $\underline{a} := (a_1, \ldots, a_n) \in R^n$ ein Tupel von Elementen, so bezeichnen wir mit

$$I_{\underline{a}} := (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$$

das zugehörige Ideal im Polynomring $R[x_1, \ldots, x_n]$.

Lemma 3.10. *Sei $\underline{a} := (a_1 \ldots, a_n) \in R^n$. Der Kern des surjektiven R-Algebrenhomomorphismus*

$$\begin{array}{rccc} \psi_{\underline{a}}\colon & R[x_1, \ldots, x_n] & \twoheadrightarrow & R \\ & f & \mapsto & f(\underline{a}) \end{array}$$

ist genau das Ideal $I_{\underline{a}}$.

Beweis. Es gilt $I_{\underline{a}} \subseteq \ker(\psi_{\underline{a}})$, da für jedes j offenbar gilt $x_j - a_j \in \ker(\psi_{\underline{a}})$. Man betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I_{\underline{a}} & \hookrightarrow & R[x_1, \ldots, x_n] & \xrightarrow{\pi} & R[x_1, \ldots, x_n]/I_{\underline{a}} & \longrightarrow & 0 \\ \| & & \downarrow & & \| & & \downarrow t & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \ker(\psi_{\underline{a}}) & \hookrightarrow & R[x_1, \ldots, x_n] & \xrightarrow{\psi_{\underline{a}}} & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

von $R[x_1, \ldots, x_n]$-Moduln mit induzierter Ringabbildung t. Es ist sicherlich t surjektiv, da $\psi_{\underline{a}}$ surjektiv ist. Wir wollen zeigen, dass t auch injektiv ist. Sei also $\pi(f) \in \ker(t)$. Wir wollen zeigen, dass $\pi(f) = 0$. Da $\pi(x_j) = \pi(a_j)$ für alle j und da π eine R-Algebrenabbildung ist, gilt folglich auch $\pi(f) = \pi(f(\underline{a}))$. Nun ist aber

$$0 = t(0) = t\pi(f) = t\pi(f(\underline{a})) = \psi_{\underline{a}}(f(\underline{a})),$$

$f(\underline{a}) \in R$ und $\psi_{\underline{a}}$ eingeschränkt auf R ein Isomorphismus. Also gilt $f(\underline{a}) = 0$ und damit $\pi(f) = 0$. Daher ist t ein Isomorphismus und $\ker(\psi_{\underline{a}}) = I_{\underline{a}}$. □

Beispiel 3.11. In einem Ring R gilt nach dem vorherigen Lemma 3.10 also insbesondere, dass für jedes $f \in R[x]$ und $a \in R$

$$f(a) = 0 \iff f \in (x - a).$$

In diesem Fall gibt es also ein $g \in R[x]$ mit $f = g(x - a)$. Hat f den Grad $n \geq 1$, so hat g den Grad $n - 1$. Hat g wieder eine Nullstelle und so weiter, so bekommt man eine Zerlegung $f = (x - a_1) \cdot \cdots \cdot (x - a_n)$. Es kann aber trotzdem f mehr als n-viele Nullstellen haben, denn diese Zerlegung ist nicht unbedingt eindeutig. Es gilt für $R = \mathbb{Z}/8$ zum Beispiel

$$(x - 3)(x - 5) = x^2 - 1 = (x - 1)(x - 7).$$

Hiermit bekommen wir also mit Blick auf (3.6) im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $k = \bar{k}$ eine genaue Beschreibung aller maximalen Ideale $\mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(k[x_1, \ldots, x_n]/I)$: Diese sind genau die Ideale $I_{\underline{a}}$ mit $\underline{a} \in \mathcal{V}_k(I)$.

Bevor wir die Situation (3.6) nun weiter verallgemeinern, möchten wir der Abbildung $\psi\colon A \to K$ zu einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(A)$ aus dem Beweis des schwachen Nullstellensatzes (3.8) einen speziellen Namen geben und sie gleichzeitig allgemeiner für Primideale $\mathfrak{p} \subseteq A$ definieren. Dafür geben wir zunächst der Menge der Primideale einen Namen.

Definition 3.12. Für einen Ring A, bezeichne $\mathrm{Spec}(A)$ die Menge seiner Primideale.

Beispiel 3.13.

(1) Der Nullring 0 hat kein Primideal und daher ist $\mathrm{Spec}(0) = \emptyset$. Da jeder Ring $\neq 0$ ein Primideal hat, ist der Nullring der einzige Ring mit einem leeren Spektrum.
(2) Ist k ein Körper, so ist (0) das einzige Primideal und daher $\mathrm{Spec}(k) = \{(0)\}$.
(3) $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring. Das Ideal (0) ist ein Primideal, da $\mathbb{Z}/(0) \cong \mathbb{Z}$ ein Integritätsbereich ist. Es ist $\mathbb{Z}/(n)$ ein Integritätsbereich genau dann, wenn n eine Primzahl ist, also ist $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0), (2), (3), (5), \ldots\}$.
(4) Es ist $\mathbb{C}[x]$ ein Hauptidealring und daher sind die Primideale (0) oder von einem irreduziblen Element f erzeugt. Da jedes nichtkonstante Polynom nach dem Fundamentalsatz eine Nullstelle hat, sind diese irreduziblen f also genau die Linearfaktoren, also

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]) = \{(0)\} \cup \{(x - a)\}_{a \in \mathbb{C}}.$$

(5) Es ist $\mathbb{R}[x]$ ebenefalls ein Hauptidealring und jedes irreduzible Element entweder ein Linearfaktor oder ein (bis auf Multiplikation mit einer Einheit normiertes) quadratisches Polynom ohne Nullstelle, also

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}(\mathbb{R}[x]) &= \{(0)\} \cup \{(x-a)\}_{a\in\mathbb{R}} \cup \{(x^2+ax+b)\}_{a^2-4b<0} \\ &= \{(0)\} \cup \{(x-a)\}_{a\in\mathbb{R}} \cup \{((x-a)(x-\bar{a}))\}_{a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Es korrespondieren also die maximalen Ideale von $\mathbb{R}[x]$ entweder zu einer reellen Zahl a oder zu einem Paar $(a, \bar{a})$ konjugierter komplexer Zahlen.

(6) Es ist

$$\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x,y]) = \{(0)\} \cup \{(f)\}_{f \text{ irreduzibel}} \cup \{(x-a, y-b)\}_{a,b\in\mathbb{C}}.$$

Da $\dim(\mathbb{C}[x,y]) = 2$ hat jedes Primideal in $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x,y])$ die Höhe 0, 1 oder 2. Es ist (0) das einzige Primideal der Höhe 0, da $\mathbb{C}[x,y]$ irreduzibel ist. Ein Primideal der Höhe 2 ist automatisch maximal und der schwache Nullstellensatz beschreibt genau die maximalen Ideale von $\mathbb{C}[x,y]$. Diese haben offensichtlich die Höhe 2 sind damit genau die Primideale der Höhe 2. Da $\mathbb{C}[x,y]$ faktoriell ist, sind die irreduziblen Elemente genau die Primelemente und erzeugen ein Primideal. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1. Ist $0 \neq f \in \mathfrak{p}$ ein Element, so können wir dieses in irreduzible Elemente zerlegen und da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist liegt eines dieser Elemente f schon in $\mathfrak{p}$. Damit $(f) \subseteq \mathfrak{p}$ und da beide Primideale die Höhe 1 haben folgt Gleichheit. Damit folgt die Beschreibung. Es gilt natürlich $(f) = (g)$ genau dann, wenn sich f und g um eine Einheit unterscheiden und daher ist die Indizierung über die irreduziblen Polynome f nur bis auf Assoziiertheit disjunkt.

(7) Ist X ein kompakter Hausdorff- Raum, so bilden die stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$ einen Ring $C(X,\mathbb{R})$ mit punktweiser Addition und Multiplikation. Die maximalen Ideale von $C(X,\mathbb{R})$ sind genau die Ideale $\mathfrak{m}_x := \{f \in C(X,\mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$, aber es gibt üblicherweise viel mehr Primideale, die nicht leicht zu beschreiben sind.

Definition 3.14. Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ ein Primideal und $f \in A$, so ist die *Auswertung* $f(\mathfrak{p})$ *von* f *an* $\mathfrak{p}$ definiert als das Bild von f unter der Ringabbildung

$$\begin{array}{rccccc}\psi_{\mathfrak{p}}\colon & A & \twoheadrightarrow & A/\mathfrak{p} & \hookrightarrow & \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p}) \\ & f & & \mapsto & & f(\mathfrak{p})\end{array}$$

in den Restklassenkörper $k(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$.

Beispiel 3.15.

(3) Es ist $\psi_{(p)}\colon \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p$ durch $f \mapsto f + (p)$ gegeben und $\psi_{(0)}\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

(4) Es ist $\psi_{(0)}\colon \mathbb{C}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}(x)$ und $\psi_{(x-a)}\colon \mathbb{C}[x] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[x]/(x-a) \cong \mathbb{C}$ gegeben durch $f \mapsto (f + (x-a)) \cong f(a)$.

(5) Es ist $\psi_{(0)}\colon \mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathbb{R}(x)$. Für $a \in \mathbb{R}$ ist $\psi_{(x-a)}\colon \mathbb{R}[x] \twoheadrightarrow \mathbb{R}[x]/(x-a) \cong \mathbb{R}$ gegeben durch $f \mapsto (f + (x-a)) \cong f(a)$. Für $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ bekommt man die Abbildung

$$\psi_{((x-a)(x-\bar{a}))}\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]/((x-a)(x-\bar{a})) \xrightarrow[\alpha]{\cong} \mathbb{C}.$$

die ebenfalls durch $f \mapsto f(a)$ gegeben ist. An dieser Stelle merkt man besonders deutlich, dass die Schreibweise $f(a)$ von dem Isomorphismus α abhängig ist. Anstatt einen Isomorphismus α durch $x \mapsto a$ zu definieren, hätte man auch $x \mapsto \bar{a}$ wählen können.

(7) Es ist $\psi_{\mathfrak{m}_x}\colon C(X,\mathbb{R}) \to C(X,\mathbb{R})/\mathfrak{m}_x \cong \mathbb{R}$ gegeben durch $f \mapsto f(x)$.

Mit dieser Notation liefert der schwache Nullstellensatz 3.8 also im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers $k = \bar{k}$ eine Bijektion

$$\begin{array}{ccccccc}\mathcal{V}_k(I) & \xrightarrow[\bar{\Psi}]{\cong} & \operatorname{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[x_1,\dots,x_n]/I, k) & \xrightarrow[\ker]{\cong} & \operatorname{mSpec}(k[x_1,\dots,x_n]/I) \\ \underline{a} & \mapsto & \psi_{\underline{a}} & \mapsto & \ker(\psi_{\underline{a}}) \\ & & \psi_{\mathfrak{m}} & \mapsto & \mathfrak{m}\end{array} \tag{3.16}$$

und wir können, anstelle von $\underline{a} \in \mathcal{V}_k(I)$, Maximalideale $\mathfrak{m} \in \operatorname{mSpec}(k[x_1,\dots,x_n]/I)$ als „Punkte“ interpretieren.

Für die erste Verallgemeinerung dieser Sichtweise wollen wir, so wie in Lemma 3.3, die Bijektion $\bar{\Psi}\colon \mathcal{V}_K(I) \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[x_1,\dots,x_n]/I, K)$ betrachten, wobei $k \hookrightarrow K$ eine endliche Körpererweiterung ist. Nun ist allerdings nicht mehr klar, ob $\ker(\psi)$ für einen k-Algebrenhomomorphismus $\psi\colon k[x_1,\dots,x_n]/I \to K$ tatsächlich ein maximales Ideal ist. Dieses liefert das folgende Lemma.

Lemma 3.17. *Sei $k \hookrightarrow K$ eine endliche Körpererweiterung, A eine k-Algebra und sei $\psi\colon A \to K$ eine k-Algebrenabbildung. Dann ist* $\ker(\psi)$ *ein Maximalideal.*

Beweis. Wir faktorisieren ψ als Komposition $A \twoheadrightarrow \mathrm{im}(\psi) \hookrightarrow K$ von k-Algebrenabbildungen. Es genügt zu zeigen, dass $\mathrm{im}(\psi)$ ein Körper ist. Für jede Ringabbildung $f\colon R \to S$ gilt dass $S = 0$ genau dann, wenn $f = 0$. Da $K \neq 0$ ist also $\psi \neq 0$ und damit auch $\mathrm{im}(\psi) \neq 0$. Sei $0 \neq x \in \mathrm{im}(\psi)$ ein Element. Wir wollen zeigen, dass x eine Einheit ist. Die Multiplikationsabbildung $\cdot x\colon \mathrm{im}(\psi) \to \mathrm{im}(\psi)$ ist injektiv, denn $\mathrm{im}(\psi)$ ist als Unterring eines Integritätsbereichs K auch ein Integritätsbereich. Nun ist aber $\mathrm{im}(\psi)$ ein k-Untervektorraum des endlichdimensionalen k-Vektorraums K und damit selbst endlichdimensional. Also ist die injektive und k-lineare Multiplikationsabbildung $\cdot x$ auch surjektiv und es gibt insbesondere ein y mit $xy = 1$. Also ist $\mathrm{im}(\psi)$ ein Körper. □

Wir notieren für später noch das folgende Korollar.

Korollar 3.18. *Sei k ein Körper und $\varphi\colon A \to B$ eine k-Algebrenabbildung, wobei B eine k-Algebra von endlichem Typ ist. Dann sind die Urbilder maximaler Ideale unter f wieder maximale Ideale.*

Beweis. Die Aussage ist klar falls $B = 0$ und wir können also $B \neq 0$ annehmen. Es sei $\mathfrak{m} \subseteq B$ ein Maximalideal und wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \searrow^{\psi} & \downarrow p \\ & & B/\mathfrak{m} =: K \end{array}$$

von k-Algebren. Nach Lemma 3.9 ist $k \hookrightarrow K$ eine endliche Körpererweiterung und nach dem vorherigen Lemma 3.17 ist $\ker(\psi)$ ein Maximalideal. Es gilt aber $\ker(\psi) = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$. □

Beispiel 3.19. Das vorherige Korollar ist nicht richtig, falls B nicht von endlichem Typ ist, wie das Beispiel $\varphi\colon k[x] \hookrightarrow k(x)$ zeigt. Hier ist $\varphi^{-1}((0)) = (0) \subseteq k[x]$ kein Maximalideal.

Sei nun also k ein Körper, $I \subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ ein Ideal und $k \hookrightarrow K$ eine endliche Körpererweiterung. Wir bekommen Dank des Lemmas 3.17 eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V}_K(I) & \xrightarrow[\bar{\Psi}]{\cong} & \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[x_1,\dots,x_n]/I, K) & \xrightarrow[\ker]{} & \mathrm{mSpec}(k[x_1,\dots,x_n]/I) \\ \underline{a} & \mapsto & \psi_{\underline{a}} & \mapsto & \ker(\psi_{\underline{a}}) \end{array}$$

die beispielsweise im Fall $k = K$ wegen Bemerkung 3.7 auch injektiv ist.

Umgekehrt liefert ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ von $A = k[x_1,\dots,x_n]/I$ eine k-Algebrenabbildung $\psi_{\mathfrak{m}}\colon A \twoheadrightarrow k(\mathfrak{m})$ in einen Körper, der nach Lemma 3.9 eine endliche Körpererweiterung von k ist. Es ist allerdings üblicherweise $k(\mathfrak{m}) \neq K$ und die naheliegende Frage, ob diese beiden Zuordnungen zueinander invers sind, noch nicht einmal gut formuliert.

Bevor wir sehen werden, wie wir dieses Problem lösen und eine Variante des schwachen Nullstellensatzes 3.8 für nicht-algebraisch angeschlossene Körper formulieren können, machen wir noch eine weitere Verallgemeinerung. Sei R ein Ring, $I \subseteq R[x_1,\dots,x_n]$ ein Ideal und $R \to K$ eine Algebra, wobei K ein Körper ist. Betrachten wir eine beliebige Ringabbildung $\psi\colon A \to K$, so ist $\ker(\psi)$ nicht unbedingt ein maximales Ideal. Ein Beispiel hierfür ist die Inklusion $\psi\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Allerdings ist $\ker(\psi)$ nach dem Argument im ersten Teil des Beweises von Lemma 3.17 immer ein Primideal. Wir bekommen also eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{V}_K(I) & \xrightarrow[\bar{\Psi}]{\cong} & \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x_1,\dots,x_n]/I, K) & \xrightarrow[\ker]{} & \mathrm{Spec}(R[x_1,\dots,x_n]/I) \\ \underline{a} & \mapsto & \psi_{\underline{a}} & \mapsto & \ker(\psi_{\underline{a}}) \end{array}$$

die beispielsweise falls $R \twoheadrightarrow K$ surjektiv ist, wegen Bemerkung 3.7 auch injektiv ist.

Umgekehrt liefert ein Primideal $\mathfrak{p}$ von $A = R[x_1, \ldots, x_n]/I$ eine R-Algebrenabbildung $\psi_{\mathfrak{p}} \colon A \to k(\mathfrak{p})$ in einen Körper. Wie oben ist üblicherweise $k(\mathfrak{p}) \neq K$ und die naheliegende Frage, ob diese beiden Zuordnungen zueinander invers sind, noch nicht einmal gut formuliert. Passen aber zwei R-Algebrenabbildungen $\psi \colon A \to K$ und $\psi' \colon A \to K'$ für Körper K und K' in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & K' \\ & \overset{\psi'}{\nearrow} & \uparrow \\ A & \xrightarrow[\psi]{} & K, \end{array} \tag{3.20}$$

so ist $\ker(\psi) = \ker(\psi')$, da jede Ringabbildung $K \hookrightarrow K'$ zwischen Körpern injektiv ist. Dieses motiviert die folgende Definition.

Definition 3.21. Für einen Ring R und eine Algebra $R \to A$ definieren wir

$$\operatorname*{colim}_{\substack{K \in \mathbf{Fld} \\ R \to K}} \operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(A, K) := \left\{ A \xrightarrow{\psi} K \text{ } R\text{-Algebrenabbildung} \mid \begin{smallmatrix} R \to K \\ K \text{ ist ein Körper} \end{smallmatrix} \right\} / \sim$$

wobei $\psi \sim \psi'$, wenn es ein kommutatives Diagramm (3.20) gibt.

Bemerkung 3.22. Obwohl Schreibweise in der vorherigen Definition 3.21 eine Interpretation als ein bestimmter „Kolimes“ suggeriert, wollen wir dieses einfach als eine Abkürzung für das Objekt auf der rechten Seite, deren Bedeutung wir kennen, betrachten. Für eine R-Algebra A gilt übrigens $\operatorname{colim}_{\substack{K \in \mathbf{Fld} \\ R \to K}} \operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(A, K) \cong \operatorname{colim}_{K \in \mathbf{Fld}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, K)$.

Satz 3.23 (Analogie zum schwachen Nullstellensatz). *Sei R ein Ring und eine Algebra $R \to A$ gegeben. Es gibt eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname*{colim}_{\substack{K \in \mathbf{Fld} \\ R \to K}} \operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(A, K) & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{Spec}(A) \\ [\,\psi\,] & \mapsto & \ker(\psi) \\ [\psi_{\mathfrak{p}}] & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{p}. \end{array}$$

Beweis. Es wurde schon begründet, dass die Abbildung $[\psi] \mapsto \ker(\psi)$ wohldefiniert ist. Die Abbildung $[\psi_{\mathfrak{p}}] \leftarrow\!\shortmid \mathfrak{p}$ ist offenbar ein Rechtsinverses dazu, denn der Kern der Abbildung $A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p} \hookrightarrow k(\mathfrak{p})$ ist $\mathfrak{p}$. Es genügt zu zeigen, dass für alle Elemente $[\psi]$ der linken Seite gilt $[\psi] = [\psi_{\mathfrak{p}}]$ für $\mathfrak{p} := \ker(\psi)$. Dieses folgt durch Betrachten des Diagramms

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\psi}{\nearrow} & & & K \\ A & \twoheadrightarrow & A/\mathfrak{p} & \hookrightarrow & k(\mathfrak{p}), \end{array}$$

mit den universellen Eigenschaften des Quotientenrings $A/\mathfrak{p}$ und des Quotientenkörpers $k(\mathfrak{p}) = \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})$. □

Bemerkung 3.24. Der vorherige Satz 3.23 gibt uns die Möglichkeit, die Menge $\operatorname{Spec}(A)$ als Menge von (Äquivalenzklassen von) „algebraischen Funktionen“ von A zu betrachten. Diese Interpretation ist sehr nützlich.

Bemerkung 3.25. Ist im vorherigen Satz 3.23 der Ring $R = k$ ein Körper, $k \to A$ eine Algebra von endlichem Typ und lässt man als Körper K nur endliche Körpererweiterungen von k zu, so schränkt die Bijektion aus dem Satz ein zu einer Bijektion

$$\operatorname*{colim}_{\substack{K \in \mathbf{Fld} \\ k \hookrightarrow K \text{ endlich}}} \operatorname{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A, K) \xrightarrow{\cong} \operatorname{mSpec}(A). \tag{3.26}$$

Ist außerdem noch $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen, so ist

$$\operatorname{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A, k) \cong \operatorname*{colim}_{\substack{K \in \mathbf{Fld} \\ k \hookrightarrow K \text{ endlich}}} \operatorname{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(A, K).$$

und die Bijektion (3.26) ist genau der schwache Nullstellensatz 3.8.

Der Satz 3.23 und die vorherige Bemerkung sollen suggerieren, dass wir die Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ als „Punkte“ betrachten wollen. Es gibt neben dieser Allgemeinheit noch einen anderen Grund dafür, für einen Ring A das Spektrum $\operatorname{Spec}(A)$ anstelle von $\operatorname{mSpec}(A)$ zu berachten: $\operatorname{mSpec}(-)$ ist nicht gut verträglich mit Ringabbildungen $\varphi\colon A \to B$, also nicht „funktoriell“, wie Beispiel 3.19 zeigt, und $\operatorname{Spec}(-)$ hingegen schon. Wir wollen aber erst einmal die Frage beantworten, welche Mengenabbildung zwischen $\operatorname{Spec}(A)$ und $\operatorname{Spec}(B)$ wir einer Ringabbildung $\varphi\colon A \to B$ überhaupt zuordnen sollen. Ist K ein Körper, so ist φ^* ein natürlicher Kandidat für eine Abbildung:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^*\colon & \operatorname{Hom}(B,K) & \to & \operatorname{Hom}(A,K) \\ & B \xrightarrow{\phi} K & \mapsto & A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\phi} K \end{array}$$

Wir machen nun erst einmal eine Definition und begründen anschließend in Lemma 3.29, wieso diese sinnvoll ist.

Definition 3.27. Für eine Ringabbildung $\varphi\colon A \to B$ definieren wir die Mengenabbildung

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}\colon & \operatorname{Spec}(B) & \to & \operatorname{Spec}(A) \\ & \mathfrak{p} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{p}). \end{array}$$

Beispiel 3.28. Für den Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}[x]$ betrachten wir die Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x]) \twoheadrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{R}[x])$. Diese ist gegeben durch $\tilde{\varphi}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{R}[x]$ und es gilt

$$\begin{array}{rcll} \tilde{\varphi}((0)) & = & (0) & \\ \tilde{\varphi}((x-a)) & = & (x-a) & \text{falls } a \in \mathbb{R} \\ \tilde{\varphi}((x-a)) & = & ((x-a)(x-\bar{a})) & \text{falls } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \end{array}$$

Dieses sieht man wie folgt. Setze $\mathfrak{p} := (x-a) \subseteq \mathbb{C}[x]$ und betrachte die $\mathbb{R}$-Algebrenabbildung $p\varphi\colon \mathbb{R}[x] \hookrightarrow \mathbb{C}[x] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[x]/(x-a) \cong \mathbb{C}$ mit $x \mapsto a$. Deren Kern ist gegeben durch $\ker(p\varphi) = \varphi^{-1}(\ker(p)) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{R}[x]$ und erzeugt von dem Minimalpolynom von a. Dieses ist $(x-a)$, falls $a \in \mathbb{R}$ und $(x-a)(x-\bar{a})$ sonst.

Lemma 3.29. *Sei R ein Ring und $R \to A$, $R \to B$ und $R \to K$ Algebren, wobei K ein Körper ist. Für eine R-Algebrenabbildung $\varphi\colon A \to B$ ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(A,K) & \xrightarrow{\ker} & \operatorname{Spec}(A) \\ {\scriptstyle \varphi^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{\varphi}} \\ \operatorname{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(B,K) & \xrightarrow{\ker} & \operatorname{Spec}(B) \end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Für eine R-Algebrenabbildung $\phi\colon B \to K$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \ker(\varphi^*(\phi)) & = & \ker(\phi\varphi) \\ & = & \{a \in A \mid \phi(\varphi(a)) = 0\} \\ & = & \{a \in A \mid \varphi(a) \in \{b \in B \mid \phi(b) = 0\}\} \\ & = & \varphi^{-1}(\ker(\phi)) \\ & = & \tilde{\varphi}(\ker(\phi)). \end{array}$$

□

Als letztes wollen wir in diesem Kapitel noch klären, wie sich dieser Begriff der „algebraischen Abbildung“ auf Verschwindungsmengen $\mathcal{V}_K(I)$, also algebraische Teilmengen, übersetzt. Als Verbindung mit den obigen Bezeichnungen, kann man im Folgenden $A := R[x_1,\dots,x_n]/I$ und $B := R[y_1,\dots,y_m]/J$ setzen.

Definition 3.30. Seien R ein Ring, $I \subseteq R[x_1,\dots,x_n]$ und $J \subseteq R[y_1,\dots,y_m]$ Ideale und $R \to K$ eine Algebra. Eine Abbildung $\bar{F}\colon \mathcal{V}_K(I) \to \mathcal{V}_K(J)$ heißt *R-algebraisch*, wenn es ein Tupel $(f_1,\dots,f_m)$ von Polynomen $f_i \in R[x_1,\dots,x_n]$ gibt, sodass

$$\begin{array}{rccc} \bar{F}\colon & \mathcal{V}_K(I) & \to & \mathcal{V}_K(J) \\ & \underline{a} := (a_1,\dots,a_n) & \mapsto & (f_1(\underline{a}),\dots,f_m(\underline{a})). \end{array}$$

Eine R-algebraische Abbildung $\bar{F}\colon \mathcal{V}_K(I) \to \mathcal{V}_K(J)$ heißt *R-algebraischer Isomorphismus*, wenn sie eine R-algebraische Umkehrabbildung $\bar{G}\colon \mathcal{V}_K(J) \to \mathcal{V}_K(I)$ hat. In diesem Fall heißen $\mathcal{V}_K(I)$ und $\mathcal{V}_K(J)$ *R-algebraisch isomorph*.

Bemerkung 3.31. Eine algebraische Abbildung $\bar{F}\colon \mathcal{V}_K(I) \to \mathcal{V}_K(J)$ kann offenbar immer „geliftet“ werden zu einer algebraischen Abbildung $F\colon K^n \to K^m$. Mit anderen Worten passt $\bar{F}$ stets in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{F} & K^m \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{V}_K(I) & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathcal{V}_K(J) \end{array}$$

wobei F ebenfalls durch $\underline{a} \mapsto (f_1(\underline{a}), \dots, f_m(\underline{a}))$ gegeben ist. Daher scheint der Begriff einer algebraischen Abbildung auf den ersten Blick im Vergleich zu bekannten Abbildungsbegriffen aus der Topologie oder Analysis zu restiktiv zu sein. Sind allerdings V und W zwei kompakte Mannigfaltigkeiten, so lassen sich diese abgeschlossen als $V \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und $W \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ für geeignete n und m einbetten. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \overset{F}{\dashrightarrow} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\mathrm{pr}_i} & \mathbb{R} \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ V & \xrightarrow{\bar{F}} & W. & & \end{array}$$

Eine stetige Abbildung F ist gegeben durch die Angabe von m-vielen stetigen Abbildungen $\mathrm{pr}_i F$ nach $\mathbb{R}$. Nun sagt aber der Fortsetzungssatz von Tietze, dass sich jede stetige Abbildung $V \to \mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung $\mathrm{pr}_i F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erweitern lässt. Also ist die Definition einer stetigen Abbildung zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten analog zu der Definition 3.30 einer algebraischen Abbildung.

Bemerkung 3.32. Nach der universellen Eigenschaft für den Polynomring ist die Angabe eines Tupels $(f_1, \dots, f_m)$ von Polynomen $f_i \in R[x_1, \dots, x_n]$ gleichbedeutend mit der Angabe einer R-Algebrenabbildung $\varphi\colon R[y_1, \dots, y_m] \to R[x_1, \dots, x_n]$. Einem Tupel $(f_1, \dots, f_m)$ wird dabei die zugehörige Abbildung auf Polynomringen

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & R[y_1, \dots, y_m] & \to & R[x_1, \dots, x_n] \\ & y_i & \mapsto & f_i \\ \text{(oder mit anderen Worten:} & g(-_1, \dots, -_m) & \mapsto & g(f_1(-), \dots, f_m(-)) \quad) \end{array}$$

zugeordnet. Sind $I \subseteq R[x_1, \dots, x_n]$ und $J \subseteq R[y_1, \dots, y_m]$ Ideale, so gibt es eine Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} R[y_1, \dots, y_m] & \xrightarrow{\varphi} & R[x_1, \dots, x_n] \\ \downarrow & & \downarrow \\ R[y_1, \dots, y_m]/J & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & R[x_1, \dots, x_n]/I \end{array}$$

genau dann, wenn $\varphi(J) \subseteq I$.

Beispiel 3.33. Nicht zu jeder algebraischen Abbildung $\bar{F}\colon \mathcal{V}_K(I) \to \mathcal{V}_K(J)$ definiert durch ein Tupel $(f_1, \dots, f_m)$ von Polynomen $f_i \in R[x_1, \dots, x_n]$ muss es eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \bar{\varphi}\colon R[y_1, \dots, y_m]/J & \to & R[x_1, \dots, x_n]/I \\ [y_i] & \mapsto & [f_j] \end{array}$$

geben. Ist beispielsweise $R = K = \mathbb{R}$, $I = (x^2 + 1) \subseteq \mathbb{R}[x]$ und $J = (1) \subseteq \mathbb{R}[y]$, so gibt es eine algebraische Abbildung

$$\bar{F}\colon \emptyset = \mathcal{V}_K(I) \to \mathcal{V}_K(J) = \emptyset$$

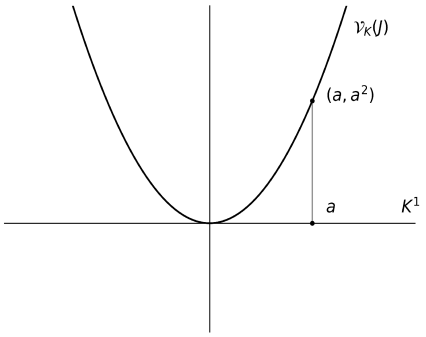
aber keine Abbildung $\bar{\varphi}\colon (0) \cong R[y]/J \to R[x]/I \cong \mathbb{C}$. Wir werden später sehen, dass dieses aber schon der Fall ist, wenn $R = K = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper ist.

Beispiel 3.34. Zu einer algebraischen Abbildung $\bar{F}\colon \mathcal{V}_K(I) \to \mathcal{V}_K(J)$ kann es mehrere Tupel $(f_1, \dots, f_m)$ von Polynomen $f_i \in R[x_1, \dots, x_n]$ geben, die sie definieren. Ist beispielsweise $R = K = \mathbb{F}_2$, $I = (0) \subseteq \mathbb{F}_2[x]$ und $J = (0) \subseteq \mathbb{F}_2[y]$, so ist die Identität

$$\bar{F}\colon \mathbb{F}_2 = \mathcal{V}_{\mathbb{F}_2}(I) \to \mathcal{V}_{\mathbb{F}_2}(J) = \mathbb{F}_2$$

als algebraische Abbildung jeweils definiert durch die Abbildungen $f, g\colon \mathbb{F}_2[y] \to \mathbb{F}_2[x]$ mit $f(y) := x$ und $g(y) := x^2$. Wir werden später sehen, dass dieses nicht vorkommen kann, wenn $R = K = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper ist.

Beispiel 3.35. Sei $R \to K$ eine Algebra und $J \subseteq R[y_1, y_2]$ das Ideal $J := (y_2 - y_1^2)$.



Dann ist

$$\begin{array}{rccc} \bar{F}\colon & K^1 & \to & \mathcal{V}_K(J) \\ & a & \mapsto & (a, a^2) \end{array}$$

eine R-algebraische Abbildung mit R-algebraischer Umkehrabbildung

$$\begin{array}{rccc} \bar{G}\colon & \mathcal{V}_K(J) & \to & K^1 \\ & (b, c) & \mapsto & b \end{array}$$

und damit sind K^1 und $\mathcal{V}_K(J)$ R-algebraisch isomorphe algebraische Teilmengen.

Lemma 3.36. *Seien R ein Ring, $I \subseteq R[x_1, \ldots, x_n]$ und $J \subseteq R[y_1, \ldots, y_m]$ Ideale und $R \to K$ eine Algebra. Sei $\bar{F}\colon \mathcal{V}_K(I) \to \mathcal{V}_K(J)$ eine algebraische Abbildung, die durch eine R-Algebenrabbildung*

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & R[y_1, \ldots, y_m] & \to & R[x_1, \ldots, x_n] \\ & y_j & \mapsto & f_j \end{array}$$

definiert ist, welche als $\bar{\varphi}\colon R[y_1, \ldots, y_m]/J \to R[x_1, \ldots, x_n]/I$ faktorisiert (siehe Bemerkung 3.32). Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}_K(J) & \xrightarrow[\bar{\Psi}_J]{\cong} & \mathrm{Hom}_{R\textbf{-Alg}}(R[y_1, \ldots, y_m]/J, K) \\ \uparrow{\scriptstyle \bar{F}} & & \uparrow{\scriptstyle \bar{\varphi}^*} \\ \mathcal{V}_K(I) & \xrightarrow[\bar{\Psi}_I]{\cong} & \mathrm{Hom}_{R\textbf{-Alg}}(R[x_1, \ldots, x_n]/I, K) \end{array}$$

kommutativ.

Beweis. Für die Kommutativität sei $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{V}_K(I)$. Wir müssen zeigen, dass $\bar{\Psi}_J \bar{F}(\underline{a}) = \bar{\varphi}^* \bar{\Psi}_I(\underline{a})$ gilt. Da dieses beides R-Algebrenabbildungen $R[y_1, \ldots, y_m]/J \to K$ sind, genügt es, diese Gleichheit durch Einsetzen aller Restklassen $\bar{y}_i$ zu zeigen. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \bar{\Psi}_J \bar{F}(\underline{a})(\bar{y}_i) & = & \bar{\Psi}_J(f_1(\underline{a}), \ldots, f_m(\underline{a}))(\bar{y}_i) \\ & = & \Psi_J(f_1(\underline{a}), \ldots, f_m(\underline{a}))(y_i) \\ & = & f_i(\underline{a}) \\ & = & \psi_{\underline{a}}(f_i) \\ & = & \Psi_I(\underline{a})(f_i) \\ & = & \bar{\Psi}_I(\underline{a})(\bar{f}_i) \\ & = & \bar{\Psi}_I(\underline{a})(\bar{\varphi}(\bar{y}_i)) \\ & = & \bar{\varphi}^* \bar{\Psi}_I(\underline{a})(\bar{y}_i). \end{array}$$

□

Definition 3.37. Für einen Ring R und $n \geq 1$ setzt man $\mathbb{A}^n_R := \mathrm{Spec}(R[x_1, \ldots, x_n])$. Ist $R = \mathbb{Z}$ oder keine Verwechselung möglich, so wird das R im Index manchmal weggelassen.

Beispiel 3.38. Es wird manchmal für einen beliebigen Ring R eine „algebraische“ Abbildung $F\colon \mathbb{A}^n_R \to \mathbb{A}^m_R$ definiert durch Angabe von m-vielen Polynomen $f_1, \ldots, f_m \in R[x_1, \ldots, x_n]$, beispielsweise

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \mathbb{A}^1 & \to & \mathbb{A}^2 \\ & a & \mapsto & (a, a^2+1). \end{array}$$

Hiermit ist, inspiriert durch Lemma 3.36, die durch

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & R[y_1, y_2] & \to & R[x] \\ & y_1 & \mapsto & x \\ & y_2 & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

induzierte Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(R[x]) = \mathbb{A}^1_R \to \mathbb{A}^2_R = \operatorname{Spec}(R[y_1, y_2])$ gemeint.

Aufgaben.

4. Die Zariski Topologie auf dem Spektrum eines Rings

Im vorherigen Kapitel haben wir für einen Ring A die Menge $\mathrm{Spec}(A)$ definiert. Diese soll (anstatt zum Beispiel K^n) die Menge der „Punkte“ sein auf denen wir eine zu dem Ring A assoziierte „Geometrie“ studieren möchten. In diesem Kapitel definieren wir eine Topologie auf der Menge $\mathrm{Spec}(A)$ und untersuchen einige ihrer Eigenschaften.

Bemerkung 4.1. Es sei daran erinnert, dass eine *Topologie* auf einer Menge X eine Teilmenge $\mathfrak{T} \subseteq \mathrm{Pot}(X)$ der Potenzmenge von X ist mit den Eigenschaften

(1) $\emptyset \in \mathfrak{T}$ und $X \in \mathfrak{T}$,
(2) endliche Durchschnitte von Elementen aus $\mathfrak{T}$ sind wieder in $\mathfrak{T}$,
(3) beliebige Vereinigungen von Elementen aus $\mathfrak{T}$ sind wieder in $\mathfrak{T}$.

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen die *offenen Mengen* der Topologie. Eine *Basis* einer Topologie $\mathfrak{T}$ ist eine Teilmenge $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$, sodass jede offene Menge $U \in \mathfrak{T}$ eine (beliebige) Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei Mengen mit jeweils einer Topologie ist *stetig*, falls Urbilder offener Mengen wieder offen sind, oder äquivalent, falls Urbilder abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen sind. Eine Abbildung heißt *offen* (bzw. *abgeschlossen*), wenn Bilder offener Mengen wieder offen (bzw. abgeschlossen) sind. Der *Abschluss* $\overline{M}$ (oder genauer $\overline{M}^X$) einer Teilmenge $M \subseteq X$ eines topologischen Raums X ist der Schnitt über alle abgeschlossenen Teilmengen von X, die M enthalten. Die Teilmenge M heißt *dicht*, falls ihr Abschluss das ganze X ist, also wenn $\overline{M} = X$ gilt. Es heißt $f\colon X \to Y$ *dominant*, wenn der Abschluss des Bildes in Y dicht ist, also wenn $\overline{f(X)} = Y$ gilt. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt ein *Homöomorphismus*, falls sie eine stetige Umkehrabbildung $g\colon Y \to X$ hat. In diesem Fall heißen X und Y *homöomorph* (oder *topologisch äquivalent*) und man schreibt $X \cong Y$. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt eine *offene Einbettung* (bzw. *abgeschlossene Einbettung*), falls f offen (bzw. abgeschlossen) ist und die von f induzierte Abbildung $X \cong f(X)$ auf das Bild von f ein Homöomorphismus. Ist f ein Homöomorphismus auf sein Bild, so ist f offen (bzw. abgeschlossen) genau dann, wenn $f(X) \subseteq Y$ eine offene (bzw. abgeschlossene) Teilmenge ist.

Bemerkung 4.2. Ist X ein toplogischer Raum und $X' \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist X' selbst ein topologischer Raum mit der *Unterraumtopologie* $\mathfrak{T}' := \{U \cap X' \in \mathrm{Pot}(X') \mid U \in \mathfrak{T}\}$. Dieses ist die gröbste Topologie, sodass die Inklusionsabbildung $X' \hookrightarrow X$ stetig ist. Eine Teilmenge $Z' \subseteq X'$ ist abgeschlossen in der Unterraumtopologie genau dann, wenn es eine abgeschlossene Menge $Z \subseteq X$ gibt mit $Z' = Z \cap X'$. Für die jeweiligen Abschlüsse einer weiteren Teilmenge $M \subseteq X' \subseteq X$ gilt

$$\overline{M}^X \cap X' = \overline{M}^{X'}.$$

Definition 4.3. Seien A ein Ring und $I \subseteq A$ eine Teilmenge. Dann heißt die Teilmenge

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(I) &:= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \forall f \in I : f(\mathfrak{p}) = 0\} \end{aligned}$$

von $\mathrm{Spec}(A)$ die *Verschwindungsmenge* von I. Es gilt sicherlich $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}((I))$. Für $f \in A$ schreibt man $\mathcal{V}(f) := \mathcal{V}((f))$ und setzt

$$\begin{aligned} D(f) &:= \mathrm{Spec}(A) \setminus \mathcal{V}(f) \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f(\mathfrak{p}) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Lemma 4.4. *Seien A ein Ring, I und J Ideale von A und $\{I_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von Idealen von A. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(0) = \operatorname{Spec}(A) \quad &\text{und} \quad \mathcal{V}(A) = \emptyset \\
I \subseteq J \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(I) \\
\mathcal{V}(\sqrt{I}) \quad &= \quad \mathcal{V}(I) \\
\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) \quad &= \quad \mathcal{V}(I \cap J) \quad = \quad \mathcal{V}(IJ) \\
\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{V}(I_i) \quad &= \quad \mathcal{V}(\textstyle\sum_{i\in\mathcal{I}} I_i) \\
\bigcap_{f\in I} \mathcal{V}(f) \quad &= \quad \mathcal{V}(I).
\end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Behauptungen sind direkt klar.

Für die dritte Behauptung benutzen wir, dass in dem Körper $k(\mathfrak{p})$ gilt, dass $f(\mathfrak{p}) = 0$ genau dann, wenn $f^n(\mathfrak{p}) = \psi_{\mathfrak{p}}(f^n) = \psi_{\mathfrak{p}}(f)^n = f(\mathfrak{p})^n = 0$ für ein $n > 0$.

Für die erste Gleichheit der vierten Behauptung sei zunächst $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$, also $I \subseteq \mathfrak{p}$ oder $J \subseteq \mathfrak{p}$. In beiden Fällen gilt aber $I \cap J \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I \cap J)$. Für die andere Richtung sei $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I \cap J)$. Also $IJ \subseteq I \cap J \subseteq \mathfrak{p}$. Da aber $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgt $I \subseteq \mathfrak{p}$ oder $J \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$. Die zweite Gleichheit gilt, da $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$.

Für die vorletzte Behauptung sei zunächst $\mathfrak{p} \in \cap_i \mathcal{V}(I_i)$, also $I_i \subseteq \mathfrak{p}$ für alle i. Da $\mathfrak{p}$ ein Ideal ist, ist aber auch das von $\cup_i I_i$ erzeugte Ideal $\sum_i I_i$ in $\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(\sum_i I_i)$. Für die andere Richtung sei $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(\sum_i I_i)$, also $I_i \subseteq \sum_i I_i \subseteq \mathfrak{p}$, also $I_i \subseteq \mathfrak{p}$ für alle i, also $\mathfrak{p} \in \cap_i \mathcal{V}(I_i)$.

Die letzte Behauptung ist ein Spezialfall der vorletzten, da $I = \sum_{f\in I}(f)$. □

Korollar 4.5. *Seien A ein Ring, $n > 0$ eine natürliche Zahl, f und g Elemente und I ein Ideal von A. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
D(0) = \emptyset \quad &\text{und} \quad D(1) = \operatorname{Spec}(A) \\
D(f) = \emptyset \quad &\Longleftrightarrow \quad f \text{ ist nilpotent} \\
D(f) = \operatorname{Spec}(A) \quad &\Longleftrightarrow \quad f \in A^\times \\
D(f) \cap D(g) \quad &= \quad D(fg) \\
D(f^n) \quad &= \quad D(f) \\
\bigcup_{f\in I} D(f) \quad &= \quad \operatorname{Spec}(A) \setminus \mathcal{V}(I).
\end{aligned}$$

Insbesondere bilden die Mengen $D(f)$ für $f \in A$ die Basis einer Topologie auf $\operatorname{Spec}(A)$*. Die abgeschlossenen Mengen dieser Topologie sind genau die Mengen $\mathcal{V}(I)$ für ein Ideal $I \subseteq A$.*

Beweis. Die erste Behauptung ist klar.

Die zweite Behauptung gilt, da nach dem Satz über das Nilradikal A.16 das Element f genau dann in allen Primidealen enthalten ist, wenn es nilpontent ist.

Die dritte Behauptung gilt, da nach Korollar A.9 das Element f genau dann in keinem Primideal enthalten ist, wenn es eine Einheit ist.

Für die vierte Behauptung benutzen wir, dass im Körper $k(\mathfrak{p})$ gilt $(fg)(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})g(\mathfrak{p})$ und somit $fg(\mathfrak{p}) \neq 0$ genau dann, wenn $f(\mathfrak{p}) \neq 0$ und $g(\mathfrak{p}) \neq 0$.

Die vorletzte Behauptung ist ein Spezialfall der vierten.

Für die letzte Behauptung benutzt man die letzte Behauptung von Lemma 4.4. □

Definition 4.6. Die Topologie auf $\operatorname{Spec}(A)$ aus Korollar 4.5 heißt *Zariski Topologie.*

Lemma 4.7. *Für eine einelementige Teilmenge $\{\mathfrak{q}\} \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ gilt*

$$\overline{\{\mathfrak{q}\}} = \mathcal{V}(\mathfrak{q}).$$

Insbesondere ist $\{\mathfrak{q}\} \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein Maximalideal ist. (In diesem Fall sagen wir, dass $\mathfrak{q}$ ein abgeschlossener Punkt *von $\operatorname{Spec}(A)$ ist. Insbesondere hat jeder Ring $A \neq 0$ mindestens einen abgeschlossenen Punkt.)*

Beweis. Es ist $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$ eine abgeschlossene Menge, die $\mathfrak{q}$ enthält, also $\overline{\{\mathfrak{q}\}} \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{q})$. Für die andere Inklusion sei $\overline{\{\mathfrak{q}\}} = \mathcal{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Da $\mathfrak{q}$ ein Element dieser Menge ist, gilt $I \subseteq \mathfrak{q}$ und damit $\mathcal{V}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathcal{V}(I) = \overline{\{\mathfrak{q}\}}$. Die zweite Behauptung ist klar. □

Bemerkung 4.8. Eine (lokal kleine) *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten, Mengen $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ von *Morphismen* zwischen zwei Objekten X und Y und Kompositionsabbildungen

$$\circ\colon \operatorname{Hom}_{C}(X, Y) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z),$$

die assoziativ sind und für die es Identitäten $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ gibt. Zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es die *Opposite Kategorie* $\mathcal{C}^{op}$ mit den gleichen Objekten und Morphismen $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Für die genaue Definition einer Kategorie verweisen wir auf [2]. Ein *Funktor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen zwei Kategorien sind eine Abbildung der Objekte von $\mathcal{C}$ in die Objekte von $\mathcal{D}$ und Abbildungen

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)),$$

die mit der Komposition und den Identitäten verträglich sind, also mit $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ und $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. Für die genaue Definition eines Funktors verweisen wir wieder auf [2].

Lemma 4.9. *Ist $\varphi\colon A \to B$ eine Ringabbildung und $I \subseteq A$ ein Ideal, so gilt für die induzierte Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$, dass*

$$\tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{V}(I)) = \mathcal{V}(\varphi(I))$$

und

$$\tilde{\varphi}^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$$

für ein $f \in A$. Insbesondere ist $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ stetig bezüglich der Zariski Topologie und die Zuordnung

$$\begin{array}{rccc} \operatorname{Spec}\colon & \mathbf{Ring}^{op} & \to & \mathbf{Top} \\ & A & \mapsto & \operatorname{Spec}(A) \\ & \varphi & \mapsto & \tilde{\varphi} \end{array}$$

von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der topologischen Räume ein Funktor.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{V}(I)) &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) \in \mathcal{V}(I)\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid I \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \varphi(I) \subseteq \mathfrak{q}\} \\ &= \mathcal{V}(\varphi(I)). \end{aligned}$$

Die dritte Gleichheit benötigt vielleicht eine Erklärung: Ist $I \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, so folgt durch Anwenden von φ auch $\varphi(I) \subseteq \varphi\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ und es gilt immer $\varphi\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{q}$ (mit Gleichheit für surjektives φ). Ist umgekehrt $\varphi(I) \subseteq \mathfrak{q}$, so folgt $\varphi^{-1}\varphi(I) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ und es gilt immer $I \subseteq \varphi^{-1}\varphi(I)$ (mit Gleichheit für injektives φ).

Analog sieht man

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{-1}(D(f)) &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) \in D(f)\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \varphi(f) \notin \mathfrak{q}\} \\ &= D(\varphi(f)). \end{aligned}$$

□

Lemma 4.10. *Sei A ein Ring.*

(1) Ist $\varphi\colon A \twoheadrightarrow A/I$ mit $a \mapsto a+I$ surjektiv, so ist die Abbildung $\tilde{\varphi}$ injektiv, es gibt eine Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(A/I) & \xhookrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathrm{Spec}(A) \\ & \overset{t}{\searrow}^{\cong} & \uparrow \text{mit Unterraumtopologie} \\ & & \mathcal{V}(I) \end{array}$$

und t ist ein Homöomorphismus.

(2) Ist $\varphi\colon A \to S^{-1}A$ eine Lokalisierung von A an einer multiplikativen Teilmenge S, so ist die Abbildung $\tilde{\varphi}$ injektiv, es gibt eine Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(S^{-1}A) & \xhookrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathrm{Spec}(A) \\ & \overset{t}{\searrow}^{\cong} & \uparrow \text{mit Unterraumtopologie} \\ & & \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \end{array}$$

und t ist ein Homöomorphismus. Im Spezialfall der Lokalisierung $A_{\mathfrak{q}}$ an einem Primideal $\mathfrak{q} \subseteq A$ ist dieser Unterraum genau $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$ und im Fall der Lokalisierung $A[\frac{1}{f}]$ weg von einem Element $f \in A$ ist dieser Unterraum genau $D(f)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst (1). Nach der Idealkorrespondenz für Quotienten A.6, bildet $\tilde{\varphi}$ bijektiv auf den Unterraum $\mathcal{V}(I)$ ab.

Um zu zeigen, dass t stetig ist, benutzen wir eine generelle Aussage: Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, die durch $t\colon X \to Y'$ über eine Teilmenge $Y' \subseteq Y$ faktorisiert, so ist t eine stetige Abbildung, falls Y' die Unterraumtopologie trägt: Ist $Z' \subseteq Y'$ eine abgeschlossene Menge, gibt es $Z \subseteq Y$ abgeschlossen mit $Z' = Z \cap Y'$. Dann gilt $t^{-1}(Z') = f^{-1}(Z') = f^{-1}(Z \cap Y') = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(Y') = f^{-1}(Z) \cap X = f^{-1}(Z)$, welches abgeschlossen ist, da f stetig ist. Also ist t stetig.

Es genügt zu zeigen, dass t abgeschlossen ist, denn eine stetige bijektive Abbildung, die abgeschlossen ist, ist ein Homöomorphismus. Sei also $\mathcal{V}(J) \subseteq \mathrm{Spec}(A/I)$ abgeschlossen. Da $(0) \subseteq J$ folgt $I = \varphi^{-1}((0)) \subseteq \varphi^{-1}(J)$ und nach der Idealkorrespondenz für Quotienten A.6 gilt die dritte und die vierte Gleichung der folgenden Beobachtung.

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\mathcal{V}(J)) &= \{\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \in \mathcal{V}(J)\} \\ &= \{\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A) \mid J \subseteq \mathfrak{q}\} \\ &= \{\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A) \mid \varphi^{-1}(J) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p} \text{ und } \varphi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \varphi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \mathcal{V}(\varphi^{-1}(J)). \end{aligned}$$

Also ist t ein Homöomorphismus.

Nun zeigen wir (2). Nach der Idealkorrespondenz für Lokalisierungen A.14 bildet $\mathrm{Spec}(l_S)$ bijektiv auf den Unterraum $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$ ab und in den erwähnten beiden Spezialfällen wird dieser entsprechend anders beschrieben. Es ist t nach dem obigen Argument stetig und es genügt die Abgeschlossenheit zu zeigen. Sei also $\mathcal{V}(J) \subseteq \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ abgeschlossen. Dann gilt mit der Idealkorrespondenz für Lokalisierungen A.14, dass

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\mathcal{V}(J)) &= \{\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \in \mathcal{V}(J)\} \\ &= \{\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A) \mid J \subseteq \mathfrak{q}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \text{ und } J \subseteq S^{-1}\mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \text{ und } \varphi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \tilde{\varphi}(\mathrm{Spec}(S^{-1}A)) \cap \mathcal{V}(\varphi^{-1}(J)). \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.11.

- Der surjektive Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p$ induziert eine abgeschlossene Einbettung $\tilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.
- Der injektive Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ induziert eine offene Einbettung $\tilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

- Der injektive Ringhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ induziert allerdings eine Einbettung $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$, die weder offen noch abgeschlossen ist, denn der Unterraum

$$Y' = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) \mid \mathfrak{p} \cap (\mathbb{Z} \setminus (p)) = \emptyset\} = \{(0), (p)\}$$

ist weder offen noch abgeschlossen. Dieses sieht man wie folgt: Wäre er abgeschlossen, so wäre auch $\mathcal{V}((0)) = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ darin enthalten, was offensichtlich nicht gilt. Wäre er offen, so enthielte er eine basisoffene Menge $\emptyset \neq D(f) = \{(q) \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) \mid f \notin (q)\} = \{(q) \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) \mid q \nmid f)\}$ aber diese Mengen enthalten unendlich viele Elemente, da f nicht nilpotent ist, also $f \neq 0$ in $\mathbb{Z}$.

Satz 4.12. *Ist A ein Ring, so ist der topologische Raum* $\operatorname{Spec}(A)$ *quasikompakt, es hat also jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung.*

Beweis. Eine offene Überdeckung von $\operatorname{Spec}(A)$ lässt sich verfeinern zu einer offenen Überdeckung durch Mengen der Form $D(s)$, da diese eine Basis der Topologie bilden. Es genügt, eine endliche Teilüberdeckung dieser verfeinerten offenen Überdeckung $\{D(s)\}_{s\in\mathcal{I}}$ zu finden. Sei nun $I \subseteq A$ das von den Elementen $s \in \mathcal{I}$ erzeugt Ideal. Mit Korollar 4.5 gilt

$$\operatorname{Spec}(A) = \bigcup_{s\in\mathcal{I}} D(s) = \operatorname{Spec}(A) \setminus \mathcal{V}(I)$$

und daher $\mathcal{V}(I) = \emptyset$. Weil also kein Primideal zwischen I und A liegt, gilt $I = A$ nach Satz A.7 (Zorns Lemma). Also ist insbesondere $1 \in I$ und es gibt eine Darstellung

$$1 = a_1 s_1 + \ldots + a_n s_n$$

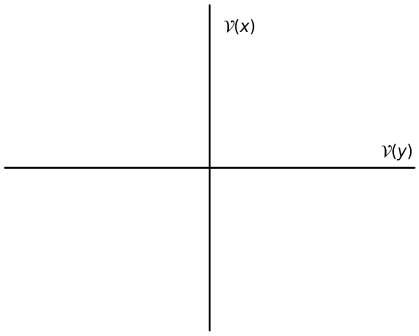
für endlich viele $s_j \in \mathcal{I}$ und $a_j \in A$. Dann gilt $A = (s_1, \ldots, s_n)$ und daher mit Korollar 4.5 $\operatorname{Spec}(A) = \cup_{i=1}^{n} D(s_i)$ und wir haben eine offene endliche Teilüberdeckung gefunden. □

Definition 4.13. Sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum und seien die Teilmengen von X mit der Unterraumtopologie aufgefasst.

(1) Es heißt X *zusammenhängend*, wenn er nur trivial als disjunkte Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen geschrieben werden kann, d.h. wenn für abgeschlossene $X_1, X_2 \subseteq X$ gilt
$$X = X_1 \sqcup X_2 \implies X_1 = X \text{ oder } X_2 = X.$$
(2) Eine Teilmenge $X_\alpha \subseteq X$ heißt *Zusammenhangskomponente von X*, falls X_α zusammenhängend ist und maximal mit dieser Eigenschaft, d.h. wenn für eine zusammenhängende Teilmenge $X_\beta \subseteq X$ mit $X_\alpha \subseteq X_\beta$ folgt dass $X_\alpha = X_\beta$.
(3) Es heißt X *irreduzibel*, wenn er nur trivial als Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen geschrieben werden kann, d.h. wenn für abgeschlossene $X_1, X_2 \subseteq X$ gilt
$$X = X_1 \cup X_2 \implies X_1 = X \text{ oder } X_2 = X.$$
(4) Eine Teilmenge $X_\alpha \subseteq X$ heißt *Irreduzibilitätskomponente von X*, falls X_α irreduzibel ist und maximal mit dieser Eigenschaft, d.h. wenn für eine irreduzible Teilmenge $X_\beta \subseteq X$ mit $X_\alpha \subseteq X_\beta$ folgt dass $X_\alpha = X_\beta$.
(5) Ein Punkt $\eta \in X$ heißt *generischer Punkt von X*, falls $\overline{\{\eta\}} = X$.

Bemerkung 4.14. Es ist natürlich jeder irreduzible Raum X auch zusammenhängend. Der leere topologische Raum $X = \emptyset$ ist weder zusammenhängend noch irreduzibel.

Beispiel 4.15. Der abgeschlossene Unterraum $\operatorname{Spec}(k[x,y]/(xy)) \cong \mathcal{V}(xy) = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y) \subseteq \operatorname{Spec}(k[x,y]) = \mathbb{A}^2_k$ ist nicht irreduzibel, da $\mathcal{V}(x) \neq \mathcal{V}(xy) \neq \mathcal{V}(y)$.



Wir werden später sehen (Korollar 5.10), dass dieser Raum aber zusammenhängend ist.

Bemerkung 4.16. In der klassischen Topologie des $\mathbb{R}^n$ ist der Begriff des irreduziblen topologischen Raums nicht von Bedeutung, da ein Hausdorff-Raum genau dann irreduzibel ist, wenn er aus genau einem Punkt besteht. Ebenso ist der Begriff des generischen Punkts hier uninteressant, da einelementige Mengen in einem Hausdorff-Raum abgeschlossen sind.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Untersuchung von Irreduzibilität, da die entsprechenden Aussagen über Zusammenhang Gegenstand der klassischen mengentheoretischen Topologie sind und als bekannt vorausgesetzt werden können.

Lemma 4.17. *Sei X ein topologischer Raum und seien Teilmengen von X mit der Unterraumtopologie aufgefasst. Dann gilt:*

(1) Einelementige Teilmengen $\{x\} \subseteq X$ sind irreduzibel.

(2) Der Abschluss $\overline{M}$ einer irreduziblen Teilmenge $M \subseteq X$ ist ebenfalls irreduzibel.

(3) Eine Irreduzibilitätskomponente X_α von X ist (irreduzibel und) abgeschlossen.

(4) Jede irreduzible Teilmenge $M \subseteq X$ ist enthalten in einer Irreduzibilitätskomponente X_α von X.

(5) Es ist X die Vereinigung seiner Irreduzibilitätskomponenten.

(6) Es gilt

$$X \text{ irreduzibel} \iff \text{Der Durschnitt aller zwei nichtleeren offenen Teilmengen ist nichtleer}$$

(7) Es gilt

$$X \text{ irreduzibel} \iff \text{Jede nichtleere offene Teilmenge ist dicht und irreduzibel}$$

(8) Ist X eine endliche Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen X_α unter denen keine Inklusionsbeziehungen gelten, so sind diese genau die Irreduzibilitätskomponenten von X.

Beweis. (1) ist klar.

Für (2) sei $\overline{M} = M_1' \cup M_2'$ für abgeschlossene $M_1', M_2' \subseteq \overline{M}$. Es gibt also $M_1, M_2 \subseteq X$ abgeschlossen mit $M_1' = M_1 \cap \overline{M}$ und $M_2' = M_2 \cap \overline{M}$. Dann $M = \overline{M} \cap M = (M_1' \cup M_2') \cap M = (M_1' \cap M) \cup (M_2' \cap M) = (M_1 \cap M) \cup (M_2 \cap M)$. Da M irreduzibel ist gilt also oBdA $M = M_1 \cap M$. Dann aber $\overline{M} = \overline{M_1 \cap M} \subseteq \overline{M_1} \cap \overline{M} = M_1 \cap \overline{M} = M_1'$. Also ist $\overline{M}$ irreduzibel.

Es folgt (3) direkt aus (2) und der Definition.

Für (4) sei $M \subseteq X$ eine irreduzible Teilmenge. Betrachte die folglich nichtleere Menge $P := \{Z \subseteq X \mid Z \text{ irreduzibel und } M \subseteq Z \subseteq X\}$ die bezüglich der Mengeninklusion partial geordnet ist. Mit Zorns Lemma folgt die Behauptung, wenn wir zeigen, dass jede Kette $T \subseteq P$ eine obere Schranke in P hat. Sei also T eine Kette. Es genügt zu zeigen, dass $Z' := \cup_{Z \in T} Z$ irreduzibel ist. Sei also $Z' = Z_1' \cup Z_2'$ für abgeschlossene $Z_1', Z_2' \subseteq Z'$. Es gibt also wieder $Z_1, Z_2 \subseteq X$ abgeschlossen mit $Z_1' = Z_1 \cap Z'$ und $Z_2' = Z_2 \cap Z'$. Für ein $Z \in T$ gilt dann $Z = Z' \cap Z = (Z_1' \cup Z_2') \cap Z = (Z_1' \cap Z) \cup (Z_2' \cap Z) = (Z_1 \cap Z) \cup (Z_2 \cap Z)$. Da ein jedes solches Z irreduzibel ist, ist es entweder in Z_1 oder in Z_2 enthalten. Sind alle in einem der beiden enthalten, so auch Z' und wir sind fertig. Ist aber sonst oBdA $Z \not\subseteq Z_1$ so sind

auch alle größeren nicht in Z_1 und daher in Z_2. Da $Z \subseteq Z_2$ sind auch alle kleineren in Z_2 enthalten und daher das ganze Z'.

Es folgt (5) aus (1) und (4).

Für (6) sei zunächst X irreduzibel und U_1, U_2 nichtleere offene Teilmengen mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann $X = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$, also oBdA $X = X \setminus U_1$ und daher $U_1 = \emptyset$, ein Widerspruch. Für die andere Richtung sei $X = X_1 \cup X_2$ für abgeschlossene Mengen X_1 und X_2. Für die offenen Mengen $U_1 := X \setminus X_1$ und $U_2 := X \setminus X_2$ gilt also $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, also $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$. Daher ist X irreduzibel.

Für (7) sei U eine nichtleere offene Teilmenge von X. Wir zeigen zunächst, dass $\overline{U} = X$. Da aber $X = (X \setminus U) \cup \overline{U}$ und X irreduzibel ist, folgt $X \subseteq \overline{U}$ und damit $\overline{U} = X$. Es ist U irreduzibel, denn wenn es nicht irreduzibel wäre, gäbe es nach (6) zwei nichtleere offene Teilmengen darin mit nichtleerem Schnitt. Diese wären dann aber auch offen in X und somit X nach (6) ncht irreduzibel. Dieses ist ein Widerspruch und also U irreduzibel.

Für (8) sei X'_α eine Irreduzibilitätskomponente von $X = \cup X_\alpha$. Dann $X'_\alpha = X \cap X'_\alpha = (\cup X_\alpha) \cap X'_\alpha = \cup (X_\alpha \cap X'_\alpha)$. Durch Induktion nach der Anzahl der X_α bekommt man, dass eines dieser gleich X'_α ist. □

Korollar 4.18. *Das Bild eines irreduziblen topologischen Raums unter einer stetigen Abbildung ist ein irreduzibler topologischer Raum.*

Beweis. Sei $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive stetige Abbildung. Wir benutzen Lemma 4.17.(6). Seien dafür V_1 und V_2 zwei nichtleere offene Teilmengen von Y. Dann sind $f^{-1}(V_1)$ und $f^{-1}(V_2)$ jeweils nichtleer und offen. Weil X irreduzibel ist, gilt $\emptyset \neq f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2)$ und daher $\emptyset \neq f f^{-1}(V_1 \cap V_2) = V_1 \cap V_2$. □

Lemma 4.19. *Sei X ein topologischer Raum, dann gilt:*

(1) Hat X (mindestens) einen generischen Punkt, so ist X irreduzibel.

(2) Ein Punkt $\eta \in X$ ist generisch genau dann wenn er in jeder nichtleeren offenen Teilmenge liegt.

Beweis. Wir zeigen zunächst (1). Aus Punkt (1) und (2) von Lemma 4.17 folgt, dass für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $\overline{\{x\}} \subseteq X$ irreduzibel ist. Hat X einen generischen Punkt η, so ist also $\overline{\{\eta\}} = X$ irreduzibel.

Für (2) sei η ein generischer Punkt und nicht enthalten in einer nichtleeren offene Teilmenge U, so ist $X \setminus U$ eine abgeschlossene Teilmenge, die η enthält und daher $X = \overline{\{\eta\}} \subseteq X \setminus U$, ein Widerspruch. Ist umgekehrt η in jeder nichtleeren offenen Menge enthalten und $\overline{\{\eta\}} \neq X$, so ist $U := X \setminus \overline{\{\eta\}}$ nichtleer und offen, enthält aber nicht η, ein Widerspruch. □

Lemma 4.20. *Der topologische Raum* $\mathrm{Spec}(A)$ *hat höchstens einen generischen Punkt.*

Beweis. Sind $\eta, \eta' \in \mathrm{Spec}(A)$ zwei generische Punkte, so gilt mit Lemma 4.7, dass $\overline{\{\eta\}} = \mathcal{V}(\eta) = \mathcal{V}(\eta') = \overline{\{\eta'\}}$ und damit $\eta \subseteq \eta'$ und $\eta' \subseteq \eta$, also Gleichheit. □

Das folgende Lemma zeigt, dass im Fall eines lokalen Rings $(A, \mathfrak{m})$ der (einzige) abgeschlossene Punkt $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$ eine Art duale Rolle zu einem generischen Punkt spielt.

Lemma 4.21. *Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, so liegt der Punkt $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spec}(A)$ in jeder nichtleeren abgeschlossenen Menge. Insbesondere ist das Spektrum eines lokalen Rings zusammenhängend.*

Beweis. Eine nichtleere abgeschlossene Menge $\mathcal{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$ enthält ein Primideal $\mathfrak{p}$ und somit auch $\mathfrak{m}$, da $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$. □

5. Die Ideale-Teilmenegen Korrespondenz

Definition 5.1. Seien A ein Ring und $M \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ eine Teilmenge. Das Ideal

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(M) &:= \bigcap_{\mathfrak{p}\in M} \mathfrak{p} \\ &= \{f \in A \mid \forall \mathfrak{p} \in M : f(\mathfrak{p}) = 0\} \end{aligned}$$

von A heißt das *Verschwindungsideal* von M.

Satz 5.2 (**Ideale-Teilmengen Korrespondenz**). *Sei A ein Ring. Dann gibt es eine inklusionsumkehrende Bijektion*

$$\left\{ \textit{Radikalideale von } A \right\} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Abgeschlossene Teilmengen} \\ \textit{von } \operatorname{Spec}(A) \end{array} \right\}$$

mit

(1) $\mathcal{I}\mathcal{V}(I) = \sqrt{(I)}$ *für eine Teilmenge* $I \subseteq A$,
(2) $\mathcal{V}\mathcal{I}(M) = \overline{M}$ *für eine Teilmenge* $M \subseteq \operatorname{Spec}(A)$

Beweis. Es ist durch die Definition der abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Spec}(A)$ klar, dass $\mathcal{V}$ das angegebene Bild hat. Um zu zeigen, dass $\mathcal{I}(M)$ ein Radikalideal ist, sei $f^n \in \mathcal{I}(M)$. Dann gilt für alle $\mathfrak{p} \in M$, dass $0 = f^n(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})^n$ im Körper $k(\mathfrak{p})$ und daher $f(\mathfrak{p}) = 0$. Daher ist $f \in \mathcal{I}(M)$ und $\mathcal{I}(M)$ ein Radikalideal. (Oder direkter: Ein beliebiger Durchschnitt von Radikalidealen ist ein Radikalideal.)

Es ist klar, dass es genügt, (1) und (2) zu zeigen.

Für (1) können wir annehmen, dass $I \subseteq A$ ein Ideal ist. Bezeichnet $\varphi\colon A \twoheadrightarrow A/I$ mit $a \mapsto a + I$ die Quotientenprojektion, so folgt

$$\begin{aligned} \sqrt{I} &= \varphi^{-1}(\operatorname{Nil}(A/I)) \\ &= \varphi^{-1}\left(\bigcap_{\substack{\mathfrak{q}\subseteq A/I \\ \text{Primideal}}} \mathfrak{q}.\right) && \text{(Satz über das Nilradikal A.16)} \\ &= \bigcap_{\substack{\mathfrak{q}\subseteq A/I \\ \text{Primideal}}} \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ &= \bigcap_{\varphi^{-1}(\mathfrak{q})\in\mathcal{V}(I)} \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) && \text{(Idealkorrespondenz für Quotienten A.6)} \\ &= \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{V}(I)} \mathfrak{p} && \text{(Idealkorrespondenz für Quotienten A.6)} \\ &= \mathcal{I}\mathcal{V}(I). \end{aligned}$$

Für (2) beobachtet man zunächst, dass die Menge M offenbar in der abgeschlossenen Menge $\mathcal{V}\mathcal{I}(M) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \cap_{\mathfrak{p}\in M}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$ enthalten ist. Wir zeigen, dass $\mathcal{V}\mathcal{I}(M)$ die kleinste abgeschlossene Menge mit dieser Eigenschaft ist und daher gleich dem Abschluss $\overline{M}$. Sei also $\mathcal{V}(J)$ eine abgeschlossene Menge mit $M \subseteq \mathcal{V}(J)$, also $J \subseteq \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in M$. Dann folgt auch $J \subseteq \cap_{\mathfrak{p}\in M}\mathfrak{p} = \mathcal{I}(M)$ und daher $\mathcal{V}\mathcal{I}(M) \subseteq \mathcal{V}(J)$. □

Korollar 5.3. *Seien A ein Ring $M \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ eine Teilmenge und $I, J \subseteq A$ Ideale. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\emptyset) = A \quad &\textit{und} \quad \mathcal{I}(\operatorname{Spec}(A)) = \operatorname{Nil}(A) \\ \sqrt{\mathcal{I}(M)} \quad &= \quad \mathcal{I}(M) \\ \mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(J) \quad &\Longleftrightarrow \quad J \subseteq \sqrt{I} \end{aligned}$$

Satz 5.4. *Für einen Ring A schränkt die Bijektion aus Satz 5.2 ein auf die Bijektion*

$$\operatorname{Spec}(A) \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Abgeschlossene und irreduzible} \\ \textit{Teilmengen von } \operatorname{Spec}(A) \end{array} \right\}$$

und $\mathfrak{p}$ ist der eindeutige generische Punkt von $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $\mathcal{V}$ in der angegebenen Menge landet. Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ gilt $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ mit Lemma 4.7 und $\mathfrak{p}$ ist ein (nach Lemma 4.20 eindeutiger) generischer Punkt von $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$. Mit Lemma 4.19 folgt, dass $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ irreduzibel ist.

Nun zeigen wir, dass die Abbildung $\mathcal{I}$ in $\operatorname{Spec}(A)$ landet. Sei dafür $\mathcal{V}(I)$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge von $\operatorname{Spec}(A)$. Dann ist $\mathcal{I}\mathcal{V}(I) = \sqrt{I}$ nach Satz 5.2 und wir möchten

zeigen, dass $\sqrt{I}$ ein Primideal ist. Sei $xy \in \sqrt{I}$. wir müssen zeigen, dass $x \in \sqrt{I}$ oder $y \in \sqrt{I}$. Es gilt $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(xy) = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y)$ und es ist

$$\mathcal{V}(I) = (\mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y)) \cap \mathcal{V}(I) = (\mathcal{V}(x) \cap \mathcal{V}(I)) \cup (\mathcal{V}(x) \cap \mathcal{V}(I))$$

eine Vereinigung von abgeschlossenen Teilmenegen von $\mathcal{V}(I)$. Also oBdA $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(x) \cap \mathcal{V}(I)$, da $\mathcal{V}(I)$ irreduzibel ist. Dann folgt mit Satz 5.2, dass

$$x \in \sqrt{(x)} = \mathcal{I}\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{I}\mathcal{V}(I) = \sqrt{I}. \qquad \square$$

Korollar 5.5. *Für einen Ring A schränkt die Bijektion aus Satz 5.2 ein auf die Bijektion*

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Minimale Primideale}\\ \textit{von } A\end{array}\right\} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c}\textit{Irreduzibilitätskomponenten}\\ \textit{von } \mathrm{Spec}(A)\end{array}\right\}$$

Insbesondere ist A irreduzibel genau dann, wenn $\mathrm{Spec}(A)$ irreduzibel ist und in diesem Fall ist das Primideal $\mathrm{Nil}(A)$ der eindeutige generische Punkt von $\mathrm{Spec}(A)$.

Beweis. Dieses ist klar. Die letzte Aussage folgt mit Korollar A.19 $\square$

Korollar 5.6. *Für einen noetherschen Ring A hat $\mathrm{Spec}(A)$ nur endlich viele Irreduzibilitätskomponenten und daher auch nur endlich viele Zusammenhangskomponenten.*

Beweis. Dieses folgt aus dem vorherigen Korollar 5.5 mit Lemma A.21. $\square$

Nun möchten wir nach den Irreduzibilitätskomponenten von $\mathrm{Spec}(A)$ noch dessen Zusammenhangskomponenten untersuchen.

Beispiel 5.7. Ist $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ ein endliches (direktes) Produkt von Ringen, so gibt es eine kanonische Homöomorphie

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Spec}(A) & = & \mathcal{V}((0), A_2, \ldots, A_n) \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{V}(A_1, \ldots, A_{n-1}, (0))\\ & \cong & \mathrm{Spec}(A_1) \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Spec}(A_n)\end{array}$$

von topologischen Räumen. Sei umgekehrt eine disjunkte Zerlegung

$$\mathrm{Spec}(A) = \mathcal{V}(I_1) \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{V}(I_n)$$

in endlich viele abgeschlossene Teilmengen gegeben. Für alle zwei Summanden gilt nach Lemma 4.4 also $\emptyset = \mathcal{V}(I_i) \cap \mathcal{V}(I_j) = \mathcal{V}(I_i + I_j)$, also $A = \sqrt{I_i + I_j}$ nach Satz 5.2 und damit $A = I_i + I_j$. Es sind also $I_1, \ldots, I_n$ und damit auch $\sqrt{I_1}, \ldots, \sqrt{I_n}$ paarweise koprime Ideale. Mit dem Chinesischen Restsatz A.2 folgt

$$A/(\sqrt{I_1} \cap \ldots \cap \sqrt{I_n}) \cong A/\sqrt{I_1} \times \ldots \times A/\sqrt{I_n}.$$

Außerdem gilt $\mathrm{Spec}(A) = \mathcal{V}(I_1) \cup \ldots \cup \mathcal{V}(I_n) = \mathcal{V}(I_1 \cap \ldots \cap I_n)$, was mit Satz 5.2 impliziert, dass $\mathrm{Nil}(A) = \sqrt{I_1 \cap \ldots \cap I_n} = \sqrt{I_1} \cap \ldots \cap \sqrt{I_n}$ und daher

$$A_{\mathrm{red}} = A/\mathrm{Nil}(A) \cong A/\sqrt{I_1} \times \ldots \times A/\sqrt{I_n}.$$

Wir haben also, zumindest falls $A = A_{\mathrm{red}}$ reduziert ist, eine Zerlegung $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ in ein endliches direktes Produkt von Ringen gefunden. Diese Behauptung gilt auch für nicht reduziertes A, wie wir gleich sehen werden.

Ein Idempotent in einem Ring A ist ein Element $e \in A$ mit $e^2 = e$. Ist A ein Ring, so gibt es eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl}\{\text{Idempotente von } A\} & \cong & \{\text{Zerlegungen } A = A' \times A''\}\\ e & \mapsto & eA \times (1-e)A \quad (\cong A[\frac{1}{e}] \times A/(e))\\ (1,0) & \hookleftarrow & A' \times A''.\end{array}$$

Zusammen mit dem vorherigen Beispiel 5.7 liefert also jedes Idempotent $e \in A$ eine Zerlegung $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(A') \sqcup \mathrm{Spec}(A'')$. Der folgende Satz 5.9 zeigt, dass diese Zuordnung bijektiv ist.

Bemerkung 5.8. Eine zusammenhängende abgeschlossene und offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $U \neq \emptyset$ ist immer eine Zusammenhangskomponente von X, denn ist X_α eine (notwendigerweise abgeschlossene) Zusammenhangskomponente von X, die U enthält, so ist $X_\alpha \setminus U$ abgeschlossen in X, daher auch in X_α und $X_\alpha = U \sqcup (X_\alpha \setminus U)$ eine Zerlegung in abgeschlossene Teilmengen, woraus $X_\alpha = U$ folgt. Es ist im Allgemeinen aber nicht unbedingt jede Zusammenhangskomponente offen.

Satz 5.9. *Für einen Ring A schränkt die Bijektion aus Satz 5.2 ein auf die Bijektion*

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Idempotente}\\ \text{von } A\end{array}\right\} \xrightarrow[\gamma]{\cong} \left\{\begin{array}{c}\sqrt{(e)} \text{ mit}\\ e \text{ Idempotent}\end{array}\right\} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c}\text{Abgeschlossene und offene}\\ \text{Teilmengen von } \operatorname{Spec}(A)\end{array}\right\}$$

Beweis. Die Abbildung γ ist per Definition surjektiv. Wir werden die Bijektivität der zusammengesetzten Abbildung $\mathcal{V}\gamma$ zeigen. Hierraus ergibt sich zunächst die Injektivität von γ, also ist γ bijektiv und damit auch $\mathcal{V}$. Es ist dann klar, dass $\mathcal{I}$ invers zu $\mathcal{V}$ ist.

Zunächst zeigen wir, dass $\mathcal{V}$ tatsächlich in der angegebenen Menge landet. Sei $e \in A$ ein Idempotent. Dann ist

$$\mathcal{V}(e) \cup \mathcal{V}(1-e) = \mathcal{V}(e(1-e)) = \mathcal{V}(0) = \operatorname{Spec}(A)$$

und $\mathcal{V}(e) \cap \mathcal{V}(1-e) = \mathcal{V}((e)+(1-e)) = \mathcal{V}(1) = \emptyset$. Also ist $\mathcal{V}(e)$ das Komplement von $\mathcal{V}(1-e)$ und somit abgeschlossen und offen.

Für die Injektivität seien nun e und e' Idempotente mit $\mathcal{V}(e) = \mathcal{V}(e')$. Dann folgt wie eben $\mathcal{V}(e) \cup \mathcal{V}(1-e) = \mathcal{V}(e') \cup \mathcal{V}(1-e) = \mathcal{V}(e'(1-e)) = \operatorname{Spec}(A)$ und nach Anwenden von $\mathcal{I}$ mit Satz 5.2, dass $\sqrt{(e'(1-e))} = \operatorname{Nil}(A)$, also ist $e'(1-e)$ nilpotent. Unabhängig davon zeigt eine leichte Rechnung, dass $e'(1-e)$ idempotent ist. Mit Nilpotenz und Idempotenz folgt $e'(1-e) = 0$ und daher $e' = e'e$. Andersherum folgt auch $e = e'e$, also $e = e'$.

Für die Surjektivität sei $\mathcal{V}(I)$ eine abgeschlossene und offene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(A)$. Dann ist ihr Komplement auch abgeschlossen und daher von der Form $\mathcal{V}(J)$. Es gilt nun $\emptyset = \mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I+J)$ und nach Satz 5.2 also $A = \sqrt{I+J}$. Insbesondere ist also $1^n = 1 \in I + J$ und es gibt $a \in I$ und $b \in J$ mit $1 = a + b$. Es gilt ausserdem $\operatorname{Spec}(A) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(IJ)$ und mit Satz 5.2 daher $\operatorname{Nil}(A) = \sqrt{IJ}$. Daher ist ab nilpotent, also $(ab)^n = 0$ für ein $n > 0$. Wir betrachten das Ideal $(a^n, b^n) \subseteq A$. Wäre $(a^n, b^n) \neq A$, so wäre (a^n, b^n) nach Satz A.7 in einem Primideal enthalten, womit auch a und b und daher auch $1 = a + b$ zu dem Primideal gehörten, was ein Widerspruch wäre. Also ist $(a^n, b^n) = A$ und es gibt $x, y \in A$ mit $xa^n + yb^n = 1$. Wir behaupten nun, dass $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(xa^n)$. Damit wären wir fertig, da xa^n idempotent ist wegen

$$xa^n = xa^n(xa^n + yb^n) = (xa^n)^2 + xy(ab)^n = (xa^n)^2.$$

Wir zeigen also die Behauptung: Da $a \in I$ folgt $xa^n \in I$ und damit $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(xa^n)$. Ebenso gilt $\mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(yb^n)$. Läge also ein Element von $\mathcal{V}(xa^n)$ nicht in $\mathcal{V}(I)$, dann läge es in $\mathcal{V}(J)$ und damit in $\mathcal{V}(yb^n)$. Es ist aber $\mathcal{V}(xa^n) \cap \mathcal{V}(yb^n) = \mathcal{V}(xa^n, yb^n) = \mathcal{V}(A) = \emptyset$. □

Korollar 5.10. *Es ist* $\operatorname{Spec}(A)$ *zusammenhängend genau dann, wenn der Ring $A \neq 0$ keine idempotenten Elemente außer* 0 *und* 1 *hat.*

Beweis. Ein nichtleerer topologischer Raum ist zusammenhängend genau dann, wenn die einzigen abgeschlossenen und offenen Teilmengen die leere Menge und der ganze Raum sind. Die Behauptung folgt dann mit Satz 5.9. □

Korollar 5.11. *Sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Dann ist die Zusammenhangskomponente von $\mathfrak{p}$ gegeben durch $\mathcal{V}(\{e \in \mathfrak{p} \mid e \text{ idempotent}\})$.*

Beweis. Es ist eine (nichttriviale) Übungsaufgabe zu zeigen, dass die Zusammenhangskomponente X_α eines Punktes $\mathfrak{p}$ gegeben ist durch den Schnitt aller abgeschlossenen und offenen Mengen Z, die $\mathfrak{p}$ enthalten. Falls dieses gezeigt ist, so folgt mit dem vorherigen Satz 5.9, dass

$$X_\alpha = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in Z \\ Z \text{ offen und} \\ \text{abgeschlossen}}} Z = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(e) \\ e \text{ idempotent}}} \mathcal{V}(e) = \bigcap_{\substack{e \in \mathfrak{p} \\ e \text{ idempotent}}} \mathcal{V}(e) = \mathcal{V}(\{e \in \mathfrak{p} \mid e \text{ idempotent}\}). \quad \square$$

Am Ende dieses Kapitels wollen wir noch etwas über Urbilder und Bilder abgeschlossener Teilmengen unter einer von einem Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ induzierten Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ sagen. Das Urbild von $\mathcal{V}(I) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ unter $\tilde{\varphi}$ haben wir in Lemma 4.9 schon genau verstanden:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V}(\varphi(I)) & \hookrightarrow & \operatorname{Spec}(B) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\varphi}} \\ \mathcal{V}(I) & \hookrightarrow & \operatorname{Spec}(A) \end{array}$$

Das Symbol „$\lrcorner$“ in dem obigen kommutativen Diagramm topologischer Räume bedeutet hier, dass $\mathcal{V}(\varphi(I)) = \tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{V}(I))$.

Bemerkung 5.12. Später wird das Symbol „$\lrcorner$“ bedeuten, dass es sich bei einem kommutativen Diagamm um ein sogenanntes *Pullback Diagramm* handelt. Das obige Diagramm ist also ein Beispiel eines solchen Pullback Diagramms in der Kategorie der topologischen Räume.

Für das Bild von $\mathcal{V}(J) \subseteq \operatorname{Spec}(B)$ unter $\tilde{\varphi}$ ist die Situation etwas schwieriger: Zunächst genügt es durch Betrachten der Komposition $\operatorname{Spec}(B/J) \cong \mathcal{V}(J) \subseteq \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ oBdA das Bild von $\operatorname{Spec}(B)$ unter $\tilde{\varphi}$ zu verstehen, also $J = (0)$ zu setzen. Die übliche Faktorisierung von φ induziert

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle i} & \\ & A/\ker(\varphi) & \end{array} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{ccc} \operatorname{Spec}(B) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \operatorname{Spec}(A) \\ & {\scriptstyle\tilde{i}}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\tilde{\pi}} & \\ & \operatorname{Spec}(A/\ker(\varphi)) & \end{array}$$

und $\tilde{\pi}$ ist eine abgeschlossene Einbettung $\mathcal{V}(\ker\varphi) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ nach Lemma 4.10. Es ist nicht im Allgemeinen $\operatorname{Spec}(A/\ker(\varphi))$ das Bild $\tilde{\varphi}(\operatorname{Spec}(B))$, sondern dessen Abschluss, wie das folgende Lemma 5.13 insbesondere zeigt.

Lemma 5.13. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ die induzierte Abbildung. Dann gilt für ein Ideal $J \subseteq B$*

$$\overline{\tilde{\varphi}(\mathcal{V}(J))} = \mathcal{V}(\varphi^{-1}(J)).$$

Beweis. Mit Satz 5.2 gilt

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\varphi}(\mathcal{V}(J))} &= \mathcal{V}\mathcal{I}(\tilde{\varphi}(\mathcal{V}(J))) \\ &= \mathcal{V}\big(\textstyle\bigcap_{\mathfrak{p}\in\tilde{\varphi}(\mathcal{V}(J))} \mathfrak{p}\ \big) \\ &\overset{(*)}{=} \mathcal{V}\big(\textstyle\bigcap_{\mathfrak{q}\in\mathcal{V}(J)} \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\ \big) \\ &= \mathcal{V}\big(\ \varphi^{-1}(\textstyle\bigcap_{\mathfrak{q}\in\mathcal{V}(J)} \mathfrak{q})\ \big) \\ &= \mathcal{V}\big(\ \varphi^{-1}(\mathcal{I}\mathcal{V}(J))\ \big) \\ &= \mathcal{V}(\varphi^{-1}(\sqrt{J})) \\ &= \mathcal{V}(\sqrt{\varphi^{-1}(J)}) \\ &= \mathcal{V}(\varphi^{-1}(J)). \end{aligned}$$

Die Gleichung $(*)$ bedarf vielleicht einer Erklärung: Schreibt man die Indizes beider Schnitte aus, so ist die behauptete Gleichheit $\mathcal{V}$ angewendet auf die Gleichung

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{p}=\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ \text{für } \mathfrak{q}\in\mathcal{V}(J)}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{q}\subseteq B \text{ prim} \\ J\subseteq\mathfrak{q}}} \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

welche aus der Idealkorrespondenz für Quotienten A.6 folgt. □

Korollar 5.14. *Sei $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann gilt für die induzierte Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$:*

$$\tilde{\varphi} \text{ dominant} \quad \Longleftrightarrow \quad \ker(\varphi) \subseteq \operatorname{Nil}(A)$$

Beweis. Wenden wir das vorherige Lemma 5.13 auf $J := (0)$ an, so ergibt sich

$$\overline{\tilde{\varphi}(\mathrm{Spec}(B))} = \mathcal{V}(\ker(\varphi))$$

und es ist $\tilde{\varphi}$ dominant genau dann, wenn die linke Seite gleich $\mathrm{Spec}(A)$ ist, also genau dann, wenn $\mathrm{Spec}(A) \subseteq \mathcal{V}(\ker(\varphi))$. Dieses ist nach Satz 5.2 genau dann der Fall, wenn, wenn

$$\mathrm{Nil}(A) = \mathcal{I}(\mathrm{Spec}(A)) \supseteq \mathcal{I}\mathcal{V}(\ker(\varphi)) = \sqrt{\ker(\varphi)}$$

und dieses ist genau dann der Fall, wenn $\ker(\varphi) \subseteq \mathrm{Nil}(A)$. □

Lemma 5.15. *Für einen ganzen und injektiven Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \hookrightarrow B$ ist die induzierte Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(B) \twoheadrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ surjektiv und abgeschlossen.*

Beweis. Die Surjektivität ist eine andere Formulierung vom Lemma A.27 (Lying over). Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, sei $\mathcal{V}(J) \subseteq \mathrm{Spec}(B)$ eine abgeschlossene Menge. Wir wollen die Gleichheit $\tilde{\varphi}(\mathcal{V}(J)) = \mathcal{V}(\varphi^{-1}(J))$ zeigen. Mit dem obigen Lemma 5.13 gilt immer $\tilde{\varphi}(\mathcal{V}(J)) \subseteq \overline{\tilde{\varphi}(\mathcal{V}(J))} \subseteq \mathcal{V}(\varphi^{-1}(J))$. Für die andere Inklusion betrachten wir die induzierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} A & \xhookrightarrow{\varphi} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow \\ A/\varphi^{-1}(J) & \xhookrightarrow{\bar{\varphi}} & B/J. \end{array}$$

Eine Ganzheitsgleichung für $b \in B$ über A liefert nach Anwenden von π auf die Koeffizienten eine Ganzheitsgleichung für $[b] \in B/J$ über $A/\varphi^{-1}(J)$. Daher ist die induzierte Abbildung $\bar{\varphi}$ auch ganz. Ist nun $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(\varphi^{-1}(J))$, also $\varphi^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}$, so folgt mit Lemma A.27 (Lying over) für die induzierte Abbildung und die Idealkorrespondenz für Quotienten A.6, dass es ein $\mathfrak{q} \in B$ gibt mit $J \subseteq \mathfrak{p}$ und $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Dieses zeigt $\mathfrak{p} \in \tilde{\varphi}(\mathcal{V}(J))$ und damit die gewünschte Inklusion. □

Lemma 5.16. *Ist $\varphi\colon A \to B$ ein flacher Ringhomomorphismus, so gilt für die induzierte Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$:*

$$\varphi \text{ treuflach} \iff \tilde{\varphi} \text{ surjektiv}$$

Beweis. Ist φ treuflach, so gilt für alle A-Moduln M, dass $M \otimes_A B \cong 0 \Rightarrow M \cong 0$. Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ein Primideal. Da $k(\mathfrak{p}) \neq 0$ ist der Ring $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ nichttrivial und hat nach Satz A.7 ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Durch die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & k(\mathfrak{p}) \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ B & \xrightarrow{\beta} & k(\mathfrak{p}) \otimes_A B \end{array}$$

ist $\alpha^{-1}\gamma^{-1}(\mathfrak{m}) = \alpha^{-1}((0)) = \mathfrak{p}$ und $\beta^{-1}(\mathfrak{m}) \subseteq B$ das gesuchte Primideal mit $\varphi^{-1}\beta^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{p}$.

Für die andere Richtung sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ ein Primideal. Da φ surjektiv ist, gibt es ein $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Anwenden von φ liefert $\varphi(\mathfrak{p}) = \varphi(\varphi^{-1}(\mathfrak{q})) \subseteq \mathfrak{q}$ und daher $(\varphi(\mathfrak{p})) \neq B$. Mit anderen Worten gilt als A-Moduln, dass $B/(\varphi(\mathfrak{p})) = B/\mathfrak{p}B \cong A/\mathfrak{p} \otimes_A B \neq 0$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in A$. Sei nun $M \neq 0$ ein beliebiger A-Modul. Wir müssen zeigen, dass gilt $M \otimes_A B \neq 0$, denn dann ist B ein treuflacher A-Modul. Für ein beliebiges Element $x \in M$ mit $x \neq 0$ erzeugt die Multiplikation mit A einen Untermodul $A/I \hookrightarrow M$ für ein Ideal $I \neq A$. Die Flachheit von B liefert dann eine Injektion $A/I \otimes_A B \hookrightarrow M \otimes_A B$. Nach Satz A.7 gibt es ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A mit $I \subseteq \mathfrak{p}$, also eine Surjektion $A/I \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p}$ und mit der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts eine Surjektion $A/I \otimes_A B \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p} \otimes_A B$. Also folgt aus $A/\mathfrak{p} \otimes_A B \neq 0$, dass $A/I \otimes_A B \neq 0$ und schließlich $M \otimes_A B \neq 0$. □

6. Die klassische Zariski-Topologie und der Nullstellensatz

In diesem Kapitel werden wir die Ergebnisse der letzten beiden Kapitel in speziellen Fällen untersuchen. Zunächst werden wir die Ideale-Teilmengen Korrespondenz 5.2 für Algebren von endlichem Typ über einem Körper K mit maximalen Idealen statt Primidealen formulieren. Anschließend definieren wir klassische Zariski-Topologien auf der Menge K^n als Spezialfälle der Zariski-Topologie auf $\mathrm{Spec}(R[x_1, \ldots, x_n])$. Für den Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers können wir dann den wichtigen Hilbertschen Nullstellensatz und sogar eine gewisse Äquivalenz von Kategorien beweisen.

Bemerkung 6.1. Sei A ein Ring. Es ist $\mathrm{mSpec}(A) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ nicht unbedingt ein offener oder abgeschlossener Unterraum: Wäre es ein offener Unterraum, so wäre das Komplement $\mathrm{Spec}(A) \setminus \mathrm{mSpec}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$. Es enthält aber jede nichtleere abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$ einen abgeschlossenen Punkt nach Lemma 4.7. Dies ist ein Widerspruch, falls $\mathrm{Spec}(A) \neq \mathrm{mSpec}(A)$. Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, so ist $\mathrm{mSpec}(A) = \{\mathfrak{m}\}$ und daher ein abgeschlossener Unterraum von $\mathrm{Spec}(A)$. Es ist aber beispielsweise $\mathrm{mSpec}(\mathbb{Z})$ nicht abgeschlossen in $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, denn das Komplement $\{(0)\}$ ist nicht offen (siehe Beispiel 4.11).

Definition 6.2. Seien A ein Ring und $I \subseteq A$ eine Teilenge. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\max}(I) &:= \mathcal{V}(I) \cap \mathrm{mSpec}(A) \\ &= \{\mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{m}\} \\ &= \{\mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(A) \mid \forall f \in I : f(\mathfrak{m}) = 0\} \end{aligned}$$

Definition 6.3. Ein *Jacobson Ring* ist ein Ring A, in in dem für jedes Ideal $I \subseteq A$ die Gleichheit $\mathrm{Nil}(A/I) = \mathrm{Jac}(A/I)$ gilt, also

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathcal{V}_{\max}(I)} \mathfrak{m}.$$

Satz 6.4. *Sei k ein Körper. Eine k-Algebra A von endlichem Typ ist ein Jacobson Ring.*

Beweis. Wir können $I = (0)$ annehmen, da die k-Algebra A/I wieder von endlichem Typ ist. Es ist klar, dass $\mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathrm{Jac}(A)$.

Umgekehrt sei $f \in \mathrm{Jac}(A)$ und $f \notin \mathrm{Nil}(A)$. Weil f nicht nilpotent ist, ist $A[\frac{1}{f}] \neq 0$ und enthält also ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Es ist aber $A[\frac{1}{f}] \cong A[x]/(xf-1)$ von endlichem Typ über k und somit nach Korollar 3.18 auch das Urbild von $\mathfrak{m}$ unter der Lokalisierungsabbildung ein maximales Ideal in A. Nach der Idealkorrespondenz für Lokalisierungen A.14 ist aber f nicht darin enthalten, was ein Widerspruch zu $f \in \mathrm{Jac}(A)$ ist. □

Satz 6.5 (Ideale-Teilmengen Korrespondenz für Jacobson Ringe). *Es sei der Ring A ein Jacobson Ring. Die inklusionsumkehrende Bijektion aus Satz 5.2 passt in ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \textit{Radikalideale von } A \right\} & \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}_{\max}}{\rightleftarrows}} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Abgeschlossene Teilmengen} \\ \textit{von } \mathrm{mSpec}(A) \end{array} \right\} \\ \| & & \uparrow{\scriptstyle M \mapsto M \cap \mathrm{mSpec}(A)} \\ \left\{ \textit{Radikalideale von } A \right\} & \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}}{\rightleftarrows}} & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Abgeschlossene Teilmengen} \\ \textit{von } \mathrm{Spec}(A) \end{array} \right\} \end{array}$$

deren horizontale Abbildungen jeweils zueinander inverse Bijektionen sind und wobei die Teilmenge $\mathrm{mSpec}(A) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ die Unterraumtopologie trägt und die obere horizontale Einschränkung von $\mathcal{I}$ mit dem gleichen Symbol bezeichnet wird. Es gilt außerdem

(1) $\mathcal{I}\mathcal{V}_{\max}(I) = \sqrt{(I)}$ *für eine Teilmenge $I \subseteq A$,*
(2) $\mathcal{V}_{\max}\mathcal{I}(M) = \overline{M}$ *für eine Teilmenge $M \subseteq \mathrm{mSpec}(A)$.*

Beweis. Es folgt die Kommutativität, sowie (1) direkt aus der Definition eines Jacobson Rings und Satz 5.2. Die Identität $\overline{M}^{X'} = \overline{M}^X \cap X'$ aus Bemerkung 4.2 für einen Unterraum $X' \subseteq X$ liefert (2). □

Nun möchten wir für einen Körper K die „klassische Zariski Topologie" auf K^n definieren. Tatsächlich werden wir für jede Algebra $R \to K$ eine Zariski Topologie auf K^n definieren.

Sei also R ein Ring $I \subseteq R[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal und $R \to K$ eine Algebra, wobei K ein Körper ist. Wir erinnern uns an das im dritten Kapitel betrachtete kommutative Diagramm

$$\begin{array}{lccccc} \alpha\colon & K^n & \xrightarrow[\bar{\Psi}]{\cong} & \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x_1,\ldots,x_n],K) & \xrightarrow[\ker]{} & \mathrm{Spec}(R[x_1,\ldots,x_n]) \\ & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi^*} & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} \\ & \mathcal{V}_K(I) & \xrightarrow[\bar{\Psi}_I]{\cong} & \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x_1,\ldots,x_n]/I,K) & \xrightarrow[\ker]{} & \mathrm{Spec}(R[x_1,\ldots,x_n]/I) \end{array} \tag{6.6}$$

wobei $\pi\colon R[x_1, \ldots, x_n] \to R[x_1, \ldots, x_n]/I$ die Projektion bezeichne. In Lemma 4.10 haben wir gesehen, dass $\tilde{\pi}$ ein Homöomorphismus auf den (per Definition abgeschlossenen) Unterraum $\mathcal{V}(I)$ ist. Tatsächlich ist das obige Diagramm sogar ein Pullback Diagramm (siehe Bemerkung 5.12), was genau bedeutet, dass $\mathcal{V}_K(I)$ genau das Urbild von $\mathcal{V}(I)$ unter α ist, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 6.7 (**Klassische Zariski Topologie**). *Ist R ein Ring $I \subseteq R[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal und $R \to K$ eine Algebra, wobei K ein Körper ist, so gilt mit den Bezeichnungen aus dem vorherigen Diagramm* (6.6)*, dass*

$$\mathcal{V}_K(I) = \alpha^{-1}(\mathcal{V}(I)).$$

*Insbesondere sind die Mengen $\mathcal{V}_K(I)$ für ein Ideal $I \subseteq R[x_1, \ldots, x_n]$ genau die abgeschlossenen Mengen (welche R-*abgeschlossen *oder R-*Verschwindungsmengen *genannt werden) einer Topologie auf der Menge K^n, welche die* (klassische) R-Zariski Topologie *genannt wird.*

Beweis. Zunächst ist es klar, dass die zweite Aussage aus der behaupteten Identität mit Lemma 4.4 folgt, da das Urbild α^{-1} mit beliebigen Schnitten und Vereinigungen vertauscht.

Es genügt, die Behauptung für das rechte quadratische Diagramm in (6.6) zu zeigen:

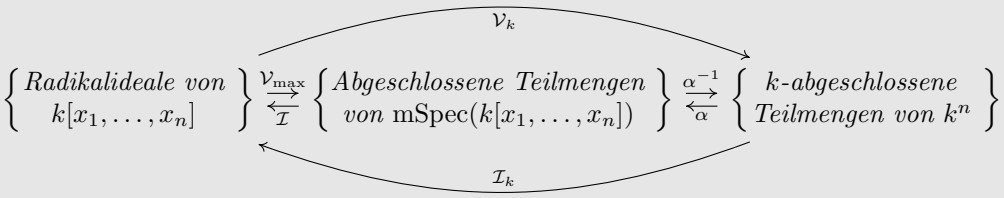
$$\begin{aligned} \ker^{-1}(\mathcal{V}(I)) &= \{\psi \in \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x_1,\ldots,x_n],K) \mid \ker(\psi) \in \mathcal{V}(I)\} \\ &= \{\psi \in \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x_1,\ldots,x_n],K) \mid I \subseteq \ker(\psi)\} \\ &= \{\psi \mid \psi = \psi'\pi \text{ für ein } \psi'\colon R[x_1,\ldots,x_n]/I \to K\} \\ &= \{\psi \mid \psi = \pi^*(\psi') \text{ für ein } \psi'\colon R[x_1,\ldots,x_n]/I \to K\} \\ &= \{\psi \in \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x_1,\ldots,x_n],K) \mid \psi \in \mathrm{im}(\pi^*)\} \\ &\cong \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(R[x_1,\ldots,x_n]/I,K). \end{aligned}$$

□

Setzen wir außerdem $\mathcal{I}_R(M) := \{f \in R[x_1, \ldots, x_n] \mid f(\underline{a}) = 0 \text{ für alle } \underline{a} \in M\}$ für eine Menge $M \subseteq K^n$, so sieht man, dass

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_R(M) &= \{f \mid f(\underline{a}) = 0 \text{ für alle } \underline{a} \in M\} \\ &= \{f \mid f \in \ker(\psi_{\underline{a}}) \text{ für alle } \underline{a} \in M\} \\ &= \{f \mid f \in \alpha(\underline{a}) \text{ für alle } \underline{a} \in M\} \\ &= \{f \mid f \in \mathfrak{p} \text{ für alle } \mathfrak{p} = \alpha(\underline{a}) \text{ mit } \underline{a} \in M\} \\ &= \{f \mid f \in \mathfrak{p} \text{ für alle } \mathfrak{p} \in \alpha(M)\} \\ &= \{f \mid f(\mathfrak{p}) = 0 \text{ für alle } \mathfrak{p} \in \alpha(M)\} \\ &= \mathcal{I}(\alpha(M)). \end{aligned}$$

Satz 6.8 (**Hilbertscher Nullstellensatz**). *Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so sind die inklusionsumkehrenden Abbildungen $\mathcal{V}_k$ und $\mathcal{I}_k$ zueinander inverse Bijektionen und es gibt ein kommutatives Diagramm*



Beweis. Lemma 6.7 und die obige Betrachtung für $\mathcal{I}_R$ zeigen die Kommutativität. Nach Lemma 6.4 ist $k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Jacobson Ring und die Ideale-Teilmengen Korrespondenz für Jacobson Ringe 6.5 zeigt, dass $\mathcal{V}_{\max}$ und $\mathcal{I}$ zueinander inverse Bijektionen sind. Der Rest folgt. □

Zuletzt möchten wir den Hilbertschen Nullstellensatz noch „auf algebraische Abbildungen erweitern“. Genauer bedeutet dieses, dass wir zeigen wollen, dass zwei Kategorien äquivalent sind. Für einen Ring R betrachten wir die Kategorie $\mathbf{FtRed}(R)$. Ihre Objekte sind R-Algebren der Form

$$R[x_1, \ldots, x_n]/I$$

für ein Radikalideal I (genau gesagt gehört das Ideal I und diese Darstellung mit zu den Daten). Die Morphismen in dieser Kategorie sind gegeben durch die üblichen R-Algebrenhomomorphismen.

Bemerkung 6.9. Ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heißt eine *Äquivalenz von Kategorien*, wenn er

(1) *voll* ist, also wenn für alle zwei Objekte $c, c' \in \mathcal{C}$ die durch die Definition eines Funktors gegebene Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c') \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), F(c'))$ surjektiv ist,
(2) *treu* ist, also wenn für alle zwei Objekte $c, c' \in \mathcal{C}$ die durch die Definition eines Funktors gegebene Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, c') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), F(c'))$ injektiv ist,
(3) *essentiell surjektiv* ist, also wenn jedes Objekt aus $\mathcal{D}$ isomorph ist zu einem Objekt der Form $F(c)$ für ein $c \in \mathcal{C}$.

Bemerkung 6.10. Für einen Ring R ist die Kategorie $\mathbf{FtRed}(R)$ eine Unterkategorie der Kategorie der reduzierten R-Algebren von endlichem Typ mit R-Algebrenabbildungen als Morphismen. Der Inklusionsfunktor ist sicherlich voll und treu und jede reduzierte R-Algebra von endlichem Typ ist per Definition isomorph zu einem Objekt aus $\mathbf{FtRed}(R)$. Daher sind die beiden Kategorien äquivalent.

Sei R ein Ring und $R \to K$ eine Algebra. Die Kategorie $\mathbf{EbVer}(R \to K)$ die Kategorie der *eingebetteten R-Verschwindungsmengen* hat als Objekte die R-Verschwindungsmengen

$$\mathcal{V}_K(I) \hookrightarrow K^n$$

und als Morphismen die R-algebraischen Abbildungen $\bar{F}\colon \mathcal{V}_K(I) \to \mathcal{V}_K(J)$ (siehe Definition 3.30), also die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} K^n & \xrightarrow{F} & K^m \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{V}_K(I) & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathcal{V}_K(J). \end{array}$$

Die etwas ungenau auch mit $\mathcal{V}_k$ bezeichnete Zuordnung

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{V}_K\colon & \mathbf{FtRed}(R)^{op} & \to & \mathbf{EbVer}(R \to K) \\ & R[x_1, \ldots, x_n]/I & \mapsto & \mathcal{V}_K(I) \hookrightarrow K^n \\ & \bar{\varphi} & \mapsto & \bar{F} \end{array}$$

(siehe Bemerkung 3.32) definiert einen Funktor, der per Definition surjektiv auf Objekten ist. Nach Beispiel 3.33 ist dieser Funktor nicht im Allgemeinen voll und nach Beispiel 3.34 nicht im Allgemeinen treu.

Satz 6.11. *Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist der Funktor $\mathcal{V}_k$ voll und treu und damit eine Äquivalenz von Kategorien.*

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $k[\underline{x}] := k[x_1, \ldots, x_n]$ und $k[\underline{y}] := k[y_1, \ldots, y_m]$. Seien $I \subseteq k[\underline{x}]$ und $J \subseteq k[\underline{y}]$ zwei Radikalideale. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[\underline{y}]/J, k[\underline{x}]/I) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_k(I) \hookrightarrow k^n, \mathcal{V}_k(J) \hookrightarrow k^m) \\ \bar{\varphi} & \mapsto & \bar{F} \end{array}$$

und zeigen zunächst dessen Surjektivität. Eine algebraische Abbildung $\bar{F}\colon \mathcal{V}_k(I) \to \mathcal{V}_k(J)$ hat (mindestens) eine zugehörige Abbildung auf Polynomringen $\varphi\colon k[\underline{y}] \to k[\underline{x}]$ nach Bemerkung 3.32. Diese zugehörige Abbildung φ bestimmt $\bar{F}$ eindeutig. Wir wollen zeigen, dass es eine Faktorisierung

$$\begin{array}{ccc} k[\underline{y}] & \xrightarrow{\varphi} & k[\underline{x}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[\underline{y}]/J & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & k[\underline{x}]/I \end{array}$$

gibt, denn dann wird $\bar{\varphi}$ auf $\bar{F}$ abgebildet. Es gibt eine Faktorisierung, falls $\varphi(J) \subseteq I$. Für ein $h \in k[\underline{y}]$ und $\underline{a} \in k^n$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \varphi(h)(\underline{a}) & = & \varphi(\sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_m)} b_{\beta_1,\ldots,\beta_m} y_1^{\beta_1} \cdot \cdots \cdot y_m^{\beta_m})(\underline{a}) \\ & = & (\sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_m)} b_{\beta_1,\ldots,\beta_m} f_1^{\beta_1} \cdot \cdots \cdot f_m^{\beta_m})(\underline{a}) \\ & = & \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_m)} b_{\beta_1,\ldots,\beta_m} f_1^{\beta_1}(\underline{a}) \cdot \cdots \cdot f_m^{\beta_m}(\underline{a}) \\ & = & \sum_{(\beta_1,\ldots,\beta_m)} b_{\beta_1,\ldots,\beta_m} f_1(\underline{a})^{\beta_1} \cdot \cdots \cdot f_m(\underline{a})^{\beta_m} \\ & = & h(f_1(\underline{a}), \ldots, f_m(\underline{a})). \end{array}$$

Mit dem Nullstellensatz 6.8 ist $I = \{g \in k[\underline{x}] \mid \forall \underline{a} \in \mathcal{V}_k(I) : g(\underline{a}) = 0\}$ und außerdem $J = \{h \in k[\underline{y}] \mid \forall \underline{b} \in \mathcal{V}_k(J) : h(\underline{b}) = 0\}$. Ist also $h \in J$ müssen wir zeigen, dass $\varphi(h) \in I$, also $\varphi(h)(\underline{a}) = h(\underline{b}) = 0$ mit $\underline{b} := (f_1(\underline{a}), \ldots, f_m(\underline{a}))$ für alle $\underline{a} \in \mathcal{V}_k(I)$. Die algebraische Abbildung $\bar{F}$ bildet $\mathcal{V}_k(I)$ nach $\mathcal{V}_k(J)$ ab. Ist also $\underline{a} \in \mathcal{V}_k(I)$, so ist $\underline{b} \in \mathcal{V}_k(J)$. Da $h \in J$, gilt also $h(\underline{b}) = 0$ wie gewünscht. Damit haben wir $\varphi(J) \subseteq I$ gezeigt.

Für die Injektivität seien

$$\begin{array}{ccc} k[\underline{y}] & \xrightarrow{\varphi} & k[\underline{x}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[\underline{y}]/J & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & k[\underline{x}]/I \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} k[\underline{y}] & \xrightarrow{\varphi'} & k[\underline{x}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ k[\underline{y}]/J & \xrightarrow{\bar{\varphi}'} & k[\underline{x}]/I \end{array}$$

zwei Diagramme, die beide $\bar{F}\colon \mathcal{V}_k(I) \to \mathcal{V}_k(J)$ definieren. Es ist zu zeigen, dass $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}'$. Sei $h \in k[\underline{y}]$. Wir zeigen, dass $\varphi(h) - \varphi'(h) \in I$. Durch den Nullstellensatz 6.8 wissen wir, dass $I = \{g \in k[\underline{x}] \mid \forall \underline{a} \in \mathcal{V}_k(I) : g(\underline{a}) = 0\}$. Sei also $\underline{a} \in \mathcal{V}_k(I)$. Wir wollen zeigen, dass $(\varphi(h) - \varphi'(h))(\underline{a}) = \varphi(h)(\underline{a}) - \varphi'(h)(\underline{a}) = 0$ und es gilt wie oben

$$\begin{array}{rcl} \varphi(h)(\underline{a}) & = & h(f_1(\underline{a}), \ldots, f_m(\underline{a})) \\ & = & h(\bar{F}(\underline{a})) \\ & = & h(f_1'(\underline{a}), \ldots, f_m'(\underline{a})) \\ & = & \varphi'(h)(\underline{a}). \end{array}$$

□

7. Prägarben und Garben

Bemerkung 7.1. Es ist klar, dass wir aus dem topologischen Raum $\mathrm{Spec}(A)$ nicht den Ring A rekonstruieren können: Für jeden Körper k gilt beispielsweise $\mathrm{Spec}(k) = \{*\}$. Diese Menge hat eine eindeutige Topologie. Außerdem „ignoriert“ der topologische Raum $\mathrm{Spec}(A)$ Nilpotente, d.h. es gilt $\mathrm{Spec}(A_{\mathrm{red}}) = \mathrm{Spec}(A)$ für jeden Ring A.

In den folgenden Kapiteln versuchen wir (letztendlich durch die Einführung des Begriffs des „Schemas“) zweierlei zu erreichen:

(1) Der topologische Raum $\mathrm{Spec}(A)$ ermöglicht uns eine gewisse „geometrische Sichtweise“ des Rings A. Der Raum $\mathrm{Spec}(A)$ legt aber nach der vorherigen Bemerkung 7.1 den Ring A nicht fest. Daher möchten wir den topologischen Raum $\mathrm{Spec}(A)$ mit einer Zusatzstruktur ausstatten, die es ermöglicht, den Ring A zu rekonstruieren.

(2) So wie man topologische Räume miteinander „verkleben“ kann, möchten wir auch die Räume $\mathrm{Spec}(A)$ mit der erwähnten Zusatzstruktur miteinander verkleben.

Bemerkung 7.2. Natürlich könnte man das in (1) erwähnte Problem auf triviale Weise lösen, indem man einfach das Paar $(\mathrm{Spec}(A), A)$ betrachtet. Dieses würde aber keine Hilfe für unsere Verklebeforderung (2) sein: Es ist nicht klar, wie man Ringe A miteinander „verklebt“.

Bevor wir eine Lösung für diese beiden Probleme finden, müssen wir einige Grundbegriffe der Garbentheorie diskutieren. Diese abstrakte Theorie hat vielleicht auf den ersten Blick nicht unbedingt etwas mit Algebraischer Geometrie zutun. Sie ist allerdings nicht nur ein technisches Hilfsmittel für knappe Definitionen sondern in der modernen Algebraischen Geometrie, sowie vielen anderen Gebieten der Mathematik, allgegenwärtig.

Definition 7.3. Sei X ein topologischer Raum. Die *Kategorie* $\mathbf{Ouv}(X)$ *der offenen Mengen von* X hat als Objekte die offenen Mengen $U \subseteq X$ von X und es ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ouv}(X)}(U,V) := \begin{cases} U \hookrightarrow V & \text{falls } U \subseteq V \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es bezeichne im Folgenden $\mathcal{S}$ die Kategorie **Set** der Mengen, die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen oder die Kategorie **Ring** der Ringe und X einen topologischen Raum.

Definition 7.4. Eine *Prägarbe* $\mathcal{F}$ auf X (mit Werten in $\mathcal{S}$) ist ein Funktor

$$\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}.$$

Die Elemente $s \in F(U)$ heißen *Schnitte von* $\mathcal{F}$ *auf* U. Für eine Inklusion $U \subseteq V$ in X offener Mengen, nennt man die $\mathcal{S}$-Abbildung $(-)_{|U}\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ die *Einschränkung*.

Ein *Morphismus* $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen zwei solchen Prägarben ist eine natürliche Transformation $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen den Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, also eine Familie

$$\{f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to G(U)\}_{U \in \mathbf{Ouv}(X)}$$

von $\mathcal{S}$-Abbildungen, sodass für jede Inklusion $U \subseteq V$ in X offener Mengen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f(V)} & \mathcal{G}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f(U)} & G(U) \end{array}$$

kommutiert, wobei die vertikalen Abbildungen die jeweiligen Einschränkungen sind. Wir sagen, dass eine Eigenschaft eines Morphismus $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen Prägarben *schnittweise* gegeben ist, wenn diese Eigenschaft dadurch definiert ist, dass alle $\mathcal{S}$-Abbildungen $f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ die gleichgenannte Eigenschaft erfüllen. Die Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{S}$ bilden zusammen mit ihren Morphismen eine Kategorie, die mit $\mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X)$ oder auch nur mit $\mathbf{PSh}(X)$ bezeichnet wird.

Bemerkung 7.5. Eine Prägarbe $\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ besteht also genau aus den Daten:

(1) Für jede offene Menge $U \subseteq X$ ein Objekt $F(U) \in \mathcal{S}$ und

(2) für jede Inklusion $U \subseteq V$ in X offener Mengen eine $\mathcal{S}$-Abbildung

$$\mathrm{res}_U^V \colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

mit den beiden Eigenschaften

- $\mathrm{res}_U^U = \mathrm{id}_{F(U)}$ und
- $\mathrm{res}_U^W = \mathrm{res}_U^V \mathrm{res}_V^W$ für jede Inklusion $U \subseteq V \subseteq W$ in X offener Mengen.

Beispiel 7.6.

(1) Ist $A \in \mathcal{S}$ ein Objekt so ist die zugehörige *konstante Prägarbe* cA auf X definiert durch $cA(U) := A$ für alle $U \in \mathbf{Ouv}(X)$ und $\mathrm{id}_A \colon cA(V) \to cA(U)$ für jede Inklusion $U \subseteq V$ in X offener Mengen.

(2) Ist $V \in \mathbf{Ouv}(X)$, so heißt

$$\begin{array}{rccc} yV \colon & \mathbf{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Set} \\ & U & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ouv}(X)}(U, V) \end{array}$$

die *durch V dargestellte Prägarbe* auf X.

(3) Es ist

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{C}(-, \mathbb{R}) \colon & \mathbf{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Set} \\ & U & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, \mathbb{R}) \end{array}$$

die *Prägarbe der stetigen Fuktionen* auf X. Auf die gleiche Weise bekommt man auch eine Prägarbe $\mathcal{C}(-, \mathbb{R})$ mit Werten in **Ab** oder **Ring**.

Lemma 7.7. *Ein Morphismus $f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er schnittweise ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Ein Morphismus $f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben heißt ein Isomorphismus, wenn es einen Morphismus $g \colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ von Prägarben gibt mit $gf = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ und $fg = \mathrm{id}_G$. Es ist also klar, dass ein Isomorphismus von Prägarben auch schnittweise ein Isomorphismus ist.

Angenommen $f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist schnittweise ein Isomorphismus, es gibt also für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ zu der $\mathcal{S}$-Abbildung $f(U) \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ eine inverse $\mathcal{S}$-Abbildung $g(U) \colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$. Damit g einen Morphismus von Prägarben definiert müssen wir zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{g(V)} & \mathcal{F}(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{g(U)} & F(U) \end{array}$$

kommutiert, wobei die vertikalen Abbildungen jeweils die Einschränkungen sind. Für ein $s \in \mathcal{G}(V)$ gilt aber, da f ein Morphismus von Prägarben ist, die Gleichung

$$g(V)(s)_{|U} = g(U)f(U)(g(V)(s)_{|U}) = g(U)(f(V)g(V)(s)_{|U}) = g(U)(s_{|U}). \qquad \square$$

Die Prägarbe $\mathcal{C}(-, \mathbb{R})$ aus dem vorherigen Beispiel 7.6.(3) ist das motivierende Beispiel für den Begriff einer Garbe. Ist $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung von X, so gilt:

- (*Eindeutigkeit*) Sind $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die jeweils auf U und V übereinstimmen (für die also gilt $f_{|U} = g_{|U}$ und $f_{|V} = g_{|V}$), so stimmen f und g schon auf ganz X überein (es gilt also $f = g$). Mit anderen Worten kann man also Gleichheit von Schnitten „lokal testen“.
- (*Verkleben von lokalen Schnitten*) Sind $f_U \colon U \to \mathbb{R}$ und $f_V \colon V \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf dem Schnitt $U \cap V$ übereinstimmen (für die also gilt $(f_U)_{|U \cap V} = (f_V)_{|U \cap V}$), so gibt es eine stetige Abbildung $f \colon X \to \mathbb{R}$ mit $f_{|U} = f_U$ und $f_{|V} = f_V$.

Es sei daran erinnert, dass eine *offene Überdeckung* eines topologischen Raums U eine über eine Indexmenge $\mathcal{I}$ indizierte Familie $\{U_i \hookrightarrow U\}_{i \in \mathcal{I}}$ von offenen Teilmengen $U_i \subseteq U$ ist mit $\cup_{i \in \mathcal{I}} U_i = U$.

Definition 7.8. Eine Prägarbe $\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ heißt eine *Garbe*, wenn für jede offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow U\}_{i\in\mathcal{I}}$ einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ das Diagramm

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(U_i) \underset{d_1''}{\overset{d_1'}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}} \mathcal{F}(U_{ij})$$

ein *Equalizer-Diagramm* ist, wobei $U_{ij} := U_i \cap U_j$, wobei $d_0(s) := (s_{|U_i})_i$ und wobei $d_1'((s_i)_i) := (s_{i|U_{ij}})_{ij}$ und $d_1''((s_i)_i) := (s_{j|U_{ij}})_{ij}$.

Für unsere Kategorien $\mathcal{S}$ bedeutet dieses genau

(1) d_0 ist injektiv und

(2) das Bild von d_0 ist genau die Menge $\{(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid d_1'((s_i)_i) = d_1''((s_i)_i)\}$.

Die Garben auf X mit Werten in $\mathcal{S}$ bilden eine Unterkategorie

$$\mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \hookleftarrow \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X)\colon i \tag{7.9}$$

der Prägarben wofür manchmal auch nur $\mathbf{Sh}(X)$ geschrieben wird.

Bemerkung 7.10. Ist $\mathcal{S} = \mathbf{Ab}$ so ist eine Prägarbe $\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ also genau dann eine Garbe, wenn für jede offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow U\}_{i\in\mathcal{I}}$ einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ das Diagramm

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d_1 := d_1' - d_1''} \prod_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{I}} \mathcal{F}(U_{ij})$$

von (unterliegenden) abelschen Gruppen exakt ist. Die Injektivität von d_0 entspricht genau der oben erwähnten *Eindeutigkeit*. Es ist in jedem Fall $\mathrm{im}(d_0) \subseteq \ker(d_1)$, denn aus der Definition einer Prägarbe folgt, dass für die Inklusionen $U_{ij} \subseteq U_i \subseteq U$ und $U_{ij} \subseteq U_j \subseteq U$ in X offener Mengen das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\mathrm{res}^U_{U_i}}{\nearrow} & F(U_i) & \overset{\mathrm{res}^{U_i}_{U_{ij}}}{\searrow} & \\ F(U) & & \xrightarrow{\mathrm{res}^U_{U_{ij}}} & & F(U_{ij}) \\ & \underset{\mathrm{res}^U_{U_j}}{\searrow} & F(U_j) & \underset{\mathrm{res}^{U_j}_{U_{ij}}}{\nearrow} & \end{array}$$

kommutiert. Die andere Inklusion $\ker(d_1) \subseteq \mathrm{im}(d_0)$ entspricht genau dem oben erwähnten *Verkleben von lokalen Schnitten*.

Bemerkung 7.11. Betrachtet man Punkt (2) in der Definition 7.8 einer Garbe, so gilt

$$\begin{aligned} & \{(s_i)_i \in \textstyle\prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid d_1'((s_i)_i) = d_1''((s_i)_i)\} \\ = \; & \{(s_i)_i \in \textstyle\prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid \forall (i,j) \in \mathcal{I}\times\mathcal{I} : s_{i|U_{ij}} = s_{j|U_{ij}}\} \\ = \; & \{(s_i)_i \in \textstyle\prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid \forall \{i,j\} \subseteq \mathcal{I} : s_{i|U_{ij}} = s_{j|U_{ij}}\} \end{aligned}$$

da die Bedingung $s_{i|U_{ii}} = s_{i|U_{ii}}$ stets erfüllt ist und außerdem $s_{i|U_{ij}} = s_{j|U_{ij}}$ gilt genau dann, wenn $s_{i|U_{ij}} = s_{j|U_{ij}}$ gilt. Also können wir in der Garbenbedingung aus der rechten Seite gleiche Indizes (i,i) und Transpositionen weglassen und schreiben für das obige Equalizer Diagramm nur

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_{i} \mathcal{F}(U_i) \underset{d_1''}{\overset{d_1'}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{ij}).$$

Man kann allerdings auch allgemeinere Prägarben untersuchen und anstelle von Funktoren $\mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$, Funktoren $\mathcal{T}^{op} \to \mathcal{S}$ von einem sogenannten Situs $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{S}$ betrachten. Hier verallgemeinert man $U_i \cap U_j$ zu $U_i \times_X U_j$ und es kann passieren, dass die beiden Projektionen $U_i \times_X U_i \rightrightarrows U_i$ verschieden sind. In diesem Fall ist die Schreibweise $s_{i|U_{ii}}$ doppeldeutig und wir müssen in der zugehörigen Garbenbedingung sehr wohl die Indizes (i,i) berücksichtigen.

Beispiel 7.12.

(0) Ist $\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ eine Garbe, so gilt immer $\mathcal{F}(\emptyset) \cong *$, wobei $*$ das terminale Objekt der Kategorie $\mathcal{S}$ bezeichne (also die einpunktige Menge im Fall $\mathcal{S} = \mathbf{Set}$, die Nullgruppe im Fall $\mathcal{S} = \mathbf{Ab}$ und den Nullring im Fall $\mathcal{S} = \mathbf{Ring}$). Um dieses zu sehen, schauen wir uns die Garbenbedingung für $U = \emptyset$ an. Es ist die leere Familie $\{\}$ mit Indexmenge $\mathcal{I} = \emptyset$ eine offene Überdeckung der leeren Menge U (Diese Überdeckung ist nicht zu verwechseln mit der offenen Überdeckung $\{\emptyset \hookrightarrow \emptyset\}$ der leeren Menge). Außerdem ist das Produkt $\prod_\emptyset$ über eine leere Menge das terminale Objekt $*$ von $\mathcal{S}$. Mit der Garbenbedingung sieht man nun $\mathcal{F}(\emptyset) \cong *$.

(1) Ist $A \in \mathcal{S}$ ein Objekt so ist die zugehörige konstante Prägarbe cA nicht unbedingt eine Garbe. Zum einen erfüllt diese (außer im Fall $A = *$) nicht $cA(\emptyset) \cong *$, was nach dem vorherigen Beispiel für eine Garbe aber erfüllt sein muss. Ist zum anderen $X = U \sqcup V$ eine disjunkte Zerlegung von X in offene Teilmengen, so liefert die Garbenbedingung für die offene Überdeckung $\{U \hookrightarrow X, V \hookrightarrow X\}$ und für eine Prägarbe $\mathcal{F}$
$$\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V).$$
Dies ist insbesondere nicht erfüllt für die konstante Prägarbe $cA \neq *$.

(2) Ist $V \in \mathbf{Ouv}(X)$, so ist die durch V dargestellte Prägarbe yV auf X eine Garbe.

(3) Es wuerde schon begründet, dass die Prägarbe $\mathcal{C}(-, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf X eine Garbe ist.

Eine Garbe ermöglicht einem also, kompatible lokale Informationen (eindeutig) zu einer globalen Information zusammenzukleben.

Ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe und sind $x \in U \subseteq V$ zwei ineinander enthaltene offene Umgebungen eines Punktes $x \in X$, so bekommen wir also eine Abbildung $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$. Wir würden gerne $\mathcal{F}$ „maximal lokal um den Punkt x“ auswerten, also soetwas wie das $\mathcal{S}$-Objekt $\mathcal{F}(\{x\})$ betrachten. Dies ist natürlich nicht ohne Weiteres möglich, da $\{x\}$ nicht unbedingt eine offene Teilmenge von X sein muss. Auf die gleiche Weise ist es nicht möglich, alle offenen Teilmengen, die x enthalten zu schneiden und dann in $\mathcal{F}$ einzusetzen, denn dieser Schnitt ist ebenfalls nicht unbedingt eine offene Teilmenge von X. Dieses Problem motiviert die folgende Definition.

Definition 7.13. Sei $x \in X$. Die Zuordnung
$$\begin{array}{rccc} (-)_x\colon & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathcal{S} \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \operatorname{colim}\limits_{x \in U \in \mathbf{Ouv}(X)^{op}} \mathcal{F}(U) \\ & f & \mapsto & f_x \end{array}$$
ist ein Funktor und heißt der *Halm von $\mathcal{F}$ an x*. Hier ist
$$\operatorname*{colim}_{x \in U \in \mathbf{Ouv}(X)^{op}} \mathcal{F}(U) := \bigsqcup_{\substack{U \in \mathbf{Ouv}(X) \\ x \in U}} \mathcal{F}(U)/_\sim$$
wobei $(s, U) \sim (t, V)$ genau dann, wenn eine in X offene Menge $W \subseteq U \cap V$ um x existiert mit $s_{|W} = t_{|W}$. Die Äquivalenzklasse $[s, U] := [(s, U)] \in \mathcal{F}_x$ heißt der *Keim von s an x* und wird manchmal auch mit s_x bezeichnet. Es ist für den Fall $\mathcal{S} = \mathbf{Ab}$ oder $\mathcal{S} = \mathbf{Ring}$ auch $\mathcal{F}_x$ ein Element von $\mathcal{S}$ durch
$$[s, U][t, V] := [s_{|U \cap V} t_{|U \cap V}, U \cap V].$$
Für einen Morphismus $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben ist die Definition der $\mathcal{S}$-Abbildung $f_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ gegeben durch $s_x = [s, U] \mapsto f_x(s_x) := (f(U)(s))_x = [f(U)(s), U]$. (Dieses ist genau die Abbildung, die von f auf dem Kolimes induziert wird.)

Lemma 7.14. *Sei $\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ eine Prägarbe. Die Zuordnung $U \mapsto \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ mit den Projektionen als Einschränkungen definiert eine Garbe $\mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ und die Abbildung*
$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

definiert durch $s \mapsto (s_x)_{x\in U}$ ist ein Morphismus von Prägarben und natürlich in $\mathcal{F}$. Außerdem ist diese Abbildung injektiv, falls $\mathcal{F}$ eine Garbe ist. (Ein Schnitt einer Garbe ist also schon festgelegt durch seine Keime.)

Beweis. Es ist klar, dass $\prod_{x\in(-)} \mathcal{F}_x$ eine Prägarbe definiert. Tatsächlich ist $\prod_{x\in(-)} \mathcal{F}_x$ auch eine Garbe: Sei dafür $U \subseteq X$ offen und $\{U_i \hookrightarrow U\}$ eine offene Überdeckung. Ist für alle i ein Element $(s_x^i)_{x\in U_i} \in \prod_{x\in U_i} \mathcal{F}_x$ gegeben, sodass

$$(s_x^i)_{x\in U_i}|_{U_{ij}} = (s_x^i)_{x\in U_{ij}} = (s_x^j)_{x\in U_{ij}} = (s_x^j)_{x\in U_i}|_{U_{ij}},$$

also $s_x^i = s_x^j$ gilt auf $U_{ij} = U_i \cap U_j$, so können wir ein eindeutiges $(s_x)_{x\in U}$ durch $s_x := s_x^i$ für $x \in U_i$ definieren. Außerdem ist sicherlich das Element $(s_x)_{x\in U}$ durch alle Einschränkungen $(s_x)_{x\in U}|_{U_i} = (s_x)_{x\in U_i}$ eindeutig festgelegt, da jedes x in (mindestens) einem U_i liegt. Also ist $\prod_{x\in(-)} \mathcal{F}_x$ eine Garbe.

Dafür, dass die angegebene Abbildung eine Abbildung von Prägarben ist, sei $U \subseteq V$ eine Inklusion von in X offenen Teilmengen. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \prod_{x\in V} \mathcal{F}_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \end{array}$$

wobei die linke vertikale Abbildung die Einschränkung ist und die rechte vertikale gegeben durch die Projektion.

Für die Natürlichkeit der beschriebenen Abbildung in $\mathcal{F}$ sei $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ eine Abbildung zwischen Prägarben auf X. Dann ist für jedes offene $U \subseteq X$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x & \xrightarrow{\prod_x f_x} & \prod_{x\in U} \mathcal{G}_x \end{array}$$

kommutativ, da Halme Funktoren sind.

Für den Beweis der Injektivität wird nur die Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{F}$ benutzt. Seien $s, t \in \mathcal{F}(U)$ zwei Schnitte, die beide auf $(s_x)_{x\in U} = (t_x)_{x\in U}$ abgebildet werden. Für jedes $x \in U$ gilt also $s_x = [s, U] = [t, U] = t_x$ und nach Definition des Halms gibt es ein offenes $W_x \subseteq U \cap V$ um x mit $s_{|W_x} = t_{|W_x}$. Es ist nun aber $\{W_x \hookrightarrow U\}_{x\in U}$ eine offene Überdeckung von U und die Behauptung folgt aus der Eindeutigkeitseigenschaft von $\mathcal{F}$. □

Lemma 7.15. *Zwei Prägarbenabbildungen $f, f'\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ auf X in eine Garbe $\mathcal{G}$ sind gleich genau dann, wenn sie halmweise gleich sind, also genau dann, wenn für alle $x \in X$ die Abbildungen $f_x, f'_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ übereinstimmen.*

Beweis. Es ist klar, dass zwei gleiche Abbildungen $f = f'$ auch halmweise gleich sind.

Nach dem vorherigen Lemma 7.14 ist für jedes offene $U \subseteq X$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \overset{f(U)}{\underset{f'(U)}{\rightrightarrows}} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x & \longrightarrow & \prod_{x\in U} \mathcal{G}_x \end{array}$$

kommutativ und aus der Injektivität der rechten vertikalen Abbildung folgt $f(U) = f'(U)$, da die untere horizontale Abbildung durch $\prod_x f_x = \prod_x f'_x$ gegeben ist. Also gilt $f = f'$. □

Lemma 7.16. *Eine Abbildung $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen Garben auf X ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie halmweise ein Isomorphismus ist, also genau dann, wenn für alle $x \in X$ die Abbildung $f_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Es ist klar, dass ein Isomorphismus f zwischen Garben Isomorphismen f_x auf allen Halmen induziert, da diese jeweils Funktoren sind.

Für die andere Richtung sei $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ eine Garbenabbildung die Isomorphismen f_x auf allen Halmen induziert. Es genügt nach Lemma 7.7 und da Isomorphismen in unseren Kategorien $\mathcal{S}$ genau die bijektiven Abbildungen sind, zu zeigen, dass $f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ bijektiv ist für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$.

Die Injektivität von $f(U)$ folgt aus dem nach Lemma 7.14 kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x & \xrightarrow{\cong} & \prod_{x\in U} \mathcal{G}_x. \end{array}$$

Für die Surjektivität sei $t \in \mathcal{G}(U)$. Für $x \in U$ ist f_x nach Voraussetzung surjektiv und es gibt also ein $[s, V] \in \mathcal{F}_x$ mit $f_x([s, V]) = [f(V)(s), V] = t_x \in \mathcal{G}_x$. Dies bedeutet, dass es eine offene Umgebung $W_x \subseteq V \cap U$ von x gibt mit $t_{|W_x} = f(V)(s)_{|W_x} = f(W_x)(s_{|W_x})$. Wir schreiben $s_{W_x} := s_{|W_x} \in \mathcal{F}(W_x)$, damit nicht der Anschein erweckt wird, dass $s_{|W_x}$ eine Einschränkung eines Elements aus $\mathcal{F}(U)$ ist. Es ist $\{W_x \hookrightarrow U\}_{x\in U}$ eine offene Überdeckung von U und wir möchten die Garbeneigenschaft von $\mathcal{F}$ benutzen, um die s_{W_x} zu einem Element $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $f(U)(s) = t$ zu verkleben. Es gilt für $x, y \in U$, dass

$$\begin{aligned} f(W_x \cap W_y)((s_{W_x})_{|W_x\cap W_y}) &= f(W_x)(s_{W_x})_{|W_x\cap W_y} \\ &= (t_{|W_x})_{|W_x\cap W_y} \\ &= t_{|W_x\cap W_y} \\ &= (t_{|W_y})_{|W_x\cap W_y} \\ &= f(W_y)(s_{W_y})_{|W_x\cap W_y} \\ &= f(W_x \cap W_y)((s_{W_y})_{|W_x\cap W_y}) \end{aligned}$$

und aus der eben bewiesenen Injektivität folgt $(s_{W_x})_{|W_x\cap W_y} = (s_{W_y})_{|W_x\cap W_y}$. Also gibt es mit der Garbenbedingung für $\mathcal{F}$ ein $s \in \mathcal{F}(U)$, das zu den obigen s_{W_x} einschränkt. Ausserdem impliziert die Injektivität von d_0 mit $f(W_x)(s_{W_x}) = t_{|W_x}$, dass $f(U)(s) = t$. □

Bemerkung 7.17. Der Beweis des vorherigen Lemmas 7.16 zeigt auch, dass f schnittweise injektiv ist genau dann, wenn es halmweise (also auf allen Halmen) injektiv ist. Das einzige dafür zusätzlich erforderliche Argument ist, dass eine schnittweise injektive Abbildung von Prägarben auch halmweise injektiv ist. Die Analogie von Lemma 7.16 ist aber falsch für die Surjektivität. Ein schnittweise surjektives f ist auch halmweise surjektiv, aber die Umkehrung ist nicht unbedingt richtig.

Wir wollen nun eine Prägarbe „bestmöglich“ zu einer Garbe machen. Dafür möchten wir identifizieren, wie das Bild der Injektion

$$\mathcal{F}(U) \hookrightarrow \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$$

aus Lemma 7.14 für eine Garbe genau aussieht.

Lemma 7.18. *Sei $\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ eine Prägarbe und betrachte für ein offenes $U \subseteq X$ das $\mathcal{S}$-Objekt*

$$a\mathcal{F}(U) := \{\ (s_x)_{x\in U} \in \textstyle\prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \ \mid\ (s_x)_{x\in U} \text{ ist ausdehnbar } \} \ \hookrightarrow\ \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$$

wobei eine Familie $(s_x)_{x\in U}$ von Keimen ausdehnbar *heißt, wenn gilt:*

> *Für alle $x \in U$ existiert eine offene Umgebung $W \subseteq U$ und ein Schnitt $c \in \mathcal{F}(W)$, sodass für alle $y \in W$ gilt $c_y = s_y$.*

Dann ist $a\mathcal{F}$ mit den Projektionen als Einschränkungen eine Garbe.

Beweis. Es ist $a\mathcal{F}(U)$ mit der halmweisen Addition bzw. Multiplikation ein $\mathcal{S}$-Objekt. Es ist leicht zu sehen, dass $a\mathcal{F}$ eine Prägarbe $a\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ definiert (siehe Lemma 7.14).

Für die Garbenbedingung sei $U \subseteq X$ offen und $\{U_i \hookrightarrow U\}$ eine offene Überdeckung.

Für die Eindeutigkeitseigenschaft betrachten wir die Komposition,

$$a\mathcal{F}(U) \to \prod_i a\mathcal{F}(U_i) \hookrightarrow \prod_i \prod_{x\in U_i} \mathcal{F}_x = \prod_{x\in \sqcup_i U_i} \mathcal{F}_x \twoheadrightarrow \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x,$$

(wobei wir für die letzte Abbildung für jedes $x \in U$ ein i wählen mit $x \in U_i$ und dann die Projektion $\mathrm{pr}_{U_i} \colon \prod_{x \in \sqcup_i U_i} \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ betrachten) die per Definition injektiv ist. Also ist auch insbesondere die erste Abbildung injektiv.

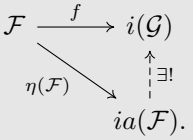
Seien nun für jedes i ausdehnbare Familien von Keimen $(s_{i,x})_{x \in U_i}$ gegeben, die kompatibel mit den Einschränkungen sind, also für die gilt $(s_{i,x})_{x \in U_i \cap U_j} = (s_{j,x})_{x \in U_i \cap U_j}$ für alle Indizes i und j. Genau wie im Beweis von Lemma 7.14 definieren wir $(s_x)_{x \in U}$ durch $s_x := s_{i,x}$ falls $x \in U_i$, was durch die Kompatibilität wohldefiniert ist. Es bleibt nur zu zeigen, dass die Familie von Keimen $(s_x)_{x \in U}$ auch wieder ausdehnbar ist. Sei dafür $x \in U$. Dann liegt x in einem U_i und da $(s_{i,x})_{x \in U_i}$ ausdehnbar ist, gibt eine offene Umgebung $W_x \subseteq U_i \subseteq U$ und ein $c \in \mathcal{F}(W_x)$, sodass für alle $y \in W_x$ gilt $c_y = s_{i,y} = s_y$. Damit ist $a\mathcal{F}$ eine Garbe. □

Bemerkung 7.19. Sei $\mathcal{F} \colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ eine Prägarbe und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Nach Definition des kartesischen Produkts gilt

$$\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x := \{\ f \colon U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x \ \mid\ \text{Für alle } x \in U \text{ gilt } f(x) \in \mathcal{F}_x\ \}$$

und für $U \subseteq V$ entspricht der Projektion $\prod_{x \in V} \mathcal{F}_x \twoheadrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ genau die Abbildung, die ein Element $V \to \sqcup_{x \in V} \mathcal{F}_x$ auf die Präkomposition $U \hookrightarrow V \to \sqcup_{x \in V} \mathcal{F}_x$, welche wiederum über über die Inklusion $\sqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x \hookrightarrow \sqcup_{x \in V} \mathcal{F}_x$ faktorisiert, schickt. Man findet manchmal in der Literatur die Beschreibnung der Garbifizierung durch diese alternative Beschreibung.

Satz 7.20. *Es ist die Zuordnung $a \colon \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \to \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X)$ aus dem vorherigen Lemma 7.18 ein Funktor und heißt* Garbifizierung. *Ist $f \colon \mathcal{F} \to i(\mathcal{G})$ eine Prägarbenabbildung von einer Prägarbe $\mathcal{F}$ in eine Garbe $\mathcal{G}$, so faktorisiert diese eindeutig über die Garbifizierung, es gibt also eine natürliche Transformation $\eta \colon \mathrm{id}_{\mathbf{PSh}} \to ia$ und ein kommutatives Diagramm*



Es ist außerdem $\eta(\mathcal{F})$ ein Isomorphismus auf allen Halmen.

Beweis. Wir haben uns schon in Lemma 7.14 davon überzeugt, dass die Zurordnung

$$\begin{array}{rccc} \eta(F)(U) \colon & \mathcal{F}(U) & \to & \prod\limits_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ & s & \mapsto & (s_x)_{x \in U} \end{array}$$

natürlich in $U \in \mathbf{Ouv}(X)$ und $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X)$ ist. Wir zeigen nun, dass sie auch über $ia\mathcal{F}(U)$ faktorisiert und erhalten somit eine natürliche Transformation $\eta \colon \mathrm{id}_{\mathbf{PSh}} \to ia$. Für die Existenz dieser Faktorisierung müssen wir zeigen, dass für einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ die Familie $(s_x)_{x \in U}$ von Keimen ausdehnbar ist, was aber (mit $W := U$) unmittelbar klar ist.

Wir zeigen nun, dass für alle Prägarben $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X)$ und $x \in X$ die $\mathcal{S}$-Abbildung $\eta(\mathcal{F})_x \colon \mathcal{F}_x \to (ia\mathcal{F})_x$ ein Isomorphismus ist.

Für die Injektivität können wir die Komposition

$$\mathcal{F} \to ia\mathcal{F} \to i \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

betrachten. Der Halm der Prägarbe $i \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ an x muss nicht $\mathcal{F}_x$ sein, aber es gibt eine Abbildung $(i \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x)_x \to \mathcal{F}_x$ induziert durch die Projektion, womit die Komposition

$$\mathcal{F}_x \to (ia\mathcal{F})_x \to (i \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x)_x \to \mathcal{F}_x$$

die Identität ist und damit die erste Abbildung injektiv.

Für die Surjektivität sei $[(s_x)_{x \in U}, U] \in (ia\mathcal{F})_x = \eta(\mathcal{F})_x$. Es gibt also eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von x und ein Schnitt $c \in \mathcal{F}(W)$, sodass für alle $y \in W$ gilt $c_y = s_y$. Wir haben also

$$[(s_x)_{x \in U}, U] = [(s_y)_{y \in W}, W] = [(c_y)_{y \in W}, W] = [\eta(\mathcal{F})(W)(c), W] =: \eta(\mathcal{F})_x(c_x)$$

und damit ist $\eta(\mathcal{F})_x$ surjektiv.

Ist nun $f\colon \mathcal{F} \to i(\mathcal{G})$ eine Prägarbenabbildung, so liefert die Anwendung von η ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & i(\mathcal{G}) \\ {\scriptstyle \eta(\mathcal{F})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta(i(\mathcal{G}))} \\ ia\mathcal{F} & \xrightarrow{ia(f)} & iai(\mathcal{G}) \end{array}$$

dessen vertikale Morphismen nach dem bereits Gezeigtem Isomorphismen auf allen Halmen sind. Daher folgt mit Lemma Lemma 7.16, dass der rechte vertikale Morphismus ein Isomorphismus ist und die Existenz der gewünschten Faktorisierung ist gezeigt.

Für deren Eindeutigkeit, seien h und h' Morphismen, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & i(\mathcal{G}) \\ & {\scriptstyle \eta(\mathcal{F})}\searrow & \uparrow{\scriptstyle h}\ \uparrow{\scriptstyle h'} \\ & & ia(\mathcal{F}). \end{array}$$

kommutativ machen. Wir haben schon gezeigt, dass $\eta(\mathcal{F})$ halmweise ein Isomorphismus ist. Daher sind h und h' halmweise gleich und als Morphismen in eine Garbe auch gleich nach Lemma 7.15. □

Bemerkung 7.21. Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien sowie $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren, so heißt (F, G) ein *adjungiertes Paar* oder F *linksadjungiert* zu G oder G *rechtsadjungiert* zu F, oder in Symbolen

$$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$$

falls es eine in $c \in \mathcal{C}$ und $d \in \mathcal{D}$ natürliche Bijektion

$$\phi_{cd}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d))$$

gibt. Es folgt dann, dass es zwei natürliche Transformationen $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$, die *Einheit* und $\epsilon\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ der *Koeinheit* gibt, sodass die beiden Dreiecksidentitäten

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{F\eta} & FGF \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \epsilon F} \\ & & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\eta G} & GFG \\ & \searrow & \downarrow{\scriptstyle G\epsilon} \\ & & G \end{array}$$

erfüllt sind, idem man

$$\eta(c) := \phi_{cF(c)}(\mathrm{id}_{F(c)}) \quad \text{und} \quad \epsilon(d) := \phi^{-1}_{G(d)d}(\mathrm{id}_{G(d)})$$

setzt. Umgekehrt liefern η und ϵ, die die Dreiecksidentitäten erfüllen auch eine natürliche Bijektion $\phi_{cd} := \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \xrightarrow{G} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(c), G(d)) \xrightarrow{\eta^*} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d))$, wobei man die Koeinheit für die Bijektivität benötigt.

Eine *reflexive Unterkategorie* oder eine *Lokalisierung* ist eine Adjunktion $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$, bei der der Rechtsadjungierte G eine Unterkategorie ist, also insbesondere (oder bis auf Äquivalenz sogar genau) ein voller und treuer Funktor. Dieses ist äquivalent dazu, dass die Koeinheit ϵ der Adjunktion ein Isomorphismus ist oder, mit anderen Worten dazu, dass für alle Morphismen $f\colon c \to G(d)$ in $\mathcal{C}$ ein eindeutiger Morphismus $g\colon F(c) \to d$ in $\mathcal{D}$ existiert, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{f} & G(d) \\ & {\scriptstyle \eta(c)}\searrow & \uparrow{\scriptstyle G(g)} \\ & & GF(c) \end{array}$$

kommutativ macht. Der vorherige Satz 7.20 zeigt also mit anderen Worten, dass es eine Adjunktion

$$a : \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \rightleftarrows \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) : i$$

gibt, die eine Lokalisierung ist. Eine *koreflexive Unterkategorie* oder eine *Kolokalisierung* ist eine Adjunktion $F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$, bei der der Linksadjungierte F eine Unterkategorie ist.

Eine Adjunktion bei der die Einheit und die Koeinheit Isomorphismen sind, heißt eine *Adjungierte Äquivalenz*. Es ist ein Satz der Kategorientheorie, dass ein Funktor F genau

dann eine Äquivalenz von Kategorien (Siehe Bemerkung 6.9) ist, wenn er Linksadjungierter (oder äquivalent: Rechtsadjungierter) einer Adjungierten Äquivalenz ist. (Definiert man eine Äquivalenz alternativ als natürliche Isomorphismen η und ϵ müssen diese nicht unbedingt die Dreiechsidentitäten erfüllen, tun dieses aber nach einem geeigneten Ersetzen. Dieses ist bei unserer Definition in Bemerkung 6.9 aber kein Problem.)

Definition 7.22. Sei $A \in \mathcal{S}$ ein Objekt. Die zugehörige *konstante Garbe*

$$acA\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$$

auf X ist die Garbifizierung der konstanten Prägarbe cA aus Beispiel 7.6.(1).

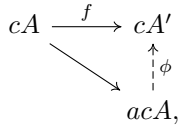
Lemma 7.23. *Für ein Objekt $A \in \mathcal{S}$ ist die konstante Garbe acA gegeben durch*

$$acA(U) \cong \{g\colon U \to A \mid g \text{ ist stetig und } A \text{ trägt die diskrete Topologie}\}$$

für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit den offensichtlichen Einschränkungsabbildungen. Es gilt also insbesondere $acA(U) \cong A$, falls U nichtleer und zusammenhängend ist.

Beweis. Zunächst ist klar, dass für ein zusammenhängendes U die zweite Beschreibung aus der ersten folgt, denn in diesem Fall sind für $U \neq \emptyset$ die stetigen Abbildungen $g\colon U \to A$ konstant und entsprechen also genau einem Element aus A.

Für die erste Beschreibung, sei die rechte Seite der zu zeigenden Isomorphie kurzfristig mit $cA'(U)$ bezeichnet. Es ist klar, dass cA' eine Garbe ist. Wir benutzen nun die universelle Eigenschaft der Garbifizierung aus Satz 7.20 und betrachten das Diagramm



wobei die Abbildung f von Prägarben dadurch definiert ist, dass $f(U)$ ein Element a aus $A = cA(U)$ auf die konstante Funktion $g\colon U \to A$ mit Wert a schickt. Da die diagonale Abbildung in dem obigen Diagramm ein Isomorphismus auf Halmen ist und es nach Lemma 7.16 ausreicht zu zeigen, dass ϕ ein Isomorphismus auf Halmen ist, genügt es schließlich also zu zeigen, dass f ein Isomorphismus auf Halmen ist. Es ist klar, dass f injektiv auf Halmen ist, da jedes $f(U)$ injektiv ist. Die Halme von cA sind natürlich jeweils A und für die Surjektivität von einem f_x genügt es also zu zeigen, dass für jeden Keim $[g\colon U \to A, U] \in cA'_x$ die stetige Abbildung g nach genügender Verkleinerung von U um x konstant wird. Ist aber $a = g(x)$ das Bild von x, so ist $\{a\} \subseteq A$ offen und dessen Urbild $W \subseteq U$ also eine offene Menge von der gewünschten Form. □

8. Geringte Räume und Verkleben

In diesem Kapitel behandeln wir die technischen Voraussetzungen, um im nächsten Kapitel die Räume $\mathrm{Spec}(A)$ mit Zusatzstruktur miteinander verkleben zu können. Ist man beim ersten Lesen nicht an technischen Details interessiert, ist es vielleicht zu empfehlen, dieses Kapitel zunächst nur zu „überfliegen“ und später genauer zu lesen.

Bemerkung 8.1. Ist X ein topologischer Raum und $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung, so gibt es sicherlich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \hookrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \hookrightarrow & X \end{array}$$

von topologischen Räumen, wobei die Abbildungen jeweils die offensichtlichen Inklusionen sind. Ist nur $U \hookleftarrow U \cap V \hookrightarrow V$ gegeben, so kann man sich fragen, ob man daraus bereits X „rekonstruieren“ kann. Dieses geht tatsächlich bis auf Isomorphie von topologischen Räumen, also bis auf einen Homöomorphismus. Es gibt also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xhookrightarrow{i} & U \\ \downarrow{\scriptstyle j} & \ulcorner & \downarrow \\ V & \hookrightarrow & P \end{array}$$

von topologischen Räumen mit $P \cong X$. Der topologische Raum P hat als unterliegende Menge die Quotientenmenge

$$P := U \coprod V/$$

bezüglich der Äquivalenzrelation, die von $u \sim v$, falls es ein $w \in U \cap V$ gibt mit $i(w) = u$ und $j(w) = v$, erzeugt wird. Eine Teilmenge $W \subseteq P$ offen ist genau dann, wenn beide Urbilder unter den kanonischen Abbildungen $U \hookrightarrow U \sqcup V \twoheadrightarrow P$ und $V \hookrightarrow U \sqcup V \twoheadrightarrow P$ offen sind. Diese Topologie nennt man auch die *Quotiententopologie*. Später wird das Symbol „$\ulcorner$“ bedeuten, dass es sich bei einem kommutativen Diagamm um ein sogenanntes *Pushout Diagramm* handelt. Das obige Diagramm ist also ein Beispiel eines solchen Pushout Diagramms in der Kategorie der topologischen Räume (vgl. auch Bemerkung 5.12 für einen Speziallfall der dualen Konstruktion).

Wir möchten gerne die gleiche Konstruktion wie in Bemerkung 8.1 für Garben durchführen. Dazu müssen wir zunächst einmal Garben auf verschiedenen topologischen Räumen miteinander vergleichen, denn bei unseren bisherigen betrachtungen zu Prägarben und Garben war der topologische Raum X, also die Kategorie $\mathbf{Ouv}(X)^{op}$ stets fixiert.

Definition 8.2. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Es gibt einen Funktor

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}\colon & \mathbf{Ouv}(Y) & \to & \mathbf{Ouv}(X) \\ & V & \mapsto & f^{-1}(V) \end{array}$$

welcher einen Funktor

$$\begin{array}{rccc} f_*^{-1}\colon & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(Y) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(f^{-1}(-)), \end{array}$$

der auch nur mit f_* bezeichnet wird und der das *direkte Bild* oder der *Pushforward* genannt wird, induziert.

Lemma 8.3. *Das direkte Bild* $f_*\colon \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \to \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(Y)$ *bewahrt Garben und definiert also einen Funktor*

$$\begin{array}{rccc} f_*\colon & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(f^{-1}(-)) \end{array}$$

der ebenfalls das direkte Bild *genannt und mit dem gleichen Symbol bezeichnet wird.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Wir müssen die Garbenbedingung aus Definition 7.8 für die Prägarbe $\mathcal{F}(f^{-1}(-))$ auf Y testen. Sei also $V \subseteq Y$ eine offene Teilmenge und $\{V_i \hookrightarrow V\}$ eine offene Überdeckung. Dann ist aber auch $\{f^{-1}(V_i) \hookrightarrow f^{-1}(V)\}$ eine offene Überdeckung der offene Menge $f^{-1}(V) \subseteq X$ und die Garbenbedingung von $\mathcal{F}$ liefert das Gewünschte. □

Beispiel 8.4.

(1) Betrachtet man einen topologischen Raum X und die stetige Abbildung $f\colon X \to *$, so gilt in diesem Fall
$$f_*(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$$
wobei wir die Identifikation $\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(*) \cong \mathcal{S}$ benutzen, welche durch $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(*)$ gegeben ist. Man nennt die Elemente von $\mathcal{F}(X)$ auch die *globalen Schnitte von* $\mathcal{F}$ und f_* den *Funktor der globalen Schnitte*. Der Funktor der globalen Schnitte ist also ein spezielles direktes Bild.

(2) Betrachtet man einen topologischen Raum Y, einen Punkt $y \in Y$, die stetige Abbildung $f\colon \{y\} \hookrightarrow Y$ und ein Objekt $A \in \mathcal{S}$, so ist dadurch eine eindeutige Garbe auf $\{y\}$ gegeben, die konstante Garbe acA. In diesem Fall heißt $f_*(acA)$ (oder eine dazu isomorphe Garbe) auch *Wolkenkratzergarbe* an y mit Wert A. Eine Wolkenkratzergarbe ist also ein spezielles direktes Bild. Man überlegt sich leicht, dass für den Halm der Wolkenkratzergarbe f_*acA an einem Punkt $y' \in Y$ gilt
$$(f_*acA)_{y'} \cong \begin{cases} A & \text{falls } y' \in \overline{\{y\}}, \\ * & \text{sonst,} \end{cases}$$
wobei $*$ das terminale Objekt der Kategorie $\mathcal{S}$ bezeichne.

(3) Ist $f\colon Z \hookrightarrow Y$ die Inklusion eines abgeschlossenen Unterraums, so heißt $f_*(\mathcal{F})$ auch die *Ausdehung durch Null*. Für den Halm dieser Garbe an einem Punkt $y \in Y$ gilt
$$(f_*\mathcal{F})_y \cong \begin{cases} \mathcal{F}_y & \text{falls } y \in Z, \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Neben dem direkten Bild möchten wir für eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ einen Funktor „in die andere Richtung“ $\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y) \to \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X)$, oder zumindest erst einmal einen Funktor auf Prägarben $\mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(Y) \to \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X)$, konstruieren. Dafür würden wir gerne das Objekt $f(U)$ für eine offene Menge $U \in \mathbf{Ouv}(X)$ in $\mathcal{G} \in \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(Y)$ einsetzen. Dieses ist allerdings, genau wie bei der Definition des Halms 7.13, nicht ohne Weiteres möglich, da $f(U)$ nicht unbedingt eine offene Teilmenge von Y sein muss. In der folgenden Definition imitieren wir also die Definition des Halms 7.13.

Definition 8.5. Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Die Zuordnung
$$\begin{array}{rccc} f^-\colon & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(Y) & \to & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \\ & \mathcal{G} & \mapsto & \left(U \mapsto \operatorname*{colim}_{f(U) \subseteq V \in \mathbf{Ouv}(Y)^{op}} \mathcal{G}(V)\right) \end{array}$$
wobei $f^-(\mathcal{G})$ die offensichtlichen durch $\mathcal{G}$ induzierten Einschränkungsabbildungen besitzt und wobei eine Abbildung $\mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ auf die induzierte Abbildung $f^-(\mathcal{G}) \to f^-(\mathcal{G}')$ geschickt wird, ist ein Funktor und heißt das *inverse Bild* (unter f). Hier ist genau wie beim Halm in Definition 7.13,
$$\operatorname*{colim}_{f(U) \subseteq V \in \mathbf{Ouv}(Y)^{op}} \mathcal{G}(V) := \bigsqcup_{\substack{V \in \mathbf{Ouv}(Y) \\ f(U) \subseteq V}} \mathcal{G}(V)/_\sim$$
wobei $(s, V) \sim (t, V')$ genau dann, wenn eine in Y offene Menge $W \subseteq V \cap V'$ um $f(U)$ existiert mit $s_{|W} = t_{|W}$. Es bezeichne
$$\begin{array}{rccc} f^-\colon & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y) & \to & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) \\ & \mathcal{G} & \mapsto & af^-(\mathcal{G}) \end{array}$$
den durch die Garbifizierung gegebenen Funktor, der etwas ungenau mit dem gleichen Symbol bezeichnet und auch das *inverse Bild* genannt wird.

Bemerkung 8.6. Wir versuchen den in der vorherigen Definition auftretenden Kolimes besser zu verstehen: Sind $V, V' \in \mathbf{Ouv}(Y)$ offene Mengen mit $f(U) \subseteq V' \subseteq V$, so gibt es eine Restriktionsabbildung $(-)_{|V'}\colon \mathcal{G}(V) \to \mathcal{G}(V')$ und alle (s, V') werden identifiziert mit ihrem Bild $(s|_{V'}, V')$. Intuitiv werden wir also „mit offenen Mengen immer kleiner“ um $f(U)$.

Bemerkung 8.7. Man kann den Index im Kolimes oder der disjunkten Vereinigung in der vorherigen Definition mit $f(U) \subseteq V \Leftrightarrow U \subseteq f^{-1}(V)$ umschreiben. So sieht man vielleicht noch eine genauere Analogie zu Definition 8.2.

Beispiel 8.8.

(1) Betrachtet man einen topologischen Raum Y, einen Punkt $y \in Y$ und die stetige Abbildung $f\colon \{y\} \hookrightarrow Y$, so ist $f^-(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}_y$ durch einen direkten Vergleich der Definitionen 7.13 und 8.5. Etwas genauer gesagt, ist in diesem Fall die Prägarbe $f^-(\mathcal{G})$ schon eine Garbe und wir benutzen die Identifikation $\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(\{y\}) \cong \mathcal{S}$, welche durch $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(\{y\})$ gegeben ist.

(2) Ist $f\colon X \to Y$ eine offene Abbildung, so ist die Beschreibung des inversen Bildes viel einfacher: Ist $U \subseteq X$ eine offene Menge, so ist auch $f(U) \subseteq Y$ offen und der Kolimes in Definition 8.5 hat ein „terminales Objekt“, d.h. $f(U)$ selber ist die „kleinste offene Menge“ um $f(U)$ (siehe Bemerkung 8.6). Daher gilt in diesem Fall $f^-(\mathcal{G}) = \mathcal{G}(f(-))$ für Prägarben.

(3) Ist $f\colon V \hookrightarrow Y$ eine offene Teilmenge von Y, so nennt man das inverse Bild

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G}_{|V} := f^-(\mathcal{G}) =: & \mathbf{Ouv}(V)^{op} & \to & \mathcal{S} \\ & W & \mapsto & \mathcal{F}(W). \end{array}$$

auch die *Einschränkung*. Es ist klar, dass $\mathcal{G}_{|U}$ eine Garbe ist, falls $\mathcal{G}$ eine Garbe ist.

Wir möchten an dieser Stelle in dem folgenden Satz noch kurz formulieren, wie sich das inverse und das direkte Bild zueinander verhalten.

Satz 8.9. *Sei $f\colon X \to Y$, $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X)$ und $\mathcal{G} \in \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y)$. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X)}(f^-\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow[\phi]{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

oder mit anderen Worten eine Adjunktion

$$f^- : \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y) \rightleftarrows \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) : f_*$$

und die entsprechende Aussage gilt auch für Prägarben.

Sind außerdem $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ zwei stetige Abbildungen, so sind das inverse und das direkte Bild verträglich mit der Komposition, es gilt also

$$(gf)^- \cong f^-g^- \quad \text{und} \quad (gf)_* \cong g_*f_*$$

und für den Spezialfall $\{x\} \xhookrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$ folgt insbesondere $(f^-\mathcal{G})_x \cong \mathcal{G}_{f(x)}$.

Ist außerdem $f\colon X \hookrightarrow Y$ eine offene oder eine abgeschlossene Einbettung, so ist die Koeinheit $f^-f_* \to \mathrm{id}$ der obigen Adjuktion ein Isomorphismus.

Beweis. Wir definieren zunächst ϕ und deren Umkehrabbildung ϕ^{-1}. Sei also eine Abbildung $\alpha\colon f^-\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ von Garben auf X gegeben und sei $V \subseteq Y$ eine offene Menge. Wir definieren $\phi(\alpha)(V)$ als die Komposition

$$\mathcal{G}(V) \to f^-\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \to af^-\mathcal{G}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\alpha(f^{-1}(V))} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) = f_*(\mathcal{F}(V)),$$

wobei die erste Abbildung dadurch definiert ist, dass $ff^{-1}(V) \subseteq V$ und die zweite durch die Garbifizierung.

Für die Umkehrabbildung sei $\beta\colon \mathcal{G} \to f_*\mathcal{F}$ eine Abbildung von Garben auf Y. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, genügt es durch die universelle Eigenschaft der Garbifizierung eine Abbildung $f^-\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ von Prägarben auf X zu konstruieren. Sei dafür $U \subseteq X$ offen und nehme ein Element $a \in f^-\mathcal{G}(U)$. Durch die Definition des Kolimes (also der Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung) gibt es einen Repräsentanten $b \in \mathcal{G}(V)$ davon, wobei $V \subseteq Y$ offen ist mit $f(U) \subseteq V$. Es folgt, dass $U \subseteq f^{-1}(V)$ und wir schicken a auf das Bild von b unter der Komposition

$$\mathcal{G}(V) \xrightarrow{\beta(V)} f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\mathcal{F}((-)_{|U})} \mathcal{F}(U).$$

Es ist eine Übung zu zeigen, dass diese beiden Zuordnungen zueinander invers sind.

Es folgt $(gf)_* \cong g_*f_*$ direkt aus $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. Für die Identität $(gf)^- \cong f^-g^-$ auf Prägarben sei $\mathcal{H} \in \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(Z)$ und $U \subseteq X$ offen. Nun gilt für $W \in \mathbf{Ouv}(Z)$, dass $gf(U) \subseteq W$

genau dann, wenn es eine offene Menge $V \subseteq Y$ um $f(U)$ gibt mit $g(V) \subseteq W$. Damit folgt die Behauptung für Prägarben. Die analoge Behauptung für Garben rechnet man entweder ebenso direkt nach oder benutzt die gerade bewiesene Adjunktion, um zu beobachten, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}((gf)^{-}\mathcal{H},\mathcal{F}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(Z)}(\mathcal{H},(gf)_*\mathcal{F})\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(Z)}(\mathcal{H},g_*f_*\mathcal{F})\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(Y)}(g^{-1}\mathcal{H},f_*\mathcal{F})\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(f^{-1}g^{-1}\mathcal{H},\mathcal{F})\end{aligned}$$

für alle $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X)$ gilt, woraus die Behauptung mit dem Yoneda Lemma (einer allgemeinen kategoriellen Aussage, Lemma 13.9) folgt.

Für die letzte Behauptung über die Koeinheit sei $f\colon X \hookrightarrow Y$ eine offene oder eine abgeschlossene Einbettung und $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X)$. Wir möchten zeigen, dass $f^{-}f_*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ ein Isomorphismus ist, was wir nach Lemma 7.16 auf Halmen testen können. Sei $x \in X$. Mit der vorherigen Identifikation müssen wir zeigen, dass die natürliche Abbildung $\epsilon(\mathcal{F})_x$

$$(f^{-}f_*\mathcal{F})_x \cong (f_*\mathcal{F})_{f(x)} = \mathcal{F}(f^{-1}(-))_{f(x)} \longrightarrow \mathcal{F}_x$$

injektiv und surjektiv ist. Für die Injektivität seien $[t,V]$ und $[t',V']$ zwei Elemente der linken Seite, also $t \in \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ und $t' \in \mathcal{F}(f^{-1}(V'))$, die unter $\epsilon(\mathcal{F})_x$ auf das gleiche Element in $\mathcal{F}_x$ abgebildet werden. Dieses bedeutet genau, dass es eine in X offene Umgebung $U \subseteq f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V') = V \cap V' \cap X$ von x gibt mit $t_{|U} = t'_{|U}$. Wenn die Inklusion $X \hookrightarrow Y$ offen ist, so ist auch $f(U) \subseteq V \cap V'$ eine offene Umgebung von $f(x)$ in Y und es gilt $[t,V] = [t_{|f(U)}, f(U)] = [t'_{|f(U)}, f(U)] = [t',V']$ da $f^{-1}(f(U)) = U$, was die Injektivität zeigt. Im Fall, dass $X \hookrightarrow Y$ abgeschlossen ist, ist $X \setminus U$ in X und damit auch in Y abgeschlossen und somit

$$W := (Y \setminus (X \setminus U)) \cap (V \cap V') = ((Y \setminus X) \cup U) \cap (V \cap V')$$

offen in Y. Auch hier gilt $W \subseteq V \cap V'$ und $f^{-1}(W) = U$ und daher $[t,V] = [t_{|W}, W] = [t'_{|W}, W] = [t',V']$ wie im offenen Fall.

Für die Surjektivität sei $[s,U] \in \mathcal{F}_x$. Hier ist U eine in X offene Umgebung von x. Wie oben gibt es eine in Y offene Menge W mit $f^{-1}(W) = U$. Da $x \in U$ folgt $f(x) \in W$ und $[s,W] \in \mathcal{F}(f^{-1}(-))_{f(x)}$ ist ein gesuchtes Urbild von $[s,U]$, was die Surjektivität zeigt. □

Bemerkung 8.10. Die letzte Behauptung in dem vorherigen Satz besagt, dass sich das inverse Bild auf gute Weise mit Halmen verträgt. Außer in speziellen Fällen wie denen in Beispiel 8.8, verträgt sich das inverse Bild normalerweise nicht gut mit Schnitten. Das direkte Bild ist per Definition verträglich mit Schnitten, aber auf Halmen nicht unbedingt gut zu kontrollieren, außer in speziellen Fällen wie denen in Beispiel 8.4.

Wir möchten gerne einen topologischen Raum X und eine Garbe darauf als ein „gemeinsames Objekt“ betrachten. Ein solches Objekt nennt man einen „geringten Raum“.

Definition 8.11. Ein *geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe, der *Strukturgarbe*,

$$\mathcal{O}_X\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Ring}$$

von Ringen auf X. Man bezeichnet ein solches Objekt manchmal nur mit X, wenn klar ist, was die beteiligte Strukturgarbe sein soll.

Ein *Morphismus* $(f, f^\sharp)\colon (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ zwischen zwei geringten Räumen besteht aus einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ und einer Abbildung

$$f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(f^{-1}(-))$$

von Garben auf Y. Man bezeichnet einen solchen Morphismus geringter Räume manchmal nur mit f, wenn klar ist, was die beteiligte Abbildung auf Garben sein soll.

Die geringten Räume bilden zusammen mit ihren Morphismen eine Kategorie, die mit **RS** bezeichnet wird mit der Komposition $(g,g^\sharp)(f,f^\sharp) = (gf, g_*(f^\sharp)g^\sharp)$.

Ist X ein geringter Raum, so schreiben wir manchmal $|X|$ für dessen zugehörigen topologischen Raum und es gibt einen Funktor

$$\begin{array}{rccc}|-|\colon & \mathbf{RS} & \to & \mathbf{Top}\\ & (X,\mathcal{O}_X) & \mapsto & X.\end{array}$$

Beispiel 8.12. Ist X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}_X(-,\mathbb{R})$ die Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen darauf, so ist das Paar $(X,\mathcal{C}_X(-,\mathbb{R}))$ ein geringter Raum. Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ definiert einen Morphismus $(f,f^\sharp)\colon (X,\mathcal{C}_X(-,\mathbb{R})) \to (Y,\mathcal{C}_Y(-,\mathbb{R}))$ durch

$$\begin{array}{rccl} f^\sharp(V)\colon & \mathcal{C}_Y(V,\mathbb{R}) & \to & f_*\mathcal{C}_X(-,\mathbb{R})(V) = \mathcal{C}_X(f^{-1}(V),\mathbb{R}) \\ & s & \mapsto & f^*s, \end{array}$$

oder genauer durch $s \mapsto s(f|_{f^{-1}(V)}(-))$.

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1}(V) & \xrightarrow{f|\dots} & V & \xrightarrow{\quad s \quad} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y & & \end{array}$$

Ist $X \hookrightarrow Y$ injektiv, so ist $f^\sharp(V)\colon \mathcal{C}_Y(V,\mathbb{R}) \to f_*\mathcal{C}_X(-,\mathbb{R})(V)$ also gerade die Restriktion $s \mapsto s_{|V\cap X}$.

Um letztendlich geringte Räume miteinander zu verkleben, müssen wir uns im folgenden Lemma 8.13 erst einmal überlegen, wieso man Abbildungen von Garben „lokal angeben“ und miteinander verkleben kann.

Lemma 8.13. *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X mit Werten in* **Set**. *Dann ist die Zuordnung*

$$\begin{array}{rccl} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G})\colon & \mathbf{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Set} \\ & U & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{PSh}(U)}(\mathcal{F}_{|U},\mathcal{G}_{|U}) \end{array}$$

eine Garbe und heißt der Garbenhom auf X.

Beweis. Es ist klar, dass $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ eine Prägarbe definiert, denn ist $U \subseteq V$ eine Inklusion in X offener Mengen, so ist die Restriktionsabbildung

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(V) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{|V},\mathcal{G}_{|V}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{|U},\mathcal{G}_{|U}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$$

einfach dadurch gegeben, dass man in eine Garbenabbildung $f\colon \mathcal{F}_{|V} \to \mathcal{G}_{|V}$ nur offene Teilmengen von U einsetzt, wofür wir $f_{|U}\colon \mathcal{F}_{|U} \to \mathcal{G}_{|U}$ schreiben.

Für die Garbenbedingung sei $U \subseteq X$ eine offene Menge und $\{U_i \hookrightarrow U\}$ eine offene Überdeckung. Für die Eindeutigkeit seien $f,g \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_{|U},\mathcal{G}_{|U})$ zwei Elemente, sodass gilt $f_{|U_i} = g_{|U_i}$ für alle i. Wir möchten zeigen, dass $f = g$, also dass $f(W) = g(W)$ gilt für alle $W \subseteq U$ offen. Wähle also ein $W \subseteq U$ offen und $s \in \mathcal{F}_{|U}(W) = \mathcal{F}(W)$. Dann gilt für alle Indizes i, dass

$$\begin{array}{rcl} f(W)(s)_{|U_i\cap W} & = & f(U_i\cap W)(s_{|U_i\cap W}) \\ & = & f_{|U_i}(U_i\cap W)(s_{|U_i\cap W}) \\ & = & g_{|U_i}(U_i\cap W)(s_{|U_i\cap W}) \\ & = & g(W)(s)_{|U_i\cap W} \end{array}$$

und da $\{U_i \cap W \hookrightarrow W\}$ eine offene Überdeckung ist, folgt $f(W)(s) = g(W)(s)$ mit der Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{G}$.

Für die Verklebeeigenschaft seien $f_i \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_{|U_i},\mathcal{G}_{|U_i})$ kompatible Elemente. Wir wollen ein Element $f \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_{|U},\mathcal{G}_{|U})$ konstruieren, dass auf die f_i einschränkt. Sei $W \subseteq U$ eine offene Menge. Wir müssen also zunächst eine Abbildung von Mengen $f(W)\colon \mathcal{F}_{|U}(W) = \mathcal{F}(W) \to \mathcal{G}(W) = \mathcal{G}_{|U}(W)$ definieren. Sei dafür $s \in \mathcal{F}(W)$ und betrachte die Elemente $t_i := f_i(U_i\cap W)(s_{|U_i\cap W}) \in \mathcal{G}(U_i\cap W)$. Um diese mit der Garbeneigenschaft von $\mathcal{G}$ zu einem Element $t \in \mathcal{G}(W)$ zu verkleben, müssen wir deren Kompatibilität überprüfen. Für Indizes i und j gilt aber

$$\begin{array}{rcl} t_{i|U_i\cap U_j\cap W} & = & f_i(U_i\cap W)(s_{|U_i\cap W})_{|U_i\cap U_j\cap W} \\ & = & f_i(U_i\cap U_j\cap W)(s_{|U_i\cap U_j\cap W}) \\ & = & f_j(U_i\cap U_j\cap W)(s_{|U_i\cap U_j\cap W}) \\ & = & t_{j|U_i\cap U_j\cap W}, \end{array}$$

die Elemente sind also kompatibel und wir setzen $f(W)(s) := t$. Um zu zeigen, dass f eine Abbildung von Prägarben $f\colon \mathcal{F}_{|U} \to \mathcal{G}_{|U}$ definiert, seien $W' \subseteq W$ in U offene Teilmengen. Wir wollen für $s \in \mathcal{F}_{|U}(W)$ zeigen, dass die Elemente

$$f(W)(s)_{|W'} = f(W')(s_{|W'})$$

von $\mathcal{G}_{|U}(W')$ gleich sind. Mit der Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{G}$ genügt es wieder, dies für die Einschränkungen zu der offenen Überdeckung $\{U_i \cap W' \hookrightarrow W'\}$ zu testen. Nun gilt

$$\begin{aligned} f(W)(s)_{|W'|U_i\cap W'} &= f(W)(s)_{|U_i\cap W'} \\ &= (f(W)(s)_{|U_i\cap W})_{|U_i\cap W'} \\ &= f_i(U_i\cap W)(s_{|U_i\cap W})_{|U_i\cap W'} \\ &= f_i(U_i\cap W')(s_{|U_i\cap W'}) \\ &= f(W')(s_{|W'})_{|U_i\cap W'} \end{aligned}$$

und also ist f ist eine Abbildung von Prägarben. □

Bevor wir geringte Räume miteinander verkleben, möchten wir das analoge Resultat für Garben getrennt beweisen, da wir es an einer späteren Stelle noch einmal in dieser Form benötigen werden.

Bemerkung 8.14. Mit uns bisher unbekannten und technischen Worten, kann man den nach der folgenden Definition genannten Satz 8.18 auch so formulieren, dass der „2-Funktor“

$$\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(-)\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to 2\text{-}\mathbf{Grpd} \subseteq 2\text{-}\mathbf{Cat}$$

einen *Stack* definiert - dieses ist eine Art abgeschwächte Version einer Garbe, bei der das Equalizer-Diagram aus 7.8 noch „einen Schritt weiter nach rechts“ geht. Genauso, wie wir bei einer Garbe formuliert haben, wann eine Familie von Schnitten „kompatibel“ ist, und man sie also verkleben kann, liefert die folgende Definition 8.15 die analoge Bedingung für einen Stack, also in unserem Fall die analoge Bedingung für die Garben ansich.

Definition 8.15. Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U}_X := \{U_i \hookrightarrow X\}_{i\in\mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung. Ein *Verklebedatum* $(\mathcal{F}_i, \phi_{ji})$ *für Garben auf* $\mathfrak{U}_X$ (mit Werten in $\mathcal{S}$) ist eine Familie

$$\mathcal{F}_i\colon \mathbf{Ouv}(U_i)^{op} \to \mathcal{S}$$

von Garben zusammen mit Garbenisomorphismen

$$\phi_{ji}\colon \mathcal{F}_{i|U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{j|U_{ji}}$$

für alle Paare $(i,j) \in \mathcal{I}^2$, sodass für alle Tripel $(i,j,k) \in \mathcal{I}^3$ das Diagramm (in dem die jeweiligen Einschränkungen der ϕ auf $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k$ nicht genannt sind)

(8.16)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{i|U_{ijk}} & \xrightarrow{\quad\phi_{ki}\quad} & \mathcal{F}_{k|U_{ijk}} \\ & {\scriptstyle\phi_{ji}}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle\phi_{kj}} & \\ & \mathcal{F}_{j|U_{ijk}} & \end{array}$$

kommutiert, was die *Kozykelbedingung* genannt wird. Ein Morphismus von Verklebedaten $(\mathcal{F}_i, \phi_{ji}) \to (\mathcal{G}_i, \varphi_{ji})$ ist eine Familie von Garbenabbildungen $f_i\colon \mathcal{F}_i \to \mathcal{G}_i$, sodass für alle Paare $(i,j) \in I^2$ das Diagramm

(8.17)
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{i|U_{ij}} & \xrightarrow[\cong]{\phi_{ji}} & \mathcal{F}_{j|U_{ij}} \\ {\scriptstyle f_{i|U_{ij}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{j|U_{ij}}} \\ \mathcal{G}_{i|U_{ij}} & \xrightarrow[\cong]{\varphi_{ji}} & \mathcal{G}_{j|U_{ij}} \end{array}$$

kommutiert. Die Verklebedaten für Garben auf $\mathfrak{U}_X$ bilden zusammen mit ihren Morphismen eine Kategorie, die mit $\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(\mathfrak{U}_X)$ bezeichnet wird.

Satz 8.18. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U}_X := \{U_i \hookrightarrow X\}_{i\in\mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung. Der Funktor*

$$\begin{array}{rccl} gd_{\mathfrak{U}_X}\colon & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(\mathfrak{U}_X) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & (\mathcal{F}_{|U_i}, (\mathcal{F}_{|U_i})_{|U_{ij}} \xrightarrow{=} (\mathcal{F}_{|U_j})_{|U_{ij}}) \end{array}$$

ist voll, treu und essentiell surjektiv und damit eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Die Treue und Völle folgt aus Lemma 8.13.

Für die essentielle Surjektivität konstruieren wir (funktoriell) zu einem Verklebedatum $(\mathcal{F}_i, \phi_{ji})$ eine Garbe $\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to S$ zusammen mit Isomorphismen $f_i\colon \mathcal{F}_{|U_i} \to \mathcal{F}_i$, sodass für alle Paare $(i,j) \in I^2$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}_{|U_i})_{|U_{ij}} & = & (\mathcal{F}_{|U_j})_{|U_{ij}} \\ {\scriptstyle f_{i|U_{ij}}}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle f_{j|U_{ij}}} \\ \mathcal{F}_{i|U_{ij}} & \xrightarrow[\cong]{\phi_{ji}} & \mathcal{F}_{j|U_{ij}} \end{array}$$

kommutiert.

Sei also $(\mathcal{F}_i, \phi_{ji})$ ein Verklebedatum und $U \subseteq X$ eine offene Menge. Wir definieren

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ (s_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \textstyle\prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}_i(U \cap U_i) \;\middle|\; \forall i,j : s_{j|U\cap U_{ij}} = \phi_{ji|U\cap U_{ij}}(s_{i|U\cap U_{ij}}) \right\}$$

mit Restriktionsabbildungen $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ gegeben durch $(s_i) \mapsto (s_{i|U\cap U_i})$. Durch die Definition der Restriktionsabbildungen sieht man sofort, dass $\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$ eine Prägarbe definiert. Ebenso folgt die Garbenbedingung durch die Garbenbedingungen der einzelnen $\mathcal{F}_i$. Außerdem gibt es offenbar Prägarbenabbildungen $f_i\colon \mathcal{F}_{|U_i} \to \mathcal{F}_i$ induziert durch die jeweiligen Projektionen $(s_i) \mapsto s_i$. Bis zu dieser Stelle haben wir noch nicht die Kozykelbedingung benutzt.

Sei $j \in \mathcal{I}$. Um ein Inverses $\mathcal{F}_j \to \mathcal{F}_{|U_j}$ zu der Prägarbenabbildung $f_j\colon \mathcal{F}_{|U_j} \to \mathcal{F}_j$ zu konstruieren, setzen wir $s_j \mapsto (\phi_{ji}^{-1}(s_j))_{i\in\mathcal{I}}$. Damit dieses tatsächlich ein Element von $\mathcal{F}$ liefert, braucht man genau die Kozykelbedingung. □

Nun haben wir alle Zutaten für das Verkleben geringter Räume parat: Mit Bemerkung 8.1 können wir die topologischen Räume verkleben und mit dem vorherigen Satz 8.18 auch Garben. Wir werden an dieser Stelle aber keinen Satz formulieren, der, analog zu Satz 8.18, beide Konstruktionen für geringte Räume zusammenfasst. Dieses werden wir für eine gewisse Unterstruktur, die Schemata, später explizit aufschrieben.

Beispiel 8.19. Sei, wie in Bemerkung 8.1 für topologische Räume, ein ungestricheltes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (U\cap V, \mathcal{C}_{UV}(-,\mathbb{R})) & \xrightarrow{(i,i^\sharp)} & (U, \mathcal{C}_U(-,\mathbb{R})) \\ {\scriptstyle (j,j^\sharp)}\downarrow & & \vdots\downarrow \\ (V, \mathcal{C}_V(-,\mathbb{R}) & \dashrightarrow & (X,\mathcal{F}) \end{array}$$

von geringten Räumen wie in Beispiel 8.12 gegeben. In diesem Beispiel hatten wir auch gesehen, dass $i^\sharp\colon \mathcal{C}_U(-,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_{UV}(-\cap UV, \mathbb{R})$ und $j^\sharp\colon \mathcal{C}_V(-,\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_{UV}(-\cap UV,\mathbb{R})$ jeweis die Restriktionsabbildungen auf $UV := U\cap V$ sind (diese sind gerade durch Vorschalten von i und j gegeben).

Verklebt man die Garben $\mathcal{C}_U(-,\mathbb{R})$ und $\mathcal{C}_V(-,\mathbb{R})$ mit Satz 8.18 (wobei die zusätzlichen Daten der ϕ_{ji} jeweils die Identitäten sind) ist, da wir nur zwei Garben verkleben, die Kozykelbedingung stets erfüllt und wir erhalten aus dem Beweis von Satz 8.18, dass

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(W) & = & \{(s_U, s_V) \in \mathcal{C}_U(W\cap U,\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_V(W\cap V,\mathbb{R}) \mid s_{U|W\cap UV} = s_{V|W\cap UV}\} \\ & \cong & \mathcal{C}_X(W,\mathbb{R}). \end{array}$$

9. Die Strukturgarbe auf dem Spektrum eines Rings

Wir wiederholen noch einmal unsere beiden Wünsche aus den vorherigen Kapiteln:

(1) Der topologische Raum $\mathrm{Spec}(A)$ mit einer Zusatzstruktur soll den Ring A genau festlegen.
(2) Wir möchten die topologischen Räume $\mathrm{Spec}(A)$ mit Zusatzstruktur miteinander verkleben.

Um die gesuchte Zusatzstruktur zu finden und (2) zu erfüllen, möchten wir einen Ring A als gewisse „Funktionen“ interpretieren und eine (verklebbare) Garbe analog zu $\mathcal{C}_X(-,\mathbb{R})$ erhalten. In Kapitel 3 haben wir in Lemma 3.3 für einen Ring R, $A := R[\underline{x}]/I$ und eine Algebra $R \to K$ die Bijektion

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_K(I) &\xrightarrow[\bar{\Psi}]{\cong} \mathrm{Hom}_{R\text{-}\mathbf{Alg}}(A,K) \\ \underline{a} &\longmapsto (\psi_{\underline{a}} \colon f \mapsto f(\underline{a})) \end{aligned}$$

betrachtet. Analog bekommt man eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow[\bar{\Theta}]{} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathcal{V}_K(I),K) \\ f &\longmapsto (\psi_{(-)}(f) \colon \underline{a} \mapsto f(\underline{a})) \end{aligned}$$

die ein R-Algebrenhomomorphismus ist, wenn wir die rechte Seite mit der „punktweisen“ R-Algebrenstruktur von K versehen. Die Idee ist nun, dass wir benutzen, dass das Objekt $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-,K)$ auf der rechten Seite eine Garbe in der klassischen Zariski (Unterraum-)Topologie auf $\mathcal{V}_K(I) \subseteq K^n$ ist. Leider ist die Abbildung $\bar{\Theta}$ nicht im Allgemeinen injektiv und wir verlieren hier zu viel Information über den Ring A.

Analog können wir mit der „Verallgemeinerung“ $\mathrm{Spec}(A)$ des geometrischen Objekts $\mathcal{V}_K(I)$ anstelle der Menge von Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(A) &\xrightarrow[\psi_{(-)}]{} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\Big(A, \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)} k(\mathfrak{p})\Big) \\ \mathfrak{p} &\longmapsto (\psi_{\mathfrak{p}} \colon f \mapsto f(\mathfrak{p})) \end{aligned}$$

mit $\psi_{(\mathfrak{p})} \in k(\mathfrak{p})$ die dazu in Bijektion stehende Menge von Abbildungen

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow[\Theta_A]{} \left\{ \mathrm{Spec}(A) \xrightarrow{h} \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)} k(\mathfrak{p}) \mid h(\mathfrak{p}) \in k(\mathfrak{p}) \right\} \\ f &\longmapsto (\psi_{(-)}(f) \colon \mathfrak{p} \mapsto f(\mathfrak{p})) \end{aligned}$$

betrachten. Hier ist die rechte Seite (siehe Bemerkung 7.19) isomorph zu dem Produkt $\prod_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)} k(\mathfrak{p})$ welches eine Ringstruktur trägt, mit der Θ_A eine Ringabbildung ist. Der Beweis von Lemma 7.14 zeigt, dass $\prod_{\mathfrak{p}\in(-)} k(\mathfrak{p})$ eine Garbe $\mathbf{Ouv}(\mathrm{Spec}(A))^{op} \to \mathbf{Ring}$ definiert. Für gewisse offene Mengen von $\mathrm{Spec}(A)$, nämlich für die basisoffenen Mengen $D(s)$ für ein $s \in A$, gibt es zu der Auswertung $\prod_{\mathfrak{p}\in D(s)} k(\mathfrak{p})$ von dieser Garbe auch eine „linke Seite“, also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[\Theta_A]{} & \left\{ \mathrm{Spec}(A) \xrightarrow{h} \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)} k(\mathfrak{p}) \mid h(\mathfrak{p}) \in k(\mathfrak{p}) \right\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle l} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tilde{l}^*} \\ A[\frac{1}{s}] & \xrightarrow[\Theta_{A[\frac{1}{s}]}]{} & \left\{ \mathrm{Spec}(A[\frac{1}{s}]) \xrightarrow{h} \bigsqcup_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A[\frac{1}{s}])} k(\mathfrak{p}) \mid h(\mathfrak{p}) \in k(\mathfrak{p}) \right\} \end{array} \tag{9.1}$$

denn durch Lemma 4.10 können wir das Bild der Abbildung $\tilde{l} \colon \mathrm{Spec}(A[\frac{1}{s}]) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ mit $D(s)$ identifizieren.

Wir können nun hoffen, dass $\Theta_{(-)}$ für alle diese Ringe injektiv ist und wir durch das Bild in $\prod_{\mathfrak{p}\in(-)} k(\mathfrak{p})$ eine Prägarbe $\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(\mathrm{Spec}(A))^{op} \to \mathbf{Ring}$ bekommen – zumindest erst einmal auf basisoffenen Mengen –, durch die wir A rekonstruieren können und die vielleicht auch, nach einer gewissen „Ausdehnung“ auf alle offenen Mengen von $\mathrm{Spec}(A)$, eine Garbe ist.

Es ist Θ_A tatsächlich injektiv, falls A ein reduzierter Ring ist: Ist $f \in A$ mit $\Theta_A(f) = 0$ gilt also für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, dass $f \in \mathfrak{p}$, also $f \in \cap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)} = \mathcal{I}(\mathrm{Spec}(A)) = \mathrm{Nil}(A) = 0$ nach Korollar 5.3. In dem Fall, dass A reduziert ist, bekommen wir also insbesondere einen Ringisomorphismus $A \cong \mathcal{F}(\mathrm{Spec}(A))$. Die Lokalisierung $A[\frac{1}{s}]$ des reduzierten Rings A ist wieder reduziert.

Bemerkung 9.2. Es gibt den klassischen Begriff einer „regulären Abbildung“ $V \to K$ einer „quasi-affinen Varietät“ V in einen Körper K. Eine *klassische quasi-affine Varietät* V ist eine Zariski offene Teilmenge eines $\mathcal{V}_K(I)$. Eine *klassische reguläre Abbildung* $V \to K$ ist eine Abbildung $f\colon V \to K$, sodass es für alle Punkte $\underline{a} \in V$ eine (oBdA basisoffene) Umgebung $\underline{a} \in D(s)$ gibt, sodass $f|_{D(s)}(-) = g(-)/s(-)$ wobei $g, s \in R[\underline{x}]$ Polynome sind. Obwohl diese Definition erst einmal allgemeiner aussieht, sind die regulären Abbildungen $\mathcal{V}_K(I) \to K$ gerade die in Definition 3.30 betrachteten die algebraischen Abbildungen und nur für „nicht-abgeschlossene Teilmengen“ spielt der Nenner eine Rolle. Die Definition einer klassischen regulären Abbildung ist also durch die obige Betrachtung begündet und das natürliche Analogon einer algebraischen Abbildung, wenn man auch offene Teilmengen einer algebraischen Menge untersuchen möchte.

Eine der wesentlichen Ideen der modernen Algebraischen Geometrie ist nun, die rechte Seite in (9.1) einfach zu ignorieren und für $X := \mathrm{Spec}(A)$ eine Garbe, die *Strukturgarbe*,

$$\mathcal{O}_X\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Ring}$$

durch $\mathcal{O}_X(D(s)) := A[\frac{1}{s}]$ zu definieren, wobei natürlich noch nicht klar ist, dass dieses überhaupt möglich ist und diese Definition die Garbeneigenschaft erfüllt. Wir werden in diesem Kapitel sehen, dass eine solche Definition tatsächlich möglich ist und man auf diese Weise auch das obige Problem der Behandlung nicht-reduzierter Ringe lösen kann. Wir bemerken noch, dass für ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ wegen

$$\mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{p}}) = \bigcap_{D(f)\ni\mathfrak{p}} D(f)$$

für den Halm der Strukturgarbe an $\mathfrak{p}$ gelten sollte, dass $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = A_{\mathfrak{p}}$.

Wir fixieren im Folgenden einen Ring A und den topologischen Raum $X := \mathrm{Spec}(A)$. Zunächst definieren wir eine Prägarbe $\mathcal{O}_X^{pre}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Ring}$ und anschließend die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ als deren Garbifizierung.

Lemma 9.3. *Für eine offene Menge $U \subseteq X$ ist die Teilmenge*

$$S_U := A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in U} \mathfrak{p}$$

von A multiplikativ und die Zuordnung

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{O}_X^{pre}\colon & \mathbf{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Ring} \\ & U & \mapsto & S_U^{-1}A \end{array}$$

eine Prägarbe.

Beweis. Für die Multiplikativität seien $a, b \in S_U$. Wenn wir annehmen, dass $ab \notin S_U$, gibt es also ein $\mathfrak{p} \in U$ mit $ab \in \mathfrak{p}$. Dann aber folgt $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$, was ein Widerspruch ist zu $a, b \in S_U$.

Es ist $\mathcal{O}_X^{pre}$ eine Prägarbe, denn ist $U \subseteq V$ eine Inklusion von Teilmengen von X, so ist $S_V \subseteq S_U$ und es gibt also eine kanonische A-Algebrenabbildung $S_V^{-1}A \to S_U^{-1}A$. □

Im vorherigen Beweis von Lemma 9.3 haben wir nicht benutzt, dass $U \subseteq V$ eine Inklusion von offenen Teilmengen ist. Es gibt also auch für $\mathfrak{p} \in U$, also $\{\mathfrak{p}\} \subseteq U$, die Inklusion $S_U \subseteq S_{\{\mathfrak{p}\}}$ damit eine A-Algebrenabbildung

$$\mathcal{O}_X^{pre}(U) := S_U^{-1}A \to S_{\{\mathfrak{p}\}}^{-1}A =: A_{\mathfrak{p}}$$

Daher gibt es auch eine kanonische A-Algebrenabbildung

$$\begin{array}{rcl} \operatorname*{colim}_{\mathfrak{p}\in U\in \mathbf{Ouv}(X)^{op}} \mathcal{O}_X^{pre}(U) & \to & A_{\mathfrak{p}} \\ [\frac{a}{s}, U] & \mapsto & \frac{a}{s}. \end{array} \tag{9.4}$$

Lemma 9.5. *Für $\mathfrak{p} \in X$ ist die kanonische A-Algebrenabbildung* (9.4)*, also*

$$\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}^{pre} \xrightarrow{\cong} A_{\mathfrak{p}}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Zunächst beobachten wir, dass für ein $s \in A$ stets $s \in S_{D(s)}$ gilt, denn wäre das Gegenteil richtig, also wäre $s \in \bigcup_{\mathfrak{q}\in D(s)} \mathfrak{q}$, so gäbe es ein $\mathfrak{q} \in D(s)$ mit $s \in \mathfrak{q}$, aber andererseits $D(s) = \{\mathfrak{q} \mid s \notin \mathfrak{q}\}$, was ein Widerspruch ist.

Für die Surjektivität sei $\frac{a}{s} \in A_{\mathfrak{p}}$, also $a \in A$ und $s \in A \setminus \mathfrak{p}$. Da $s \notin \mathfrak{p}$, gilt $\mathfrak{p} \in D(s)$. Außerdem wissen wir schon, dass $s \in S_{D(s)}$. Damit ist $[\frac{a}{s}, D(s)]$ ein Element des Halms, das auf $\frac{a}{s} \in A_{\mathfrak{p}}$ abgebildet wird und die Surjektivität ist gezeigt.

Für die Injektivität sei $[\frac{a}{s}, U]$ ein Element des Halms, das auf $0 \in A_{\mathfrak{p}}$ abgebildet wird. Wir können $U = D(f)$ basisoffen annehmen, da $\mathfrak{p}$ in einer basisoffenen Überdeckungsmenge $D(f)$ von U enthalten ist und dafür $[\frac{a}{s}, U] = [\frac{a}{s}, D(f)]$ gilt. Nach Voraussetzung gibt es ein $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $ta = 0$ in A. Es ist $\mathfrak{p} \in D(t)$, da $t \notin \mathfrak{p}$. Damit ist $\mathfrak{p} \in D(f) \cap D(t) = D(ft)$ und es gilt $[\frac{a}{s}, U] = [\frac{a}{s}, D(ft)]$. Da aber $ft \in S_{D(ft)}$ ist das Element ft in $S_{D(ft)}^{-1}A = \mathcal{O}_X^{pre}(D(ft))$ invertierbar und es gilt hier $\frac{a}{s} = \frac{fta}{fts} = \frac{f0}{fts} = 0$ und damit $[\frac{a}{s}, D(ft)] = 0$. Also ist die Injektivität gezeigt. □

Wir haben im obigen Beweis gesehen, dass für ein Element $s \in A$ gilt, dass $s \in S_{D(s)}$. Weil $S_{D(s)}$ nach Lemma 9.3 multiplikativ abgeschlossen ist, folgt auch $\{1, s, s^2, \ldots\} \subseteq S_{D(s)}$ und es gibt es eine kanonische A-Algebrenabbildung $A[\frac{1}{s}] \to S_{D(s)}^{-1}A = \mathcal{O}_X^{pre}(D(s))$.

Lemma 9.6. *Ist $s \in A$, so ist die kanonische A-Algebrenabbildung*

$$A[\tfrac{1}{s}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X^{pre}(D(s))$$

ein Isomorphismus, der kompatibel ist mit der Lokalisierungsabbildung $A[\frac{1}{s}] \to A[\frac{1}{s}][\frac{1}{s'}]$ auf der einen und der Einschränkung $(-)_{|D(s')} \colon \mathcal{O}_X^{pre}(D(s)) \to \mathcal{O}_X^{pre}(D(s's))$ auf der anderen Seite.

Beweis. Wir zeigen die Aussage, dass für jedes $a \in S_{D(s)}$ ein $b \in A$ existiert mit $ab = s^n$ für ein $n \geq 0$. Dieses bedeutet, dass $\frac{a}{1} \in A[\frac{1}{s}]$ invertierbar ist. Da dann alle Elemente aus $S_{D(s)}$ auf Einheiten in $A[\frac{1}{s}]$ geschickt werden, folgt mit der universellen Eigenschaft der Lokalisierung die Behauptung. Angenommen, das Gegenteil der obigen Aussage wäre der Fall. Dann gibt es ein $a \in S_{D(s)}$, sodass $(a) \cap \{1, s, s^2, \ldots\} = \emptyset$. Damit ist das Ideal $(a)[\frac{1}{s}] \subsetneq A[\frac{1}{s}]$ nicht der ganze Ring und nach Satz A.7 in einem Primideal enthalten. Dessen Urbild unter der Lokalisierungsabbildung ist wieder ein Primideal $\mathfrak{q}$ mit $(a) \subseteq \mathfrak{q}$. Es ist aber $s \notin \mathfrak{q}$ nach der Primidealkorrespondenz für Lokalisierungen, also $a \in \mathfrak{q} \in D(s)$, was ein Widerspruch zu $a \in S_{D(s)}$ ist. □

Definition 9.7. Die Garbifizierung

$$\mathcal{O}_X \colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Ring}$$

der Prägarbe $\mathcal{O}_X^{pre}$ aus Lemma 9.3 heißt die *Strukturgarbe* von $\operatorname{Spec}(A)$.

Der geringte Raum $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$ heißt das zu A gehörige *affine Schema*.

Bemerkung 9.8. Mit der Beschreibung der Halme von $\mathcal{O}_X^{pre}$ aus Lemma 9.5 und der konkreten Form der Garbifizierung aus Lemma 7.18, ergibt sich für ein offenes $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$, dass

$$\mathcal{O}_X(U) = \{\ (s_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in U}\ \mid\ (s_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in U} \text{ ist ausdehnbar }\} \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$$

wobei die Ausdehnbarkeitsbedingung aus Lemma 7.18 nun übersetzbar ist zu:

$$\begin{gathered}\text{Für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ existiert eine offene Umgebung } W_\mathfrak{p} \subseteq U \text{ und}\\ a, b \in A, \text{sodass für alle } \mathfrak{q} \in W_\mathfrak{p} \text{ gilt } b \notin \mathfrak{q} \text{ und } \tfrac{a}{b} = s_\mathfrak{q} \text{ in } A_\mathfrak{q}.\end{gathered}$$

Dieses ist analog zu dem Begriff der klassischen regulären Abbildung $U \to K$ aus Bemerkung 9.2. Dieses ist der Grund, dass man manchmal sagt, die Elemente von $\mathcal{O}_X(U)$ seien die „auf U definierten regulären Funktionen“.

Im Rest dieses Kapitels möchten wir zeigen, dass die Garbifizierung $\mathcal{O}_X$ von $\mathcal{O}_X^{pre}$ auf basisoffenen Mengen $D(f)$ „nichts ändert“, dass also $A[\frac{1}{s}] \cong \mathcal{O}_X^{pre}(D(s)) \cong \mathcal{O}_X(D(s))$ gilt. Dieses wichtige Ergebnis liefert uns, dass die in der Einleitung vermutete „Definition“ für die Strukturgarbe auf $X = \mathrm{Spec}(A)$ tatsächlich möglich ist. Hierzu müssen wir den Begriff der Garbe erweitern zum Begriff der $\mathfrak{B}$-Garbe. Diese Erweiterung ist ein erstes Beispiel dafür, wieso es sinnvoll ist, den Begriff der Garbe nicht nur für offene Mengen eines Topologischen Raums sondern allgemeiner zu definieren.

Für die Definition einer Basis einer Topologie, siehe Bemerkung 4.1. Damit wir endliche Schnitte in der Garbenbedingung nicht kompliziert behandeln müssen, definieren wir den Begriff einer „schnittstabilen Basis“.

Definition 9.9. Es sei X ein topologischer Raum mit einer Topologie $\mathfrak{T}$. Eine Teilmenge $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ mit den Eigenschaften

(1) Endliche Schnitte von Elementen aus $\mathfrak{B}$ sind wieder in $\mathfrak{B}$.
(2) Für jedes offene $U \subseteq X$ und $x \in U$ gibt es ein $U' \in \mathfrak{B}$ mit $U' \subseteq U$ und $x \in U'$.

heißt eine *schnittstabile Basis* der Topologie $\mathfrak{T}$.

Ist $\mathfrak{B}$ eine schnittstabile Basis von $\mathfrak{T}$, so definiert man genau wie in Definition 7.3 die Kategorie $\mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B})$, diese ist also eine Unterkategorie

$$\phi\colon \mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B}) \hookrightarrow \mathbf{Ouv}(X).$$

Eine $\mathfrak{B}$-*Prägarbe* auf X (mit Werten in $\mathcal{S}$) ist ein Funktor

$$\mathcal{F}\colon \mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B})^{op} \to \mathcal{S},$$

wie in Definition 7.4 und diese bilden die Kategorie $\mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X, \mathfrak{B})$. Eine $\mathfrak{B}$-Prägarbe heißt eine $\mathfrak{B}$-*Garbe*, wenn sie die zu Definition 7.8 analoge Bedingung erfüllt (also mit U_i und U in $\mathfrak{B}(X)$). Es sei $\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X, \mathfrak{B})$ die Kategorie der $\mathfrak{B}$-Garben mit Werten in $\mathcal{S}$. Der Funktor

$$\begin{array}{rccc}\phi_*\colon & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X, \mathfrak{B})\\ & \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(\phi(-))\end{array}$$

heißt die *Einschränkung* (von einer Prägarbe auf X zu einer $\mathfrak{B}$-Prägarbe). Da eine Prägarbe, welche die Garbeneigenschaft für alle offenen Mengen erfüllt, sie insbesondere auch für die speziellen offenen Mengen in $\mathfrak{B}$ erfüllt, schränkt dieser Funktor ein zu einem Funktor

$$\begin{array}{rccc}\phi_*\colon & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X, \mathfrak{B})\\ & \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(\phi(-))\end{array}$$

der die *Einschränkung* (von einer Garbe auf X zu einer $\mathfrak{B}$-Garbe) genannt und mit dem gleichen Symbol bezeichnet wird.

Satz 9.10 (Hauptsatz). *Sei A ein Ring und $X = \mathrm{Spec}(A)$. Dann ist die Einschränkung $\phi_*(\mathcal{O}_X^{pre})$ von $\mathcal{O}_X^{pre}$ ist eine $\mathfrak{B}$-Garbe.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\phi_*(\mathcal{O}_X^{pre})$ die Eindeutigkeitseigenschaft einer $\mathfrak{B}$-Garbe erfüllt. Sei dazu $\{D(s_i) \hookrightarrow D(s)\}$ eine $\mathfrak{B}$-Überdeckung und $\frac{a}{s^n} \in \mathcal{O}_X^{pre}(D(s)) \cong A[\frac{1}{s}]$. Da $D(s)$ nach Lemma 4.10 und Satz 4.12 quasikompakt ist, können wir eine endliche Indexmenge

annehmen. Angenommen für alle i gilt

$$\left(\frac{a}{s^n}\right)_{|D(s_i)} = \frac{as_i^n}{s^n s_i^n} = 0.$$

Mit anderen Worten gibt es für alle i ein $n_i \geq 0$ mit $as_i^{n_i} = 0$ in $A[\frac{1}{s}]$. Wir können annehmen, dass $n_i > 0$ für alle i, da sonst $a = 0$ in A gilt und wir fertig wären. Weil

$$\mathrm{Spec}(A) \setminus \mathcal{V}(s) = D(s) = \bigcup_i D(s_i) = \bigcup_i D(s_i^{n_i}) = \mathrm{Spec}(A) \setminus \mathcal{V}(\textstyle\sum_i (s_i^{n_i}))$$

folgt $\mathcal{V}(s) = \mathcal{V}(\sum_i (s_i^{n_i}))$ und nach der Ideale-Teilmengen Korrespondenz 5.2 gilt

$$s \in \sqrt{(s)} = \mathcal{I}\mathcal{V}(s) = \mathcal{I}\mathcal{V}(\textstyle\sum_i (s_i^n)) = \sqrt{\sum_i (s_i^{n_i})}.$$

Also gibt es ein $r > 0$ mit $s^r = \sum_i \lambda_i s_i^{n_i}$. Dann folgt aber $as^r = \sum_i \lambda_i a s_i^{n_i} = 0$ und damit ist $\frac{a}{s^n} = 0$ in $A[\frac{1}{s}]$.

Für die Verklebeeigenschaft sei $\{D(s_i) \hookrightarrow D(s)\}$ eine $\mathfrak{B}$-Überdeckung, die wir wegen der Quasikompaktheit von $D(s)$ wieder als endlich annehmen können, und für alle i ein Schnitt $\frac{a_i}{s_i^{n_i}} \in A[\frac{1}{s_i}]$ gegeben, sodass für alle Paare (i,j) gilt

$$\left(\frac{a_i}{s_i^{n_i}}\right)_{|D(s_i s_j)} = \left(\frac{a_j}{s_j^{n_j}}\right)_{|D(s_i s_j)}$$

gegeben. Dieses bedeutet, dass es für alle i und j ein $m_{ij} \geq 0$ gibt mit

$$(s_i s_j)^{m_{ij}}(a_i s_j^{n_j} - s_i^{n_i} a_j) = 0.$$

Wieder können wir annehmen, dass alle $m_{ij} > 0$ sind. Sei m eine natürliche Zahl, die größer ist als alle m_{ij}. Wie im Eindeutigkeitsteil des Beweises finden wir ein $r > 0$ mit $s^r = \sum_i \lambda_i s_i^{n_i+m}$. Wir setzen $a := \sum_i \lambda_i s_i^m a_i$ und behaupten, dass der Schnitt $\frac{a}{s^r} \in A[\frac{1}{s}]$ auf alle gegebenen Schnitte einschränkt, dass also für alle j

$$\left(\frac{a}{s^r}\right)_{|D(s_j)} = \frac{a_j}{s_j^{n_j}}$$

gilt. Dafür berechnen wir

$$\begin{aligned} s_j^m(as_j^{n_j} - s^r a_j) &= s_j^m\left(\left(\textstyle\sum_i \lambda_i s_i^m a_i\right) s_j^{n_j} - \left(\textstyle\sum_i \lambda_i s_i^{n_i+m}\right) a_j\right) \\ &= s_j^m\left(\textstyle\sum_i \lambda_i s_i^m (a_i s_j^{n_j} - s_i^{n_i} a_j)\right) \\ &= \textstyle\sum_i \lambda_i s_i^m s_j^m (a_i s_j^{n_j} - s_i^{n_i} a_j) \\ &= 0, \end{aligned}$$

womit wir die Behauptung gezeigt haben. □

Korollar 9.11. *Ist $s \in A$, so ist die kanonische Ringabbildung*

$$A[\tfrac{1}{s}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X^{pre}(D(s)) \cong \mathcal{O}_X(D(s))$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Es sind die basisoffenen Mengen $D(s)$ eine schnittstabile Basis $\mathfrak{B}$ der Zariskitopologie auf $X = \mathrm{Spec}(A)$. Wir wenden $\phi_* \colon \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \to \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X, \mathfrak{B})$ auf die Garbifizierungsabbildung $\mathcal{O}_X^{pre} \to \mathcal{O}_X$ an. Diese Abbildung

$$\phi_*(\mathcal{O}_X^{pre}) \to \phi_*(\mathcal{O}_X)$$

nach dem vorherigen Satz 9.10 eine Abbildung zwischen $\mathfrak{B}$-Garben und ein Isomorphismus auf Halmen, da dies für die Garbifizierungsabbildung nach Satz 7.20 gilt und also auch nach der Anwendung von ϕ_*, da man bei der Ausrechnung der Halme immer auch die basisoffenen Mengen in $\mathfrak{B}$ benutzen kann. Genauso wie in Lemma 7.16 zeigt man für $\mathfrak{B}$-Garben, dass eine Abbildung die ein Isomorphismus auf allen Halmen ist auch ein Isomorphismus von $\mathfrak{B}$-(Prä)Garben ist. Dann folgt die Behauptung mit Lemma 9.6. □

Korollar 9.12. *Es gilt* $\mathcal{O}_X(\mathrm{Spec}(A)) \cong A$.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem vorherigen Korollar 9.11, da $\mathrm{Spec}(A) = D(1)$ eine basisoffene Menge ist. □

Beispiel 9.13. Sei k ein Körper und $A := k[x, y]$. Betrachte die offene Menge

$$U := \mathrm{Spec}(A) \setminus \{(x, y)\} \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A).$$

Wir möchten $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ ausrechnen. Es ist $U = D(x) \cup D(y)$ und $D(x) \cap D(y) = D(xy)$. Die Garbenbedingung liefert

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) && \cong \\
&\{(f, g) \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(x)) \times \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(y)) \mid \tfrac{f}{1} = \tfrac{g}{1} \in k[x, y, \tfrac{1}{xy}]\} && \cong \\
&\{(f, g) \in k[x, y][\tfrac{1}{x}] \times k[x, y][\tfrac{1}{y}] \mid \tfrac{f}{1} = \tfrac{g}{1} \in k[x, y, \tfrac{1}{x}, \tfrac{1}{y}]\} && \cong \\
&\{(\tfrac{f'}{x^n}, \tfrac{g'}{y^m}) \in ... \mid f' \in k[x, y] \text{ kein Vielfaches von } x, g' \in k[x, y] \text{ kein Vielfaches von } y \\
&\qquad\qquad \tfrac{f'}{x^n} = \tfrac{g'}{y^m} \in k[x, y, \tfrac{1}{x}, \tfrac{1}{y}]\} && \cong \\
&\{(\tfrac{f'}{x^n}, \tfrac{g'}{y^m}) \in ... \mid f' \in k[x, y] \text{ kein Vielfaches von } x, g' \in k[x, y] \text{ kein Vielfaches von } y \\
&\qquad\qquad f'y^m = g'x^n \in k[x, y, \tfrac{1}{x}, \tfrac{1}{y}]\} && \cong \\
&\{(\tfrac{f'}{1}, \tfrac{g'}{1}) \in ... \quad \mid f' \in k[x, y] \text{ kein Vielfaches von } x, g' \in k[x, y] \text{ kein Vielfaches von } y \\
&\qquad\qquad f' = g' \in k[x, y, \tfrac{1}{x}, \tfrac{1}{y}]\},
\end{aligned}$$

was insbesondere bedeutet, dass $f' = g' \in k[x, y]$. Betrachte nun das kommutative Dreieck

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(A) & \xrightarrow{(-)|_U} & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) \\
& \searrow & \downarrow \\
& & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(x)) \times \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(y))
\end{array}$$

wobei die diagonale Abbildung injektiv ist, da x und y keine Nullteiler in A sind und wir die Identifikation aus Korollar 9.11 benutzen. Es ist also die Einschränkungsabbildung $(-)|_U$ injektiv. Sie ist aber auch nach der obigen Berechnung surjektiv und daher ein Isomorphismus. Es folgt $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) \cong A$.

Bemerkung 9.14. Korollar 9.12 erfüllt uns den Wunsch (1) vom Anfang des Kapitels: Wir können den Ring A aus dem affinen Schema $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ rekonstruieren. Für den Wunsch (2) werden wir uns im nächsten Kapitel mit Abbildungen zwischen solchen geringten Räumen beschäftigen. Es wird sich herausstellen, dass es „zu viele“ Abbildungen geringter Räume zwischen affinen Schemata gibt und wir uns auf eine geeignete Unterkategorie einschränken müssen.

Wir notieren noch den folgenden Satz, der eine alternative Konstruktion der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ auf $X = \mathrm{Spec}(A)$ ermöglicht und besagt, dass es genügt, Garben und Morphismen zwischen diesen auf einer schnittstabilen Basis anzugeben.

Satz 9.15. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{B}$ eine schnittstabile Basis. Für eine $\mathfrak{B}$-Garbe $\mathcal{F}'$ gibt es eine (bis auf eindeutige Isomorphie) eindeutige Garbe $\mathcal{F}$ auf X, dessen Einschränkung zu einer $\mathfrak{B}$-Garbe wieder $\mathcal{F}'$ ist, also für die $\phi_*(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}'$ gilt. Darüber hinaus ist $\phi_*\colon \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) \cong \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X, \mathfrak{B})$ eine Äquivalenz von Kategorien (siehe Bemerkung 6.9).*

Beweis. Zur besseren Übersicht betrachte man das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B})^{op} & \xhookrightarrow{\phi} & \mathbf{Ouv}(X)^{op} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}'} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}} \\
\mathcal{S} & = & \mathcal{S}.
\end{array}$$

Um zunächst eine Prägarbe $\mathcal{F}^{pre}\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ und anschließend die gesuchte Garbe $\mathcal{F}$ als deren Garbifizierung zu definieren, benutzen wir das inverse Bild: In dessen Definition 8.5

kann man die Indexketegorie im Kolimes mit $f(U) \subseteq V \Leftrightarrow U \subseteq f^{-1}(V)$ umschreiben. Es entspricht hier f^{-1} gerade ϕ, wie in Definition 8.2. Analog setzen wir hier

$$\mathcal{F}^{pre}(U) := \operatorname*{colim}_{U \subseteq U' \in \mathbf{Ouv}(X,\mathfrak{B})^{op}} \mathcal{F}'(U') := \bigsqcup_{\substack{U' \in \mathbf{Ouv}(X,\mathfrak{B}) \\ U \subseteq U'}} \mathcal{F}'(U')/_\sim,$$

wobei $(s', U') \sim (t', V')$ genau dann, wenn ein $W' \in \mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ mit $W' \subseteq U' \cap V'$ um U existiert mit $s'_{|W'} = t'_{|W'}$.

Man bemerke, dass $\mathcal{F}^{pre}(U)$ das initiale Objekt von $\mathcal{S}$ ist (also $\emptyset$ im Fall der Mengen, $\{0\}$ im Fall der abelschen Gruppen und $\mathbb{Z}$ im Fall der Ringe), wenn U in keinem $U' \in \mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ enthalten ist. Es wird $\mathcal{F}^{pre}$ zu einer Prägarbe auf X durch die Einschränkungsabbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{pre}(V) & \to & \mathcal{F}^{pre}(U) \\ [s', U'] & \mapsto & [s', U'] \end{array}$$

für in X offene Teilmengen $U \subseteq V$. Dafür muss man beobachten, dass wenn $V \subseteq U'$ gilt auch folgt, dass $U \subseteq U'$ und $\mathcal{F}^{pre}(U)$ in diesem Fall nicht das initiale Objekt von $\mathcal{S}$ sein kann. Ist $\mathcal{F}^{pre}(V)$ das initiale Objekt von $\mathcal{S}$ so gibt es sowieso nur einen Morphismus in jedes andere $\mathcal{S}$ Objekt.

Nun bemerken wir, dass $\mathcal{F}' \cong \phi_*(\mathcal{F}^{pre})$ gilt. Es gibt sicherlich für $U' \in \mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ eine natürliche Abbildung $\mathcal{F}'(U') \to \mathcal{F}^{pre}(U')$ und diese ist auch ein Isomorphismus, da man $W' = U'$ wählen kann (Mit anderen Worten hat die Indexkategorie des Kolimes das terminales Objekt U').

Wir definieren nun $\mathcal{F} := a\mathcal{F}^{pre}$ als die Garbifizierung. Um zu zeigen, dass $\mathcal{F}' \cong \phi_*(\mathcal{F})$ genügt es nach unserer obigen Identifikation zu zeigen, dass $\phi_*(\mathcal{F}^{pre}) \cong \phi_*(\mathcal{F})$. Sei dafür $U' \in \mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ und wir betrachten die Abbildung $\mathcal{F}^{pre}(U') \to \mathcal{F}(U')$. Für die Injektivität seien $s, t \in \mathcal{F}^{pre}(U')$ zwei Schnitte, die auf das gleiche Element in der Garbifizierung $\mathcal{F}(U')$ abgebildet werden. Es gibt also eine Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow U'\}$ mit $s_{|U_i} = t_{|U_i}$ für alle i. Da $\mathfrak{B}$ eine Basis der Topologie auf X ist, können wir diese Überdeckung zu einer Überdeckung $\{U'_i \hookrightarrow U'\}$ mit $U'_i \in \mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ verfeinern. Nun benutzen wir die Eindeutigkeitseigenschaft der Garbenbedingung von $\mathcal{F}'$ (denn $\mathcal{F}' \cong \phi_*(\mathcal{F}^{pre})$) und erhalten $s = t$.

Für die Surjektivität von $\mathcal{F}'(U') \cong \mathcal{F}^{pre}(U') \to \mathcal{F}(U') = a\mathcal{F}^{pre}(U')$ benutzen wir die Definition der Garbifizierung aus Lemma 7.18. Sei also $(s_x)_{x \in U'}$ ein Element von $a\mathcal{F}^{pre}(U')$, also eine Familie ausdehnbarer Keime. Da wieder $\mathfrak{B}$ eine Basis der Topologie auf X ist, können wir die offenen Mengen W in der Definition der Ausdehnbarkeit aus $\mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ wählen und der Konsistenz halber mit W' bezeichnen. Es gibt also für jedes $x \in U'$ ein W'_x und einen Schnitt $c' \in \mathcal{F}'(W'_x)$ mit Keimen $c'_z = s_z$ für alle $z \in W'_x$. Ist $d' \in \mathcal{F}'(W'_y)$ mit $d'_z = s_z$ für alle $z \in W_y$, so stimmen c' und d' auf dem Schnitt $W'_x \cap W'_y$ überein (siehe den Beweis der Injektivität in Lemma 7.14) und da $\mathcal{F}'$ eine $\mathfrak{B}$-Garbe ist, verkleben alle diese zu einem Schnitt $s \in \mathcal{F}'(U')$ mit dem gewünschten Bild.

Für die Eindeutigkeit sei $\mathcal{G}$ eine weitere Garbe auf X mit $\varphi\colon \mathcal{F}' \cong \phi_*(\mathcal{G})$. Wir definieren eine Abbildung von Prägarben auf X durch

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{pre}(U) & \to & \mathcal{G}(U) \\ [s', U'] & \mapsto & \varphi(U')(s')_{|U} \end{array}$$

wobei wieder zu beachten ist, dass $\mathcal{F}^{pre}(U)$ manchmal das initiale Objekt von $\mathcal{S}$ sein kann. Diese induziert durch die universelle Eigenschaft eine Abbildung $\mathcal{F} = a\mathcal{F}^{pre} \to \mathcal{G}$ von Garben auf X, von der wir nach Lemma 7.16 nur zeigen müssen, dass sie ein Isomorphismus auf Halmen ist. Dies ist aber klar, da die Einschränkungen beider Seiten auf $\mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ isomorph sind und man für die Ausrechnung der Halme beliebig kleine Umgebungen (also auch aus $\mathfrak{B}$) wählen kann.

Es ist eine leichte Übung zu zeigen, dass der Funktor ϕ_* voll und treu ist und somit eine Äquivalenz von Kategorien. □

10. Lokalgeringte Räume

In diesem Kapitel möchten wir definieren, was der geeignete Begriff einer Abbildung

$$(\operatorname{Spec}(B), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}) \to (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$$

zwischen den zu Ringen B und A gehörigen affinen Schemata ist. Es liegt nahe, das eine solche Abbildung insbesondere eine Abbildung von geringten Räumen sein sollte, also ein Paar $(f, f^\sharp)$ wie in Definition 8.11. Die zu Ringen gehörigen affinen Schemata sollen Objekte einer Kategorie $\mathcal{C}$ sein und der Abbildungsbegriff genau der Morphismenbegriff in dieser Kategorie. Es soll also $\mathcal{C}$ eine geeignete Unterkategorie der Kategorie **RS** der geringten Räume sein. Wir schreiben kurzzeitig genauer $|\operatorname{Spec}(A)|$ für den topologischen Raum, verwirrenderweise $\operatorname{Spec}(A)$ für den geringten Raum $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$ und führen analoge Bezeichnungen für B ein. Sicherlich sollte es Funktoren

$$\mathbf{Ring}^{op} \xrightarrow{\operatorname{Spec}(-)} \mathcal{C} \xrightarrow{|-|} \mathbf{Top}$$

geben, deren Komposition unser bekanntes $\operatorname{Spec}(-)$ aus Lemma 4.9 ist. Diese Funktoren induzieren auf Hom-Mengen (siehe Bemerkung 4.8) das folgende Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\operatorname{Spec}}{\nearrow} & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{Spec}(B), \operatorname{Spec}(A)) \\ & & \downarrow{\scriptstyle |-|} \\ \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, B) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\operatorname{Spec}(B)|, |\operatorname{Spec}(A)|) \end{array} \tag{10.1}$$

Es ist wünschenswert, die Kategorie $\mathcal{C}$ so zu konstruieren, dass der Funktor $\operatorname{Spec}(-)$ volltreu wird (siehe Bemerkung 6.9), also die diagonale Abbildung in (10.1) eine Bijektion. Dieses bedeutet, dass es nicht mehr $\mathcal{C}$-Abbildungen zwischen $\operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ geben sollte, als die, die von einer Ringabbildung $A \to B$ herkommen und die $\mathcal{C}$-Abbildung sollte die Ringabbildung eindeutig festlegen.

Bemerkung 10.2. Die obige Völle und Treue implizierte insbesondere für den Polynomring $A = \mathbb{Z}[x]$ in einer Variablen, dass mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\operatorname{Spec}}{\nearrow}_{\cong} & \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{Spec}(B), \mathbb{A}^1) \\ & & \downarrow{\scriptstyle |-|} \\ B \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[x], B) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}_{\mathbf{Top}}(|\operatorname{Spec}(B)|, |\mathbb{A}^1|), \end{array}$$

der Ring B genau den $\mathcal{C}$-Abbildungen $\operatorname{Spec}(B) \to \mathbb{A}^1$ entspräche.

Zunächst möchten wir allerdings erst einmal den oben als „Spec“ bezeichneten Funktor $\mathbf{Ring}^{op} \to \mathbf{RS}$ konstruieren, der einen Ring A auf das zu A gehörige affine Schema, also den geringten Raum $(\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$, schickt. Dazu müssen wir nur noch angeben, was der Funktor mit Morphismen macht, wir müssen also definieren, wie man einer Ringabbildung $\varphi\colon A \to B$ einen Morphismus $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\sharp)\colon (\operatorname{Spec}(B), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}) \to (\operatorname{Spec}(A), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$ geringter Räume zuordnet. Sicherlich ist die erste Komponente die stetige Abbildung $\tilde{\varphi}$ aus Lemma 4.9. Die zweite Komponente soll ein Morphismus

$$\tilde{\varphi}^\sharp\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)} \to \tilde{\varphi}_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}(\tilde{\varphi}^{-1}(-))$$

von Garben von Ringen sein. Für eine basisoffene Menge $D(s) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ gilt mit Lemma 4.9 $\tilde{\varphi}^{-1}(D(s)) = D(\varphi(s))$ und die gesuchte Ringabbildung ist eine Abbildung

$$A[\tfrac{1}{s}] = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(D(s)) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}(D(\varphi(s))) = B[\tfrac{1}{\varphi(s)}],$$

welche wir auf natürliche Weise durch $\frac{a}{s^n} \mapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)^n}$ definieren könnten. Diese Definition würde mit Beispiel 8.12 zusammenpassen: Im Wesentlichen wäre $\tilde{\varphi}^\sharp(D(s))$ mit Blick auf die Motivation am Anfang von Kapitel 10, und insbesondere auf Diagramm (9.1), die Präkomposition $h \mapsto \tilde{\varphi}^* h$.

$$\begin{array}{ccccc} D(\varphi(s)) = \tilde{\varphi}^{-1}(D(s)) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}|\dots} & D(s) & \xrightarrow{h} & \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)} k(\mathfrak{p}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \operatorname{Spec}(B) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \operatorname{Spec}(A) & & \end{array}$$

Um diese Idee zu präzisieren, definieren wir, wie bei der Strukturgarbe, den Morphismus $\tilde{\varphi}^\sharp$ von Garben wieder als Garbifizierung eines Morphismus von Prägarben, der auf eine offensichtliche Weise gegeben ist, und zeigen dann, dass die Garbifizierung „auf basisoffenen Mengen nichts ändert“.

Lemma 10.3. *Sei $\varphi\colon A \to B$ eine Abbildung von Ringen mit zugehöriger Abbildung topologischer Räume $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$. Dann ist die Zuordnung*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}^{\sharp,pre}(U)\colon & \mathcal{O}^{pre}_{\operatorname{Spec}(A)}(U) & \to & \tilde{\varphi}_*\mathcal{O}^{pre}_{\operatorname{Spec}(B)}(U) \\ & \| & & \| \\ & S_U^{-1}A & \to & S^{-1}_{\tilde{\varphi}^{-1}(U)}B \\ & \frac{a}{s} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)} \end{array}$$

für $U \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ offen wohldefiniert und definiert eine Abbildung von Prägarben auf $\operatorname{Spec}(A)$.

Beweis. Um die Wohldefiniertheit zu zeigen, sei $s \in S_U$. Dieses bedeutet, dass $s \notin \mathfrak{p}$ gilt für alle $\mathfrak{p} \in U$. Wir müssen zeigen, dass $\varphi(s) \in S_{\tilde{\varphi}^{-1}(U)}$, also dass $\varphi(s) \notin \mathfrak{q}$ für alle $\mathfrak{q} \in \tilde{\varphi}^{-1}(U)$. Angenommen das Gegenteil ist der Fall und es gibt ein $\mathfrak{q} \in \tilde{\varphi}^{-1}(U)$ mit $\varphi(s) \in \mathfrak{q}$. Dann $\mathfrak{p} := \tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) \in \tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}^{-1}(U)) \subseteq U$, also $s \notin \mathfrak{p}$ nach Voraussetzung. Aus $\varphi(s) \in \mathfrak{q}$ folgt nun $s \in \varphi^{-1}\varphi(s) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, was ein Widerspruch ist. □

Definition 10.4. Für eine Abbildung $\varphi\colon A \to B$ von Ringen mit zugehöriger Abbildung topologischer Räume $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ definieren wir

$$\tilde{\varphi}^\sharp\colon \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)} = a\mathcal{O}^{pre}_{\operatorname{Spec}(A)} \xrightarrow{a\tilde{\varphi}^{\sharp,pre}} a\tilde{\varphi}_*\mathcal{O}^{pre}_{\operatorname{Spec}(B)} \to \tilde{\varphi}_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}, \tag{10.5}$$

wobei die letzte Abbildung gegeben ist durch die universelle Eigenschaft der Garbifizierung aus Satz 7.20 angewandt auf die Abbildung $\tilde{\varphi}_*\mathcal{O}^{pre}_{\operatorname{Spec}(B)} \to \tilde{\varphi}_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}$, dessen Ziel nach Lemma 8.3 eine Garbe ist.

Lemma 10.6. *Der Morphismus $\tilde{\varphi}^\sharp$ von Prägarben auf* $\operatorname{Spec}(A)$ *ist auf einer basisoffenen Menge $D(s) \subseteq A$ durch*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\varphi}^\sharp(D(s))\colon & (\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})(D(s)) & \to & (\tilde{\varphi}_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)})(D(s)) \\ & \| & & \| \\ & A[\frac{1}{s}] & & B[\frac{1}{\varphi(s)}] \\ & \frac{a}{s^n} & \mapsto & \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)^n} \end{array}$$

gegeben.

Beweis. Zur Erinnerung ist hier $\varphi\colon A \to B$ und $\tilde{\varphi}\colon X = \operatorname{Spec}(B) \to Y = \operatorname{Spec}(A)$. Es gibt ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ouv}(Y, \mathfrak{B}_Y) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}^{-1}_{\mathfrak{B}}} & \mathbf{Ouv}(X, \mathfrak{B}_X) \\ {\scriptstyle \phi_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_X} \\ \mathbf{Ouv}(Y) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}^{-1}} & \mathbf{Ouv}(X) \end{array}$$

da $\tilde{\varphi}^{-1}(D(s)) = \tilde{\varphi}^{-1}(D(s)) = D(\varphi(s))$. Dieses Diagramm induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PSh}(X) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_*} & \mathbf{PSh}(Y) \\ {\scriptstyle \phi_{X,*}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{Y,*}} \\ \mathbf{PSh}(X, \mathfrak{B}_X) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}_{\mathfrak{B},*}} & \mathbf{PSh}(Y, \mathfrak{B}_Y) \end{array}$$

welches auch auf Garben einschränkt. Um das Gewünschte zu zeigen, wenden wir den Funktor $\phi_{Y,*}$ auf (10.5) an, denn $\tilde{\varphi}^\sharp(D(s)) = (\phi_{Y,*}\tilde{\varphi}^\sharp)(D(s))$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
\phi_{Y,*}\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(A)} & \xrightarrow{\phi_{Y,*}\tilde{\varphi}^{\sharp,pre}} & \phi_{Y,*}\tilde{\varphi}_*\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)} & = & \phi_{Y,*}\tilde{\varphi}_*\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)} & = & \tilde{\varphi}_{\mathfrak{B},*}\phi_{X,*}\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)} \\
\cong\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\cong \\
\phi_{Y,*}a\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(A)} & \longrightarrow & \phi_{Y,*}a\tilde{\varphi}_*\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)} & \longrightarrow & \phi_{Y,*}\tilde{\varphi}_*a\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)} & = & \tilde{\varphi}_{\mathfrak{B},*}\phi_{X,*}a\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)}
\end{array}$$

dessen untere horizontale Abbildung gerade $\phi_{Y,*}\tilde{\varphi}^\sharp$ ist. Mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Korollar 9.11 folgt, dass die beiden äußeren vertikalen Abbildungen Isomorphismen sind und damit ist die Behauptung gezeigt. □

Korollar 10.7. *Es ist $\tilde{\varphi}^\sharp(\mathrm{Spec}(A))$ genau die Abbildung $\varphi\colon A \to B$ von Ringen.*

Beweis. Dies folgt direkt aus dem vorherigen Lemma 10.6 mit $\mathrm{Spec}(A) = D(1)$. □

Definition 10.8. Die Zuordnung

$$\begin{array}{rccll}
\mathrm{Spec}\colon & \mathbf{Ring}^{op} & \to & \mathbf{RS} & \\
& A & \mapsto & (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) & \\
& \varphi\colon A \to B & \mapsto & (\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\sharp) & \text{(siehe Definition 10.4)}
\end{array}$$

ist ein Funktor und wird verwirrenderweise ebenfalls mit „Spec“ bezeichnet.

Wir hätten gerne, dass die (opposite) Kategorie der Ringe äquivalent ist zu der durch die affinen Schemata gegebenen Unterkategorie von **RS**. Es ist aber leider nicht richtig, dass jeder Morphismus

$$(f, f^\sharp)\colon (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$$

in **RS** auf die obige Weise durch einen Morphismus $\varphi\colon A \to B$ von Ringen induziert ist, wie das folgende Beispiel 10.9 zeigt.

Beispiel 10.9. Sei k ein Körper. Wir betrachten den lokalen Ring $A := k[x]_{(x)}$. Für diesen gilt $\mathrm{Spec}(A) = \{(0), (x)\}$. Sei $F := \mathrm{Quot}(A)$ der Quotientenkörper. Wir möchten eine Abbildung

$$(f, f^\sharp)\colon (\mathrm{Spec}(F), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(F)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$$

in **RS** definieren. Wir setzen dafür $f(*) := (x)$ und definieren

$$\begin{array}{rccccccl}
f^\sharp(\emptyset)\colon & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\emptyset) & \cong & 0 & \to & 0 & \cong & f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(F)}(\emptyset) \\
f^\sharp(\{(0)\})\colon & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\{(0)\}) & \cong & F & \to & 0 & \cong & f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(F)}(\{(0)\}) \\
f^\sharp(\mathrm{Spec}(A))\colon & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) & \cong & A & \hookrightarrow & F & \cong & f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(F)}(\mathrm{Spec}(A))
\end{array}$$

denn $\emptyset$, $\{(0)\}$ und $\mathrm{Spec}(A)$ sind die einzigen offenen Mengen von $\mathrm{Spec}(A)$. Dieses definiert offensichtlich einen Morphismus von Prägarben, es ist also $(f, f^\sharp)$ ein Morphismus geringter Räume. Falls dieser von einer Ringabbildung $\varphi\colon A \to F$ käme, wäre dies nach Korollar 10.7 gerade die Inklusion $\varphi\colon A \hookrightarrow F$. Dann ist das Urbild des maximalen Ideals von F aber gerade $(0) \subseteq A$ und nicht (x). Also kann $(f, f^\sharp)$ nicht von einer Ringabbildung herkommen.

Ist $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus mit induziertem $\tilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ und $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$, so gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
A & \longrightarrow & A_{\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})} \\
\varphi\downarrow & & \downarrow\varphi_{\mathfrak{q}} \\
B & \longrightarrow & B_{\mathfrak{q}}
\end{array} \tag{10.10}$$

denn φ bildet $A \setminus \tilde{\varphi}(\mathfrak{q})$ nach $B \setminus \mathfrak{q}$ ab, denn ist $\varphi(a) \in \mathfrak{q}$, so folgt $a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \tilde{\varphi}(\mathfrak{q})$. Ringhomomorphismen $\varphi'\colon A' \to B'$ zwischen lokalen Ringen mit dieser speziellen Eingenschaft haben einen besonderen Namen, der in der folgenden Definition 10.12 betrachtet wird. Zuvor stellen wir noch die wichtige Tatsache fest, dass das obige Diagramm (10.10) einen (notwendigerweise injektiven) Ringhomomorphismus $k(\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})) \hookrightarrow k(\mathfrak{q})$ zwischen Restklassenkörpern induziert und daher für ein Element $a \in A$ gilt

$$a(\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})) = 0 \iff \varphi(a)(\mathfrak{q}) = 0. \tag{10.11}$$

Definition 10.12. Ein Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ zwischen lokalen Ringen $(A, \mathfrak{m}_A)$ und $(B, \mathfrak{m}_B)$ heißt *lokal*, falls $\varphi(\mathfrak{m}_A) \subseteq \mathfrak{m}_B$.

Bemerkung 10.13. Die Bedingung in der vorherigen Definition 10.12 ist äquivalent zu der Bedingung $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$.

Bemerkung 10.14. Ist $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung geringter Räume und $x \in X$ ein Punkt, so induzieren die Abbildungen $f^\sharp(V)\colon \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ für alle offenen Umgebungen V von $f(x)$ einen Morphismus

$$f_x^\sharp\colon (\mathcal{O}_Y)_{f(x)} \to (\mathcal{O}_X)_x$$

von Ringen durch Definition 7.13, denn ist $f(x) \in V$, so ist $x \in f^{-1}(V)$ und $f^{-1}(V) \subseteq X$ ist offen.

Definition 10.15. Ein *lokalgeringter Raum* ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, sodass für alle $x \in X$ der Halm $(\mathcal{O}_X)_x$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_x$ ist.

Ein *Morphismus* $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen zwei lokalgeringten Räumen ist ein Morphismus zwischen geringten Räumen, sodass für alle $x \in X$ die in Bemerkung 10.14 beschriebene Ringabbildung

$$f_x^\sharp\colon (\mathcal{O}_Y)_{f(x)} \to (\mathcal{O}_X)_x$$

lokal ist, also $f_x^\sharp(\mathfrak{m}_{f(x)}) \subseteq \mathfrak{m}_x$ gilt. Die lokalgeringten Räume bilden zusammen mit ihren Morphismen eine Kategorie, die mit **LRS** bezeichnet wird.

Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalgeringter Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, $x \in U$ sowie $f \in \mathcal{O}_X(U)$, so heißt die Restklasse des Keims $f(x) := \bar{f}_x \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k(x)$ die *Auswertung* von f an x.

Beispiel 10.16. Wir haben in Beispiel 8.12 gesehen, dass $(X, \mathcal{C}_X(-, \mathbb{R}))$ ein geringter Raum ist und einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ eine Abbildung geringer Räume zugeordnet, wobei $f^\sharp$ durch Präkomposition mit f gegeben war. Ist $V \subseteq Y$ eine offene Menge und $x \in f^{-1}(V)$ so gilt für eine stetige Abbildung $s\colon V \to \mathbb{R}$, dass

$$f^\sharp(V)(s)(x) \;=\; (f^* s)(x) \;=\; s(f(x)).$$

Wir haben in den Übungen gesehen, dass gilt $\mathfrak{m}_{f(x)} = \{s \in \mathcal{C}_Y(Y, \mathbb{R}) \mid s(f(x)) = 0\}$ und $\mathfrak{m}_x = \{t \in \mathcal{C}_X(X, \mathbb{R}) \mid t(s) = 0\}$. Die obige Gleichheit impliziert, dass aus $s \in \mathfrak{m}_{f(x)}$ folgt, dass $f^\sharp(V)(s) \in \mathfrak{m}_x$. Also ist $(X, \mathcal{C}_X(-, \mathbb{R}))$ ein lokalgeringter Raum und eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ induziert eine Abbildung lokalgeringter Räume.

Lemma 10.17. *Der Funktor* $\mathrm{Spec}\colon \mathbf{Ring}^{op} \to \mathbf{RS}$ *aus Definition 10.8 hat Werte in der Kategorie* **LRS** *der lokalgeringten Räume und der Funktor*

$$\mathrm{Spec}\colon \mathbf{Ring}^{op} \to \mathbf{LRS}$$

*wird ebenso mit „*Spec*“ bezeichnet.*

Beweis. Wir wissen aus Lemma 9.5 und Satz 7.20, dass für alle $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ der Halm $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\mathfrak{p}} \cong A_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring ist.

Sei $\varphi\colon A \to B$ eine Ringabbildung. Wir müssen zeigen, dass die induzierte Abbildung $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^\sharp)\colon (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ geringter Räume aus Definition 10.8 tatsächlich eine Abbildung lokalgeringter Räume ist. Sei $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$. Wir müssen zeigen, dass die Ringabbildung

$$\tilde{\varphi}_\mathfrak{q}^\sharp\colon \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A),\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B),\mathfrak{q}}$$

lokal ist, also dass $\tilde{\varphi}_\mathfrak{q}^\sharp(\mathfrak{m}_{\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})}) \subseteq \mathfrak{m}_\mathfrak{q}$ gilt. Diese Abbildung $\tilde{\varphi}_\mathfrak{q}^\sharp$ ist aber wegen Lemma 10.3 und Lemma 9.5 gerade die Abbildung $\tilde{\varphi}_\mathfrak{q}\colon A_{\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})} \to B_\mathfrak{q}$ aus (10.10), wo wir bereits begründet haben, dass dieses eine lokale Ringabbildung ist. □

Lemma 10.18. *Sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein lokalgeringter Raum und* $s \in \mathcal{O}_X(X)$*. Dann ist die Teilmenge*

$$\begin{aligned} D_X(s) &:= \{x \in X \mid s(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in X \mid s_x \notin \mathfrak{m}_x\} \\ &= \{x \in X \mid s_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\} \end{aligned}$$

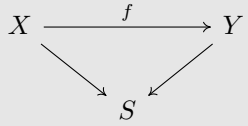
von X, die oft auch nur mit $D(s)$ bezeichnet wird, offen und die Einschränkung $s|_{D_X(s)}$ ist invertierbar. (Für einen Ring A und $X = \mathrm{Spec}(A)$ entspricht $D(s)$ natürlich genau der Teilmenge aus Definition 4.3.)

Beweis. Um zu zeigen, dass $D(s)$ offen ist, zeigen wir, dass es zu jedem $x \in D(s)$ eine offene Umgebung $x \in U_x \subseteq D(s)$ enthält. Die Bedingung $s_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$ bedeutet, dass der Keim s_x invertierbar ist. Also gibt es schon eine offene Umgebung U_x um x sodass $s|_{U_x} \in \mathcal{O}_X(U_x)$ ein Inverses t_{U_x} hat. Da dann auch s_y invertierbar ist für alle $y \in U_x$, gilt $U_x \subseteq D(s)$.

Es ist $\{U_x \hookrightarrow D(s)\}_{x \in D(s)}$ eine offene Überdeckung. Die Familie $t_{U_x} \in \mathcal{O}_X(U_x)$ ist sicherlich kompatibel auf Schnitten $U_x \cap U_{x'}$ und lässt sich also mit der Garbeneigenschaft von $\mathcal{O}_X$ zu einem Element $t \in \mathcal{O}_X(D(s))$ mit $t_{|U_x} = t_{U_x}$ verkleben. Es gilt also $(st)_{|U_x} = 1_{|U_x}$ für alle $x \in D(s)$ und daher mit der Eindeutigkeitseigenschaft auch $s_{|D(s)}t = 1$ in $\mathcal{O}_X(D(s))$. Also ist $s|_{D(s)}$ invertierbar. □

Definition 10.19. Ein lokalgeringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ein *affines Schema*, wenn er isomorph ist zu einem lokalgeringten Raum der Form $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$. Morphismen zwischen affinen Schemata sind Morphismen der zugehörigen lokalgeringten Räume. Es bezeichne **Aff** die Kategorie der affinen Schemata.

Ist S ein affines Schema, so ist die Kategorie $\mathbf{Aff}/S$ der *affinen Schemata über S* gegeben als die Überkategorie $\mathbf{Aff}/S := \mathbf{Aff}{\downarrow}S$. Mit anderen Worten sind die Objekte von $\mathbf{Aff}/S$ gegeben durch Morphismen $X \to S$ in **Aff**, die *Strukturmorphismen* genannt werden, und Morphismen f durch kommutative Dreiecke



wobei f ein Morphismus in **Aff** ist.

Satz 10.20. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalgeringter Raum und A ein Ring. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & \mathrm{Hom}_{\mathbf{LRS}}((X,\mathcal{O}_X),(\mathrm{Spec}(A),\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,\mathcal{O}_X(X)) \\ & (f,f^\sharp) & \mapsto & f^\sharp(\mathrm{Spec}(A)) \end{array}$$

oder mit anderen Worten eine Adjunktion

$$\Gamma : \mathbf{LRS} \rightleftarrows \mathbf{Ring}^{op} : \mathrm{Spec}$$

wobei $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) := \mathcal{O}_X(X)$ den Funktor der globalen Schnitte *bezeichne. Außerdem ist die Koeinheit $\Gamma\,\mathrm{Spec} \to \mathrm{id}$ der obigen Adjunktion ein Isomorphismus und damit $\mathbf{Ring}^{op}$ eine reflexive Unterkategorie von* **LRS** *(siehe Bemerkung 7.21).*

Beweis. Es ist klar, dass ϕ eine natürliche Abbildung zwischen den angegebenen Abbildungsmengen ist. Um die Bijektivität zu zeigen, möchten wir eine Umkehrabbildung dazu konstruieren. Sei also $\varphi\colon A \to \mathcal{O}_X(X)$ eine Ringabbildung.

Wir definieren zunächst $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$. Zu einem Punkt $x \in X$ gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$. Sei $f(x)$ das Urbild von $\mathfrak{m}_x$ unter der Ringabbildung

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_{X,x}.$$

Es ist f stetig, denn

$$\begin{aligned} f^{-1}(D(s)) &= f^{-1}(\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid s \notin \mathfrak{p}\}) \\ &= \{x \in X \mid f(x) \in \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid s \notin \mathfrak{p}\}\} \\ &= \{x \in X \mid s \notin f(x)\} \\ &= \{x \in X \mid s \notin (\pi\varphi)^{-1}(\mathfrak{m}_x)\} \\ &= \{x \in X \mid \pi\varphi(s) \notin \mathfrak{m}_x\} \\ &= \{x \in X \mid \varphi(s)(x) \neq 0\} \\ &= D(\varphi(s)) \end{aligned}$$

für alle $s \in A$ und diese Menge ist offen in X nach dem vorherigen Lemma 10.18.

Nun möchten wir einen Morphismus $f^\sharp\colon \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \to f_*\mathcal{O}_X$ definieren. Nach Satz 9.15 genügt es, dies auf den basisoffenen Mengen $D(s)$ für $s \in A$ kompatibel mit den Einschränkungen zu tun. Sei also $s \in A$. Durch die Identifikation aus Lemma 9.6 müssen wir also eine Ringabbildung

$$f^\sharp(D(s))\colon A[\tfrac{1}{s}] \to \mathcal{O}_X(D(\varphi(s)))$$

definieren. Durch die universelle Eigenschaft der Lokalisierung existiert der hervorgehobene Pfeil in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & \mathcal{O}_X(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[\frac{1}{s}] & \xrightarrow{f^\sharp(D(s))} & \mathcal{O}_X(D(\varphi(s))), \end{array} \tag{10.21}$$

denn es ist $\varphi(s)$ in $\mathcal{O}_X(D(\varphi(s)))$ invertierbar nach Lemma 10.18. Diese Zuordung ϕ' ist kompatibel mit den Einschränkungen und definiert ein offenbar Rechtsinverses zu ϕ.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\phi'\phi = \mathrm{id}$. Sei also $(f, f^\sharp)$ ein Element der linken Menge $\mathrm{Hom}_{\mathbf{LRS}}((X, \mathcal{O}_X), (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}))$. Betrachten wir $f\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$, so gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O}_X(X) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ A_{f(x)} & \xrightarrow{f_x^\sharp} & \mathcal{O}_{X,x} \qquad\qquad \ni \mathfrak{m}_x \end{array}$$

und weil die Ringabbildung $f_x^\sharp$ nach Voraussetzung ein lokaler Ringhomomorphismus ist, gilt mit Bemerkung 10.13 gerade $(f_x^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = f(x)A_{f(x)}$. Daher ist $f(x)$ das Urbild von $\mathfrak{m}_x$ unter $\pi\varphi$.

Für den Morphismus $f^\sharp\colon \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \to f_*\mathcal{O}_X$ gibt es für jedes $s \in A$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) & \xrightarrow{\qquad f^\sharp(\mathrm{Spec}(A))\qquad} & \mathcal{O}_X(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A[\frac{1}{s}] \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(s)) & \xrightarrow{f^\sharp(D(s))} & \mathcal{O}_X(f^{-1}(D(s))) \cong \mathcal{O}_X(D(\varphi(s))) \end{array}$$

und durch die Eindeutigkeitseigenschaft in (10.21) bekommt man das Gewünschte.

Die Behauptung über die Koeinheit folgt mit Korollar 9.12, durch das wir eine natürlichen Isomorphismus $\Gamma\,\mathrm{Spec}(A) \cong A$ für alle Ringe A bekommen. □

Korollar 10.22. *Der lokalgeringte Raum* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ *ist ein finales Objekt in der Kategorie* **LRS**. *Mit anderen Worten gibt es also einen eindeutigen Morphismus von einem beliebigen lokalgeringten Raum* $(X, \mathcal{O}_X)$ *nach* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Beweis. Dieses folgt mit der Bijektion der Abbildungsmengen aus Satz 10.20 und der Tatsache, dass es für jeden Ring, wie zum Beispiel $\mathcal{O}_X(X)$, genau einen Morphismus von Ringen von $\mathbb{Z}$ in diesen Ring gibt. □

Korollar 10.23. *Die Zuordnung aus Satz 10.20 schränkt ein zu einer Äquivalenz*

$$\Gamma : \mathbf{Aff} \rightleftarrows \mathbf{Ring}^{op} : \mathrm{Spec}$$

von Kategorien. Durch die Natürlichkeit der Bijektion in Satz 10.20 induziert diese für einen Ring R *auch eine Äquivalenz von Kategorien*

$$\Gamma : \mathbf{Aff}/\,\mathrm{Spec}(R) \rightleftarrows R\text{-}\mathbf{Alg}^{op} : \mathrm{Spec}$$

Beweis. Schränkt man sich auf das Bild des volltreuen Funktors Spec ein, so ist dieses per Definition genau **Aff** und die Behauptung folgt. □

11. Schemata, Beispiele und erste Eigenschaften

Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalgeringter Raum und $j\colon U \hookrightarrow X$ eine offene Teilmenge von X, so gibt es eine kanonische Abbildung $(j, j^\sharp)\colon (U, \mathcal{O}_{X|U}) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ lokalgeringter Räume, die *Inklusion* genannt wird, wobei $j^\sharp$ durch die Einschränkung

$$(-)_{|U}\colon \quad \mathcal{O}_X \longrightarrow j_*\mathcal{O}_{X|U} = \mathcal{O}_X(j^{-1}(-)) = \mathcal{O}_X((-) \cap U)$$

(oder genauer durch $\mathrm{res}^{(-)}_{(-)\cap U}$) gegeben ist.

Beispiel 11.1. In Beispiel 9.13 haben wir mit $A := k[x, y]$ und $\mathrm{Spec}(A)$ die offene Teilmenge

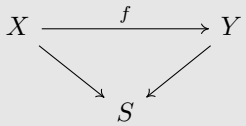
$$U := \mathrm{Spec}(A) \setminus \{(x, y)\} \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A).$$

betrachtet. Es ist $(U, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)|U})$ ein lokalgeringter Raum und die Inklusion $j\colon (U, \mathcal{O}_{X|U}) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus lokalgeringter Räume. Unter der Adjunktion aus Satz 10.20, also der Bijektion zwischen den Hom-Mengen, wird dieser Morphismus j in **LRS** auf den Isomorphismus $A \to \mathcal{O}_{X|U}(U) \cong A$ in **Ring** abgebildet, wie wir in Beispiel 9.13 ausgerechnet haben. Wir können nun nicht schließen, dass j ein Isomorphismus in **LRS** ist, denn unter einer Adjunktion gibt es im Allgemeinen nicht eine solche Korrespondenz von Isomorphismen. Nehmen wir allerdings an, dass $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ ein affines Schema (siehe Definition 10.19) ist, so schränkt die Adjunktion nach Korollar 10.23 ein auf einen Äquivalenz von Kategorien. In diesem Fall entsprechen Isomorphismen gerade Isomorphismen und j wäre ein Isomorphismus, was nicht richtig ist, da beispielsweise die Abbildung j auf topologischen Räumen nicht surjektiv ist. Also ist $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ kein affines Schema.

Definition 11.2. Ein lokalgeringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ein *Schema*, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$ gibt, so dass jede Einschränkung $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ ein affines Schema (siehe Definition 10.19) ist. Morphismen zwischen Schemata sind Morphismen der zugehörigen lokalgeringten Räume. Es bezeichne **Sch** die Kategorie der Schemata.

Im Folgenden werden wir oft ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ lediglich mit X bezeichnen.

Ist S ein Schema, so ist die Kategorie $\mathbf{Sch}/S$ der *Schemata über* S (oder *S-Schemata*) gegeben als die Überkategorie $\mathbf{Sch}/S := \mathbf{Sch}{\downarrow}S$. Mit anderen Worten sind die Objekte von $\mathbf{Sch}/S$ gegeben durch Morphismen $X \to S$ in **Sch**, die *Strukturmorphismen* genannt werden, und Morphismen f durch kommutative Dreiecke



wobei f ein Morphismus in **Sch** ist.

Bemerkung 11.3. Es gilt nach Korollar 10.22, dass $\mathbf{Sch} \cong \mathbf{Sch}/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

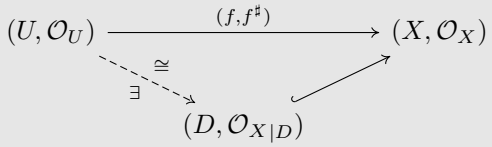
In Analogie mit Definition 3.37 machen wir die folgende Definition.

Definition 11.4. Für einen Ring R und $n \geq 1$ setzen wir $\mathbb{A}^n_R := \mathrm{Spec}(R[x_1, \ldots, x_n])$ als den *affinen Raum* (von relativer Dimension n). Ist $R = \mathbb{Z}$ oder keine Verwechselung möglich, so wird das R im Index manchmal weggelassen.

Beispiel 11.5. Für ein beliebiges Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ gilt mit Satz 10.20, dass

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}((X, \mathcal{O}_X), \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z}[x], \mathcal{O}_X(X)) \cong \mathcal{O}_X(X).$$

Definition 11.6. Ein Morphismus $(f, f^\sharp)\colon (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$ lokalgeringter Räume heißt eine *offene Immersion*, falls $f\colon U \hookrightarrow X$ eine offene Einbettung ist und eine offene Teilmenge $D \subseteq X$ existiert, sodass das Diagramm



kommutiert. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema, so heißt eine Isomorphieklasse von solchen offenen Immersion ein *offenes Unterschema* von $(X, \mathcal{O}_X)$ und wird häufig mit einem seiner Repräsentanten identifiziert. Wir schreiben dann insbesondere $(U, \mathcal{O}_U) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$.

Bemerkung 11.7. Alternativ kann man eine offene Immersion $(f, f^\sharp)\colon (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$ auch definieren als ein Morphismus lokalgeringter Räume, sodass f eine offene Einbettung ist und $f_x^\sharp$ ein Isomorphismus von Ringen für alle $x \in U$.

Lemma 11.8. *Ein offenes Unterschema $(U, \mathcal{O}_U)$ eines Schemas $(X, \mathcal{O}_X)$ ist wieder ein Schema.*

Beweis. Sei $(f, f^\sharp)\colon (U, \mathcal{O}_U) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ eine offene Immersion und $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Da es ein kommutatives Dreieck wie in Definition 11.6 gibt, können wir U mit seinem homöomorphen Bild $f(U) \subseteq X$ identifizieren und es genügt zu zeigen, dass $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ ein Schema ist. Sei $\{U_i \hookrightarrow X\}$ eine offene Überdeckung, sodass $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i}) \cong \operatorname{Spec}(A_i)$ für Ringe A_i. Wähle für alle $x \in U$ einen Index i_x, sodass $x \in U_{i_x}$. Es gibt eine basisoffene Menge $D(s_x) \subseteq U_{i_x} \cap U \subseteq \operatorname{Spec}(A_{i_x})$ um x. Also ist $\{D(s_x) \hookrightarrow U\}$ eine offene Überdeckung von U und es gilt

$$(D(s_x), (\mathcal{O}_{X|U|})_{|D(s_x)}) \cong (D(s_x), \mathcal{O}_{X|U_{i_x}|D(s_x)}) \cong (D(s_x), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_{i_x})|D(s_x)}) \cong \operatorname{Spec}(A_{i_x}[\tfrac{1}{s_x}]),$$

wobei man sich im letzten Schritt, beispielsweise direkt mit Lemma 9.3, genau überlegen muss, dass $(\operatorname{Spec}(A[\frac{1}{s}]), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A[\frac{1}{s}])}) \cong (D(s), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)|D(s)})$, was eine Übungsaufgabe ist. Also ist $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ ein Schema. □

Beispiel 11.9. Es ist das Schema $\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\}$ aus Beispiel 9.13 ein Schema, das nicht affin ist, wie wir in Beispiel 11.1 gesehen haben.

Sei X ein Schema, $x \in X$ ein Punkt und $\operatorname{Spec}(A) \cong U \subseteq X$ eine affine offene Umgebung von x in X. Sei $\mathfrak{p} \in A$ das zu x gehörige Primideal. Es gilt $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x} \cong A_\mathfrak{p}$ und es gibt einen Schemamorphismus

$$j_x\colon \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \cong \operatorname{Spec}(A_\mathfrak{p}) \to \operatorname{Spec}(A) \cong U \hookrightarrow X \tag{11.10}$$

induziert durch die kanonische Ringabbildung $A \to A_\mathfrak{p}$. Diese ist nach den Argumenten im Beweis von Lemma 11.8 unabhängig von dem gewählten U. Betrachtet man weiter die kanonische Abbildung $A_\mathfrak{p} \to k(\mathfrak{p}) = k(x)$ in den Restklassenkörper, so bekommen wir einen Schemamorphismus

$$i_x\colon \operatorname{Spec}(k(x)) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X \tag{11.11}$$

und das Bild (auf topologischen Räumen) des einzigen Punktes von $\operatorname{Spec}(k(x))$ unter i_x ist genau der Punkt x.

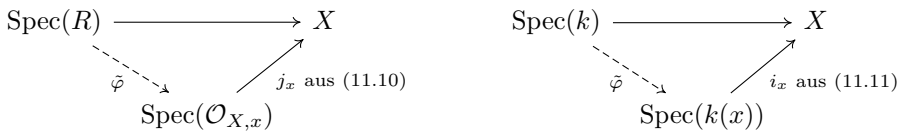
Lemma 11.12. *Sei X ein Schema. Für einen lokalen Ring R mit Restklassenkörper k (und insbesondere also für jeden Körper $R = k$) gibt es eine Bijektion*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec}(R), X) \quad \cong \quad \left\{ \begin{array}{c} \varphi\colon \mathcal{O}_{X,x} \to R \text{ lokale Ringabbildung} \\ \text{für } x \in X \end{array} \right\}$$

die einschränkt zu einer Bijektion

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec}(k), X) \quad \cong \quad \left\{ \begin{array}{c} \varphi\colon k(x) \to k \text{ Ringabbildung} \\ \text{für } x \in X \end{array} \right\}$$

Beweis. Die jeweilige Abbildung von der rechten zu der linken Seite ist die Präkomposition von $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(R) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ und $\tilde{\varphi}\colon \operatorname{Spec}(k) \to \operatorname{Spec}(k(x))$ mit den in (11.10) und (11.11) beschriebenen Morphismen.



Ist nun umgekehrt $(f, f^\sharp)\colon (\operatorname{Spec}(R), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R)}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Schemamorphismus, so definieren wir den Punkt $x \in X$ als das Bild des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ unter $f\colon \operatorname{Spec}(R) \to X$.

Weil Morphismen von Schemata insbesondere Morphismen lokalgeringter Räume sind, gibt es einen lokalen Ringhomomorphismus $f^\sharp_{\mathfrak{m}}\colon \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R),\mathfrak{m}} \cong R_{\mathfrak{m}} \cong R$. Für den zweiten Teil liefert dieser eine Ringabbildung $k(x) \to R/\mathfrak{m} = k$.

Diese beiden Zuordnungen sind jeweils offensichtlich invers zueinander. □

Bemerkung 11.13. Ist $\tilde{\varphi}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ ein Schemamorphismus zwischen affinen Schemata und kommt somit wegen Korollar 10.23 von einem eindeutigen Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ und ist $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ ein Punkt mit Bild $\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A)$, so gibt es das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec}(k(\mathfrak{q})) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(B_q) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(B) \qquad \ni \mathfrak{q} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(k(\tilde{\varphi}(\mathfrak{q}))) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(A_{\tilde{\varphi}(\mathfrak{q})}) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(A) \qquad \ni \tilde{\varphi}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

Der Satz 8.18 hat jetzt die folgende Formulierung für Schemata.

Satz 11.14 (**Verkleben von Schemata**). *Sei $\mathcal{I}$ eine Indexmenge und für jedes $i \in \mathcal{I}$ ein Schema $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ gegeben. Angenommen wir haben weiter für jedes Paar $(i,j) \in \mathcal{I}^2$ eine offene Teilmenge $U_{ij} \subseteq U_i$ gegeben, und Isomorphismen*

$$\phi_{ji}\colon (U_{ij}, \mathcal{O}_{U_i|U_{ij}}) \xrightarrow{\cong} (U_{ji}, \mathcal{O}_{U_j|U_{ji}}),$$

sodass $U_{ii} = U_i$ und die Kozykelbedingung (siehe (8.16)*)*

(11.15)
$$\begin{array}{ccc} U_{ij} \cap U_{ik} & \xrightarrow[\cong]{\phi_{ki}} & U_{ki} \cap U_{kj} \\ & {\scriptstyle\cong}\searrow^{\phi_{ji}} \quad \nearrow_{\phi_{kj}}{\scriptstyle\cong} & \\ & U_{ji} \cap U_{jk} & \end{array}$$

gilt. Dann gibt es ein (bis auf Isomorphie) eindeutiges Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ und offene Immersionen

$$f_i\colon (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X),$$

sodass gilt

(1) $X = \cup_i f_i(U_i)$,
(2) $f_j \phi_{ji} = f_i$ auf U_{ij} und
(3) $f_i(U_i) \cap f_j(U_j) = f_i(U_{ij}) = f_j(U_{ji})$.

Im Spezialfall von zwei Schemata, also $\mathcal{I} = \{1,2\}$, sind die obigen Bedingungen lediglich zwei offene Teilmengen $U_{12} \subseteq U_1$ und $U_{21} \subseteq U_2$ und ein Isomorphismus $\phi\colon U_{12} \to U_{21}$.

Beweis. Für den Beweis dieses Satzes benutzen wir nur die Abschnitt 8 eingeführten Techniken: Zunächst konstruieren wir den topologischen Raum X als Quotientenraum (eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist also offen genau dann, wenn für alle i ihr Urbild unter der stetigen Abbildung $U_i \hookrightarrow \coprod_i U_i \twoheadrightarrow X$ in U_i offen ist.)

$$X := \bigsqcup_{i \in I} U_i/\sim$$

wobei $x_i \sim x_j$ mit $x_i \in U_i$ und $x_j \in U_j$ genau dann, wenn $x_i \in U_{ij}$ und $x_j \in U_{ji}$ und $\phi_{ji}(x_i) = x_j$. Dieses ist mit Hilfe der Kozykelbedingung transitiv und daher eine Äquivalenzrelation. Die kanonischen Abbildungen $f_i\colon U_i \hookrightarrow X$ sind offene Einbettungen und es gelten offenbar die Bedingungen (1), (2) und (3). Wir werden im Folgenden die topologischen Räume U_i mit ihrem (offenen) Bild $f_i(U_i) \subseteq X$ identifizieren.

Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ auf dem topologischen Raum X bekommt man nun einfach durch Verkleben, also genauer durch Satz 8.18 zum Verkleben von Garben angewandt auf die offene Überdeckung $\mathfrak{U}_X := \{U_i \hookrightarrow X\}_{i \in \mathcal{I}}$ und das Verklebedatum

$$\mathcal{O}_{U_i}\colon \mathbf{Ouv}(U_i)^{op} \to \mathbf{Ring}$$

mit Garbenisomorphismen

$$\phi_{ji}\colon \mathcal{O}_{U_i|U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{U_j|U_i \cap U_j}.$$

Diese erfüllen nach Voraussetzung die Kozykelbedingung.

Der lokalgeringte Raum ist ein Schema, da er nach Definition eine offene Überdeckung durch Schemata $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ hat und also auch eine Überdeckung durch lokalgeringte Räume, die isomorph zu affinen Schemata sind. □

Den vorherigen Satz 11.14 kann man natürlich genau so gut fuer lokalgeringte Räume formulieren. Wir bekommen damit das folgende Korollar.

Korollar 11.16. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ lokalgeringte Räume. Dann ist die Zuordnung*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Set} \\ U & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{LRS}}((U, \mathcal{O}_{X|U}), (Y, \mathcal{O}_Y)) \end{array}$$

eine Garbe.

Beweis. Dieses ist eine Übungsaufgabe. □

Beispiel 11.17. Sei $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ eine Familie von Schemata, dann definiert der Satz 11.14 mit $U_{ij} = \emptyset$ ein Schema, dass die *disjunkte Vereinigung* $\coprod_i (U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ genannt wird. Sein topologischer Raum ist die disjunkte Vereinigung der topologischen Räume U_i.

Beispiel 11.18. Ein Beispiel eines besonders pathologischen Schemas ist die *Doppelpunktgerade*. Sei hierzu k ein Körper und betrachte $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1_k$, sowie $U_{12} = U_{21} = \mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ und die Identität $\phi\colon U_{12} = U_{21}$. Das durch Satz 11.14 definierte Schema heißt Doppelpunktgerade und hat nicht besonders gute Eigenschaften, wie wir bald sehen werden.

Beispiel 11.19. Ein wichtiges Beispiel eines Schemas ist der *Projektive Raum* $\mathbb{P}^n_R$. Sei hierzu R ein Ring und $n \geq 1$ und setze $U_i := \mathrm{Spec}(R[t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n]) \cong \mathbb{A}^n_R$ für $i \in \{0 \ldots, n\}$. Es ist einfach zu sehen, dass der R-Algebrenhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} R[t_0, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_n] & \hookrightarrow & R[x_0, x_0^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}] \\ t_j & \mapsto & \frac{x_j}{x_i} \end{array}$$

injektiv ist. Daher kann die Quelle mit einem Unterring des Ziels identifiziert werden und wir schreiben

$$U_i = \mathrm{Spec}(R[\tfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \tfrac{\hat{x_i}}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_i}])$$

Nun möchten wir Satz 11.14 benutzen, um die U_i zu verkleben. Dafür setzen wir als Indexmenge $\mathcal{I} := \{0, \ldots, n\}$ und für jedes Paar $(i, j) \in \mathcal{I}^2$

$$U_{ij} := \begin{cases} D_{U_i}(\frac{x_j}{x_i}) \subseteq U_i & \text{für } i \neq j \\ U_i & \text{für } i = j. \end{cases}$$

mit Isomorphismen $\phi_{ji}\colon (U_{ij}, \mathcal{O}_{U_i|U_{ij}} \to (U_{ji}, \mathcal{O}_{U_j|U_{ji}})$ gegeben durch die Gleichheit der Ringe

$$R[\tfrac{x_0}{x_i}, \ldots, \tfrac{\hat{x_i}}{x_i}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_i}, \tfrac{x_i}{x_j}] = R[\tfrac{x_0}{x_j}, \ldots, \tfrac{\hat{x_j}}{x_j}, \ldots, \tfrac{x_n}{x_j}, \tfrac{x_j}{x_i}]$$

als Unterreinge von $R[x_0, x_0^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$. Wegen dieser Gleichheit ist auch die Kozykelbedingung trivialerweise erfüllt. Das auf diese Weise zusammengeklebte Schema $\mathbb{P}^n_R$ heißt der *Projektive Raum* (von relativer Dimension n über R). Wir werden diesen Raum später in einem eigenen Kapitel noch genauer untersuchen.

Definition 11.20. Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt

(1) zusammenhängend,
(2) irreduzibel,
(3) quasikompakt,

falls der topologische Raum X die entsprechende Eigenschaft hat.

Beispiel 11.21. Wir haben in Satz 4.12 gesehen, dass jedes affine Schema quasikompakt ist. Daher ist beispielsweise das Schema $X := \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Spec}(k)$ (siehe Beispiel 11.17 für dessen Konstruktion) kein affines Schema, da es nicht quasikompakt ist. Insbesondere ist X nicht isomorph zu dem affinen Schema $\mathrm{Spec}(\prod_{i \in \mathbb{N}} k)$. Durch die Äquivalenz in Korollar 10.23 sehen wir, dass das affine Schema $\mathrm{Spec}(\prod_{i \in \mathbb{N}} k)$ das Koprodukt $\mathrm{Spec}(\prod_{i \in \mathbb{N}} k)$ in der Kategorie **Aff** der affinen Schemata ist. Insbesondere bewahrt also der Inklusionsfunktor $\mathbf{Aff} \hookrightarrow \mathbf{Sch}$ keine Koprodukte und Koprodukte in **Aff** können sich sehr pathologisch verhalten.

Es gibt auch irreduzible (und daher insbesondere zusammenhängende) Schemata, die nicht quasikompakt sind.

Wir können nun die Aussage von Satz 5.4 (umformuliert mit Hilfe von Lemma 4.7) auf beliebige Schemata verallgemeinern.

Satz 11.22. *Für ein Schema X gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} X & \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Abgeschlossene und irreduzible} \\ \text{Teilmengen von } X \end{array} \right\} \\ x & \longmapsto & \overline{\{x\}} \\ \left(\begin{array}{l} \text{Der einzige Punkt} \\ x \text{ in der Menge} \end{array} \bigcap_{\emptyset \neq U \subseteq Z \text{ offen}} U \right) & \longmapsfrom & Z \end{array}$$

und x ist der eindeutige generische Punkt von $\overline{\{x\}}$.

Beweis. Zunächst möchten wir uns überlegen, wieso die angegebene Zuordnung im Fall eines affinen Schemas $X = \operatorname{Spec}(A)$ tatsächlich der Bijektion aus Satz 5.4 entspricht. Für ein Primideal $x \in X$ zeigt Lemma 4.7, dass $\overline{\{x\}} = \mathcal{V}(x)$ und die Abbildung L ist die gewünschte. Für die Identifikation der anderen Abbildung betrachten wir eine abgeschlossene und irreduzible Teilmenge $Z \subseteq X$ und wissen nach Satz 5.4, dass diese von der Form $Z = \mathcal{V}(x)$ ist für einen Punkt $x \in X$, der der eindeutige generische Punkt von Z ist. Mit Lemma 4.19.(2) folgt dann, dass

$$\bigcap_{\emptyset \neq U \subseteq Z \text{ offen}} U = \{x\},$$

also ist die Abbildung R ebenfalls die gleiche wie in Satz 5.4.

Sei nun X ein beliebiges Schema. Wegen Lemma 4.17.(1) und (2) ist $\overline{\{x\}}$ eine abgeschlossene und irreduzible Teilmenge von X und die Abbildung L damit wohldefiniert.

Sei $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene und irreduzible Teilmenge. Nach Lemma 4.19.(2) besteht die Menge $G := \cap_{\emptyset \neq U \subseteq Z \text{ offen}} U$ genau aus den generischen Punkten von Z. Wenn wir zeigen, dass sie einelementig ist, ist R wohldefiniert und es gilt $LR = \mathrm{id}$ und außerdem $RL = \mathrm{id}$, da x per Definition ein generischer Punkt von $\overline{\{x\}}$ ist.

Um zu zeigen, dass G nichtleer ist, sei $\{U_i \hookrightarrow X\}$ eine offene Überdeckung von X durch affine Schemata. Dann gilt $Z = Z \cap X = Z \cap (\cup_i U_i) = \cup_i (Z \cap U_i)$ und da $Z \neq \emptyset$ gibt es einen Index i mit $Z \cap U_i \neq \emptyset$. Es ist $Z \cap U_i$ eine abgeschlossene Teilmenge des affinen Schemas U_i und außerdem irreduzibel nach Lemma 4.17.(7), da es eine nichtleere und offene Teilmenge des irreduziblen topologischen Raums Z ist. Es gibt also durch den obigen affinen Fall einen eindeutigen Punkt $\mathfrak{p} \in Z \cap U_i$ mit $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = Z \cap U_i$. Da aber nach Lemma 4.17.(7) die Teilmenge $Z \cap U_i \subseteq Z$ dicht ist, gilt mit Bemerkung 4.2, dass $\overline{\{\mathfrak{p}\}}^Z = \overline{\overline{\{\mathfrak{p}\}}^{Z \cap U_i}}^Z = \overline{Z \cap U_i} = Z$ und damit ist $\mathfrak{p}$ ein generischer Punkt von Z, also $\mathfrak{p} \in G$.

Ist $y \in G$ ein weiterer generischer Punkt von Z, so liegt er nach Lemma 4.19.(2) auch in der nichtleeren offenen Teilmenge $Z \cap U_i$. Mit der Eindeutigkeit des generischen Punktes im affinen Fall sind wir fertig, wenn wir zeigen können, dass y ein generischer Punkt von $Z \cap U_i$ ist. Dieses ist aber klar, da $\overline{\{y\}}^{Z \cap U_i} = \overline{\{y\}}^Z \cap (Z \cap U_i) = Z \cap (Z \cap U_i) = Z \cap U_i$ nach Bemerkung 4.2. □

Bemerkung 11.23. Nach Lemma 4.17.(4) gibt es für jeden Punkt $x \in X$ einen generischen (also einen (geometrisch) „größten“) Punkt $\eta \in X$ einer Irreduzibilitätskomponente $\overline{\{\eta\}}$ von X mit $x \in \overline{\{\eta\}}$. Dieser Punkt η muss natürlich nicht eindeutig sein, wie das Beispiel des Nullpunktes x im Achsenkreuz zeigt.

Es ist nicht richtig, dass umgekehrt für jeden Punkt $x \in X$ ein abgeschlossener (also ein (geometrisch) „kleinster“) Punkt $m \in X$ existiert mit $m \in \overline{\{x\}}$ und es gibt sogar nichtleere Schemata ohne abgeschlossene Punkte. Ist allerdings X ein affines Schema, so ist nach Satz A.7 natürlich jedes Primideal x in einem maximalen Ideal m (also einem abgeschlossenen Punkt) enthalten und es gilt $m \in \mathcal{V}(x) = \overline{\{x\}}$.

Wir haben schon gesehen, dass der einem Schema unterliegende topologische Raum fast immer nicht Hausdorff ist. Es gilt allerdings die folgende schwächere Trennungseigenschaft, die auch *Kolmogorov-Eigenschaft* genannt wird.

Lemma 11.24. *Ein Schema X ist ein T_0-Raum. Mit anderen Worten gibt es für je zwei verschiedene Punkte x und y in X eine offene Menge $U \subseteq X$, die genau einen der beiden Punkte enthält.*

Beweis. Übungsausgabe. □

Definition 11.25.

(1) Ein Schema X heißt *lokal noethersch*, wenn es eine offene Überdeckung durch affine Schemata $\mathrm{Spec}(A_i)$ besitzt, wobei jeder Ring A_i noethersch ist.
(2) Ein Schema X heißt *noethersch*, wenn es lokal noethersch und quasikompakt ist.

Bemerkung 11.26. Da jedes affine Schema nach Satz 4.12 quasikompakt ist, ist jedes affine lokal noethersche Schema auch noethersch. Es ist zwar jede Lokalisierung eines noetherschen Rings wieder ein noetherscher Ring ist, aber es hat beispielsweise der nicht noethersche Ring $\prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_2$ die Eigenschaft, dass alle seine Lokalisierungen and Primidealen noethersche Ringe sind, d.h. „noethersch“ zu sein ist in diesem Sinn keine lokale Eigenschaft.

Lemma 11.27. *Ein affines Schema* $\mathrm{Spec}(A)$ *ist noethersch genau dann, wenn A ein noetherscher Ring ist.*

Beweis. Es ist klar, dass $\mathrm{Spec}(A)$ lokal noethersch ist, falls A noethersch ist und quasikompakt wegen Satz 4.12. Also ist $\mathrm{Spec}(A)$ noethersch.

Sei nun $\mathrm{Spec}(A)$ ein noethersches Schema. Wir betrachten ein Ideal $I \subseteq A$ und möchten zeigen, dass I endlich erzeugt ist. Es gibt eine offene affine Überdeckung von $\mathrm{Spec}(A)$ durch Spektra noetherscher Ringe. Da eine Lokalisierung eines noetherschen Rings wieder ein noetherscher Ring ist, können wir annehmen, dass $\mathrm{Spec}(A)$ durch (wegen der Quasikompaktheit endlich viele) affine offene Unterschemata der Form $D(s_1), \ldots, D(s_n)$ überdeckt ist, sodass alle $A[\frac{1}{s_i}]$ noethersche Ringe sind. Folglich sind alle Ideale $I[\frac{1}{s_i}] \subseteq A[\frac{1}{s_i}]$ endlich erzeugt, also

$$I[\tfrac{1}{s_i}] = \left(\frac{a_{i1}}{s_i^{n_{i1}}}, \ldots, \frac{a_{im_i}}{s_i^{n_{im_i}}} \right)$$

für $a_{ij} \in I$. Wir betrachten das endlich erzeugte Ideal

$$J := (a_{11}, \ldots, a_{nm_n}) \subseteq I.$$

Es gilt per Konstruktion, dass $J[\frac{1}{s_i}] = I[\frac{1}{s_i}]$ für alle Indizes i. Wir betrachten den A-Modul I/J. Dann gibt es für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) = D(s_1) \cup \ldots \cup D(s_n)$ einen Index i mit $\mathfrak{p} \in D(s_i)$, also mit anderen Worten $s_i \notin \mathfrak{p}$. Daher gilt $(I/J)_{\mathfrak{p}} \cong 0$, weil $(I/J)[\frac{1}{s_i}] \cong 0$. Weil Nullheit eine lokale Eigenschaft im Sinn von Appendix A ist, gilt $I/J = 0$ und daher $I = J$. □

Wir möchten nun zeigen, dass ein noethersches Schema nur endlich viele Irreduzibilitätskomponenten (und damit auch nur endlich viele Zusammenhangskomponenten) hat.

Definition 11.28. Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn jede absteigende Kette

$$\ldots \subseteq Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq Z_1$$

abgeschlossener Teilmengen von X stationär wird.

Beispiel 11.29. Ein noethersches affines Schema $\mathrm{Spec}(A)$ hat einen noetherschen unterliegenden topologischen Raum, denn zu einer absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen korrespondiert nach Satz 5.2 eine aufsteigende Kette

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \ldots$$

von Idealen von A die stationär wird, da nach Lemma 11.27 der Ring A noethersch ist.

Lemma 11.30. *Sei X ein topologischer Raum und $\{U_i \hookrightarrow X\}_{i=1}^n$ eine endliche Überdeckung durch noethersche topologische Räume U_i, dann ist X ein noetherscher topologischer Raum.*

Beweis. Sei $\ldots \subseteq Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq Z_1$ eine Kette abgeschlossener Teilmengen in X. Dann ist für alle Indizes i auch

$$\ldots \subseteq (Z_3 \cap U_i) \subseteq (Z_2 \cap U_i) \subseteq (Z_1 \cap U_i)$$

eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen in U_i, die nach Voraussetzung ab einem $N(i)$ stationär wird. Setze N als das Maximum aller $N(i)$. Dann gilt für alle $j \geq N$, dass

$$Z_j = Z_j \cap X = Z_j \cap (\cup_i U_i) = \cup_i (Z_j \cap U_i) = \cup_i (Z_{j+1} \cap U_i) = Z_{j+1}$$

und die ursprüngliche Kette wird stationär. Also ist X ein noetherscher topologischer Raum. □

Korollar 11.31. *Ein noethersches Schema hat einen noetherschen unterliegenden topologischen Raum.*

Beweis. Ein noethersches Schema X hat nach Definition eine endliche offene Überdeckung durch affine Schemata $\mathrm{Spec}(A_i)$, wobei A_i einer noetherscher Ring ist. Nach Beispiel 11.29 hat $\mathrm{Spec}(A_i)$ einen noetherschen unterliegenden topologischen Raum und nach Lemma 11.30 also auch X. □

Beispiel 11.32. Die Umkehrung von Korollar 11.31 ist nicht unbedingt richtig. Der Ring

$$A := k[x_1, x_2, \ldots]/(x_1^2, x_2^2, \ldots)$$

ist nicht noethersch, da das (maximale) Ideal $(x_1, x_2, \ldots)$ nicht endlich erzeugt ist. Es ist allerdings $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(A/\operatorname{Nil}(A)) = \mathrm{Spec}(k)$ ein noetherscher topologischer Raum.

Lemma 11.33. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum, dann gilt:*

(1) Jede Teilmenge von X ist ein noetherscher topologischer Raum.
(2) Der Raum X ist quasikompakt.
(3) Der Raum X hat nur endlich viele Irreduzibilitätskomponenten.

Beweis. Für Teil (1) sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge mit der Unterraumtopologie und betrachte eine Kette $\ldots \subseteq Z_3 \subseteq Z_2 \subseteq Z_1$ abgeschlossener Teilmengen in Y. Die jeweiligen Abschlüsse in X bilden eine Kette $\ldots \subseteq \overline{Z_3} \subseteq \overline{Z_2} \subseteq \overline{Z_1}$ abgeschlossener Teilmengen in X die nach Voraussetzung stationär wird. Nun gilt aber $\overline{Z_j}^X \cap Y = \overline{Z_j}^Y = Z_j$ nach Bemerkung 4.2 und daher wird die ursprüngliche Kette ebenfalls stationär.

Für (2) sei $\{U_i \hookrightarrow X\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung und betrachte die Teilmenge

$$\mathfrak{T}' := \{U \in \mathfrak{T} \mid U \text{ ist endliche Vereinigung von } U_i\text{s}\}$$

der Topologie $\mathfrak{T}$ auf X. Wir wollen zeigen, dass $X \in \mathfrak{T}'$. Jede Kette des Posets $(\mathfrak{T}', \subseteq)$ hat eine obere Schranke, da die komplementäre Kette eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen in X ist und nach Voraussetzung stationär wird. Mit dem Lemma von Zorn hat $(\mathfrak{T}', \subseteq)$ also ein maximales Element M. Dieses M kann also als endliche Vereinigung von U_is geschrieben werden. Wir wollen zeigen, dass $M = X$. Falls aber $M \neq X$ und es ein Element $x \in X \setminus M$ gäbe, so wäre dieses in einer offenen Menge U_j enthalten, die wir mit M vereinigen könnten, was ein Widerspruch zur Maximalität von M wäre. Also ist $M = X$ und damit X quasikompakt.

Für (3) genügt es zu zeigen, dass X eine endliche Vereinigung irreduzibler Teilmengen ist. Betrachte die Teilmenge

$$\mathfrak{C}' := \{Z \in \mathfrak{C} \mid Z \text{ ist nicht endliche Vereinigung irreduzibler Teilmengen von } X\}$$

der Menge $\mathfrak{C}$ der abgeschlossenen Teilmengen von X. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{C}' = \emptyset$. Falls diese Menge nichtleer wäre, so gäbe es mit dieser Voraussetzung und der Voraussetzung noethersch zu sein mit dem Lemma von Zorn ein minimales Element Z. Es ist also Z eine nicht irreduzible Teilmenge von X und daher eine Vereinigung von zwei abgeschlossenen Teilmengen Z_1 und Z_2, die wegen der Minimalität von Z beide in $\mathfrak{C}'$ liegen. Dieses ist ein Widerspruch. □

Korollar 11.34. *Jedes noethersche Schema hat endlich viele Irreduzibilitätskomponenten.*

Korollar 11.35.

(1) Ein offenes Unterschema eines lokal noetherschen Schemas ist wieder lokal noethersch.
(2) Ein offenes Unterschema eines noetherschen Schemas ist wieder noethersch.

Beweis. Für (1) sei X ein lokal noethersches Schema, $\{\mathrm{Spec}(A_i) \hookrightarrow X\}$ eine offene Überdeckung sodass A_i ein noetherscher Ring ist und $U \hookrightarrow X$ ein offenes Unterschema. Für jeden Index i ist dann $U \cap \mathrm{Spec}(A_i)$ eine offene Menge in $\mathrm{Spec}(A_i)$ und daher $U \cap \mathrm{Spec}(A_i) = \cup_{j_i} D(s_{ji})$ für $s_{j_i} \in A_i$. Da $D(s_{ji}) \cong \mathrm{Spec}(A[\frac{1}{s_{ji}}])$ und eine Lokalisierung eines noetherschen Rings wieder ein noetherscher Ring ist, besitzt

$$U = U \cap X = U \cap (\cup_i \mathrm{Spec}(A_i)) \cong \cup_i (U \cap \mathrm{Spec}(A_i)) \cong \cup_i \cup_{j_i} \mathrm{Spec}(A[\tfrac{1}{s_{ji}}])$$

eine offene Überdeckung durch Spektra noetherscher Ringe und ist also lokal noethersch.

Für (2) bemerken wird zunächst, dass ein offenes Unterschema eines quasikompakten Schemas nicht unbedingt quasikompakt sein muss. Ist aber das Schema noethersch, so hat es nach Korollar 11.31 einen noetherschen unterliegenden topologischen Raum und eine (insbesondere: eine offene) Teilmenge ist nach dem vorherigen Lemma 11.33.(1) auch noethersch und damit quasikompakt nach Lemma 11.33.(2). Also ist das offene Unterschema noethersch. □

Man erinnere sich daran, dass ein Ring A reduziert heißt, falls 0 sein einziges nilpotentes Element ist und ein Integritätsbereich, wenn er nicht der Nullring ist und wenn 0 sei einziger Nullteiler ist, was nach Korollar A.20 äquivalent dazu ist, reduziert und irreduzibel zu sein.

Definition 11.36. Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt

(1) *reduziert*, falls $\mathcal{O}_{X,x}$ ein reduzierter Ring ist für alle $x \in X$,
(2) *integer*, falls X reduziert und irreduzibel ist.

Lemma 11.37. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Dann gilt:*

(1) X ist reduziert, genau dann wenn $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert ist für alle offenen $U \subseteq X$.
(2) X ist integer, genau dann wenn $\mathcal{O}_X(U)$ ein Integritätsbereich ist für alle offenen $U \subseteq X$ mit $U \neq \emptyset$.

Außerdem gilt:

(3) Ist X integer, so ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ein Integritätsbereich für alle $x \in X$.

Beweis. Zunächst zeigen wir (1). Sei X reduziert, $U \subseteq X$ offen und $s \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $s^n = 0$. Dann gilt auch $s_x^n = 0 \in \mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in U$. Da diese Ringe reduziert sind, folgt $s_x = 0$ für alle $x \in U$, also auch auf kleinen Umgebungen U_x um x. Durch die Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{O}_X$ folgt $s = 0$.

Sei umgekehrt jeder Ring $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert und $s_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit $s_x^n = 0$, dann gilt diese Gleichung auch in $\mathcal{O}_X(U)$ für eine kleine offene Umgebung U um x. Dann folgt für einen Repräsentant $s \in \mathcal{O}_X(U)$ von s_x, dass $s = 0$, also auch $s_x = 0$.

Für (2) sei X integer. Da Reduziertheit nach (1) eine lokale Eigenschaft ist und nach Lemma 4.17.(7) jede nichtleere offene Teilmenge von X auch irreduzibel, ist jedes nichtleere offene Unterschema von X ebenfalls integer. Also genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{O}_X(X)$ ein Integritätsbereich ist. Ein irreduzibler topologischer Raum ist per Definition nichtleer, also ist $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{O}_X(X) \neq 0$ (X hat eine Überdeckung durch affine Unterschemata $\neq 0$, die jeweils 1 als globalen Schnitt haben, der offensichtlich mit Einschränkungen kompatibel ist, da Ringabbildungen die Eins aus die Eins schicken und somit zu einem globalen Schnitt von X verklebt). Seien also $s, t \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $st = 0$. Wir wollen zeigen $s = 0$ oder $t = 0$. Sei $W = \mathrm{Spec}(A) \neq \emptyset$ eine fixierte affine offene Teilmenge von X. Dann gilt $s_{|W} t_{|W} = 0$ und daher $W = \mathcal{V}(0) = \mathcal{V}(s_{|W} t_{|W}) = \mathcal{V}(s_{|W}) \cup \mathcal{V}(t_{|W})$ nach Lemma 4.4. Da W nach Lemma 4.17.(7) irreduzibel ist, können wir beispielsweise $W = \mathcal{V}(s_{|W})$ annehmen. Dieses bedeutet aber nach Korollar 5.3, dass $s_{|W} \in \mathrm{Nil}(A) = 0$, da $A \cong \mathcal{O}_W(W) \cong \mathcal{O}_X(W)$ nach (1) reduziert ist. Wir können nun nicht ohne Weiteres X durch solche W überdecken und die

Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{O}_X$ benutzen, da wir bei weiteren W nicht wissen ob $s_{|W} = 0$ oder $t_{|W} = 0$ gilt. Sei nun aber $U \neq \emptyset$ eine weitere beliebige affine offene Teilmenge von X. Wenn wir zeigen, dass stets $s_{|U} = 0$ folgte durch Betrachtung einer Überdeckung von X durch solche U mit der Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{O}_X$, dass $s = 0$ und wir wären fertig. Es genügt, wie oben, wieder zu zeigen, dass $\mathcal{V}(s_{|U}) = U$. Nach Lemma 4.17.(7) ist U irreduzibel, der Schnitt $W \cap U$ nach Lemma 4.17.(6) nichtleer und offen in U und damit nach Lemma 4.17.(7) dicht in U. Daher genügt es zu zeigen, dass $W \cap U \subseteq \mathcal{V}(s_{|U})$, denn dann folgt nach Abschluss, dass $U \subseteq \mathcal{V}(s_{|U}) \subseteq U$. Wir wissen nun aber schon, dass $s_{|W\cap U} = 0$, also $s_x = 0$ für alle $x \in W \cap U$ und es gilt $\mathcal{V}(s_{|U}) = \{x \in U \mid s_{|U} \in x\} = \{x \in U \mid s_x = 0\}$. Also folgt die Behauptung.

Ist umgekehrt jedes $\mathcal{O}_X(U)$ ein Integritätsbereich, so ist X reduziert nach (1). Angenommen X wäre nicht irreduzibel. Dann gäbe es nach Lemma 4.17.(7) zwei nichtleere offene Teilmengen U und V mit leerem Durchschnitt. Folglich wäre $\mathcal{O}_X(U \cup V) \cong \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V)$ nach der Garbenbedingung und die rechte Seite sicherlich kein Integritätsbereich. Also ist X integer.

Es folgt (3) aus (2), da jede (nichttriviale) Lokalisierung eines Integritätsbereiches wieder ein Integritätsbereich ist. □

Beispiel 11.38. Es folgt, dass ein affines Schema $X = \operatorname{Spec}(A)$ reduziert (oder integer) ist genau dann, wenn A ein reduzierter Ring (oder ein Integritätsbereich) ist. Wir haben in Korollar 5.5 und Korollar A.19 gesehen, dass das affine Schema $X = \operatorname{Spec}(A)$ irreduzibel ist, genau dann, wenn $\operatorname{Nil}(A)$ ein Primideal ist (und folglich der generische Punkt $\eta \in X$). Im speziellen Fall, dass X integer ist, ist der generische Punkt $\eta \in X$ das Nullideal (0).

Ist $X = \operatorname{Spec}(A)$ ein integres und affines Schema, so ist also insbesondere der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\eta} = k(\eta) = A_{(0)} = \operatorname{Quot}(A)$ ein Körper. Ein beliebiges integres (sogar nur irreduzibles) Schema X hat nach Satz 11.22 einen eindeutigen generischen Punkt η. Um den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ zu bestimmen, können wir uns auf eine affine offene Umgebung von η zurückziehen. (Es ist sogar jedes nichtleere offene Unterschema eine Umgebung des generischen Punkts nach Lemma 4.19.) Es folgt, dass für ein irreduzibles Schema X der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ein Körper ist.

Definition 11.39. Sei X ein integres Schema mit generischem Punkt η. Dann heißt der Körper $K(X) := \mathcal{O}_{X,\eta}$ der *Funktionenkörper* von X.

Es ist nach dem folgenden Lemma besondes einfach, die Strukturgarbe eines integren Schemas zu beschrieben.

Lemma 11.40. *Sei X ein integres Schema und $x \in U \subseteq V$ offene Teilmengen von X, sowie $\{U_i \hookrightarrow U\}$ eine offene Überdeckung. Dann sind jeweils die beiden Abbildungen*

$$\mathcal{O}_X(V) \xhookrightarrow{(-)_{|U}} \mathcal{O}_X(U) \xhookrightarrow{(-)_\eta} \mathcal{O}_{X,\eta} = K(X)$$

injektiv und folglich auch die induzierte Abbildung $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow K(X)$. Weiterhin gilt

$$\bigcap_i \mathcal{O}_X(U_i) = \mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x\in U} \mathcal{O}_{X,x}$$

wobei der Schnitt im Funktionenkörper $K(X)$ betrachtet wird.

Beweis. Da für eine injektive Komposition von Abbildungen immer auch die erste dieser eine Injektion ist, genügt es fuer die erste Behauptung zu zeigen, dass $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\eta}$ injektiv ist. Sei also $s \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $s_\eta = 0$. Es genügt nach der Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{O}_X$ zu zeigen, dass die Einschränkungen $s_{|\operatorname{Spec}(A_i)}$ auf einer offenen affinen Überdeckung $\{\operatorname{Spec}(A_i) \hookrightarrow U\}$ verschwinden, wobei A_i nach Lemma 11.37 ein Integritätsbereich ist. Die Behauptung folgt dann aus der Injektivität von $A_i \hookrightarrow \operatorname{Quot}(A_i) = K(X)$.

Die erste Gleichung der zweiten Behauptung folgt direkt aus der Garbeneigenschaft von $\mathcal{O}_X$ bezüglich der Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow U\}$. Das dort vorkommende Equalizer-Diagramm können wir wegen der ersten Behauptung innerhalb von $K(X)$ interpretieren. Für die zweite Gleichung können wir ein affines $X = \operatorname{Spec}(A)$ anehmen und wissen mit Korollar 9.11, dass

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X^{pre}(X) = (A \setminus \cup_{\mathfrak{p}\in X}\mathfrak{p})^{-1}A = \cap_{\mathfrak{p}\in X}(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A = \cap_{\mathfrak{p}\in X}A_\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in X} \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}. \quad \square$$

Beispiel 11.41. Das vorherige Lemma 11.40 ist falsch, wenn das Schema X nicht reduziert ist. Ist beispielsweise $X = \mathrm{Spec}(A)$ ein irreduzibles affines Schema mit generischem Punkt η und $X_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}(A_{\mathrm{red}})$ mit generischem Punkt η_{red}, so betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,\eta} \\ \downarrow & & \| \\ \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(U) & \hookrightarrow & \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},\eta_{\mathrm{red}}} \end{array}$$

wobei die rechte vertikale Abbildung die Identität ist, da Lokalisierung mit Radikalen von Idealen vertauscht. Ist nun X irreduzibel aber nicht reduziert, so kann die Komposition

$$\mathcal{O}_X(X) = A \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(X_{\mathrm{red}}) = A_{\mathrm{red}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,\eta}$$

nicht injektiv sein, da die erste vorkommende Abbildung nicht injektiv ist.

Für ein konkreteres Beispiel betrachten wir $X = \mathrm{Spec}(A)$ mit $A = k[x,y]/(xy, x^2)$ und zugehörigem reduzierten Schema $X_{\mathrm{red}} = \mathrm{Spec}(k[x,y]/(x)) = \mathrm{Spec}(k[y])$. Es ist X also irreduzibel aber nicht reduziert. Die Abbildung $A = \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(D(y)) = A[\frac{1}{y}]$ ist nicht injektiv, da das Element x auf Null geschickt wird.

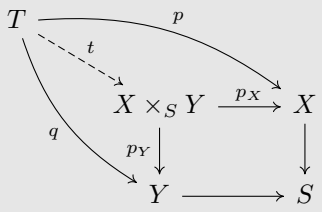
12. Faserprodukte

Definition 12.1. Sei S ein Schema und $X \to S$ und $Y \to S$ zwei Elemente in $\mathbf{Sch}/S$. Ein *Faserprodukt* von X und Y über S ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{p_X} & X \\ {\scriptstyle p_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & S \end{array}$$

von Schemata sodass für jedes kommutative Diagramm ohne den gestrichelten Pfeil

(12.2)



ein eindeutiger Schemamorphismus t existiert, der das gesamte Diagramm kommutativ macht. Diese letzte Bedingung nennt man die *universelle Eigenschaft des Faserprodukts.*

Beispiel 12.3.

(1) Bertachtet man den zu Definition 12.1 analogen Begriff in der Kategorie **Set** der Mengen, so existiert ein Faserprodukt und ist gegeben durch die Menge

$$X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

mit den offensichtlichen Projektionen p_X und p_Y. Ist im Speziellen g eine injektive Abbildung so ist $X \times_S Y = f^{-1}(g(Y))$ genau das Urbild von $g(Y)$ (oder mit der üblichen Identifikation: das Urbild von Y) unter der Abbildung f.

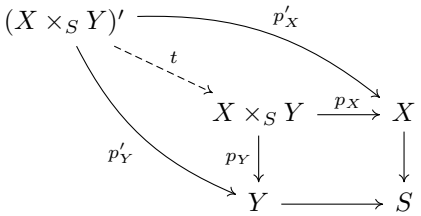
(2) Betrachtet man den Begriff des Faserprodukts in der Kategorie **Top** der topologischen Räume, so existiert ein Faserprodukt und ist gegeben durch die in Punkt (1) definierte Menge zusammen mit der Unterraumtopologie von $X \times Y$.

Lemma 12.4. *Ein Faserprodukt von X und Y über S ist eindeutig (bis auf eindeutige Isomorphie), falls es existiert und daher sprechen wir im Folgendem von „dem“ Faserprodukt.*

Beweis. Dieser Beweis ist eine übliche Argumentation für die Eindeutigkeit kategorieller Konstrukte. Angenommen es ist

$$\begin{array}{ccc} (X \times_S Y)' & \xrightarrow{p'_X} & X \\ {\scriptstyle p'_Y}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

ein zweites Faserprodukt von X und Y über S, so gibt es ein kommutatives ungestricheltes Diagramm



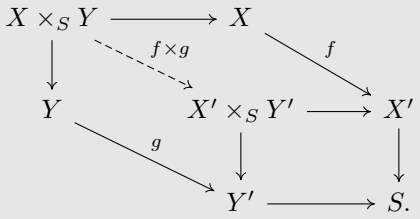
und damit einen eindeutigen Schemamorphismus t wie angedeutet, sodass alles kommutiert. Vertauscht man die Rollen der beiden Faserprodukte so gibt es analog einen eindeutigen Schemamorphismus $t' \colon X \times_S Y \to (X \times_S Y)'$, sodass das analoge Diagramm kommutiert. Schreibt man nun diese beiden Diagramme zusammen, so macht $t't \colon (X \times_S Y)' \to (X \times_S Y)'$ das gesamte Diagramm kommutativ, ebenso wie die Identität id. Die universelle Eigenschaft des Faserprodukts $(X \times_S Y)'$ verspricht aber einen eindeutigen solchen Schemamorphismus,

also ist $t't = \mathrm{id}$. Vertauscht man anfänglich die Rollen der beiden Faserprodukte, so bekommt man analog $tt' = \mathrm{id}$ und die Behauptung ist gezeigt. □

Lemma 12.5. *Sei S ein Schema, dann definiert das Faserprodukt über S einen Funktor*

$$\begin{array}{rccc} - \times_S - \colon & \mathbf{Sch}/S \times \mathbf{Sch}/S & \to & \mathbf{Sch}/S \\ & (X, Y) & \mapsto & X \times_S Y \\ & (f, g) & \mapsto & f \times g \end{array}$$

wobei für zwei Morphismen $f\colon X \to X'$ und $g\colon Y \to Y'$ in der Kategorie $\mathbf{Sch}/S$ der Morphismus $f \times g\colon X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ gegeben ist durch die universelle Eigenschaft des Faserprodukts $X' \times_S Y'$ mit Hinblick auf das kommutative Diagramm



Es gibt außerdem die folgenden in Objekten X, Y und Z in $\mathbf{Sch}/S$ natürlichen Isomorphismen.

$$\begin{array}{rcl} X \times_S S & \cong & X \\ X \times_S Y & \cong & Y \times_S X \\ (X \times_S Y) \times_S Z & \cong & X \times_S (Y \times_S Z) \end{array}$$

Beweis. Dieses folgt direkt aus der universellen Eingenschaft des Faserprodukts. □

Lemma 12.6. *Man betrachte das kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S'' & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & S \end{array}$$

von Schemata, wobei das rechte Quadrat ein Faserprodukt ist. Dann ist das linke Quadrat ein Faserprodukt genau dann, wenn das äußere Rechteck ein Faserprodukt ist.

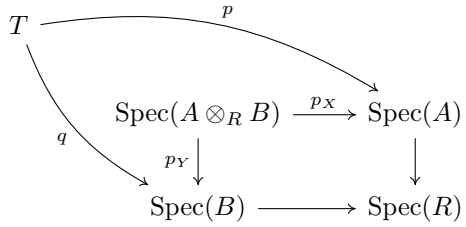
Beweis. Dieses folgt direkt aus der universellen Eingenschaft des Faserprodukts und ist eine Übungsaufgabe. □

Lemma 12.7. *Sind $S = \mathrm{Spec}(R)$ und $X = \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R)$, $Y = \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(R)$ affine S-Schemata, so existiert das Faserprodukt von X und Y über S und ist gegeben durch die Anwendung von* Spec *auf das kommutative Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{s_B} & B \\ {\scriptstyle s_A}\downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A \otimes_R B \end{array}$$

gegeben durch das Tensorprodukt.

Beweis. Ist ein kommutatives Diagramm



gegeben, so korrespondieren nach Satz 10.20 die Schemamorphismen $t\colon T \to \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ zu Ringabbildungen $A \otimes_R B \to \mathcal{O}_T(T)$ und die Behauptung, dass es eine solche eindeutige

Ringabbildung gibt, die alles kommutativ macht, ist genau die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts. □

Lemma 12.8. *Sei S ein Schema, $X, Y \in \mathbf{Sch}/S$ und der Strukturmorphismus $j\colon Y \hookrightarrow S$ eine offene Immersion. Dann existiert das Faserprodukt*

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{p_X} & X \\ {\scriptstyle p_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xhookrightarrow{j} & S. \end{array}$$

und sein unterliegender topologischer Raum ist das Urbild $f^{-1}(Y)$ mit der Unterraumtopologie von X. Außerdem ist p_X ebenfalls eine offene Immersion.

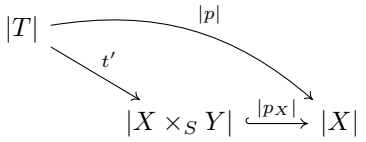
Beweis. Wir betrachten das topologische Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Y) & \xhookrightarrow{p_X} & |X| \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ |Y| & \xhookrightarrow{\quad} & |S| \end{array}$$

und definieren die Struktur eines lokalgeringten Raums auf $f^{-1}(Y)$ durch Einschränkung

$$(X \times_S Y, \mathcal{O}_{X\times_S Y}) := (f^{-1}(Y), \mathcal{O}_{X|f^{-1}(Y)})$$

der Strukturgarbe von X. Dieses ist ein Schema nach Lemma 11.8. Ist nun ein anderes Schema T mit Abbildungen $p\colon T \to X$ und $q\colon T \to Y$ gegeben, sodass das Diagramm (12.2) kommutiert, so induziert dieses insbesondere ein kommutatives Diagramm (12.2) auf unterliegenden topologischen Räumen und wir bekommen durch die universelle Eigenschaft des Faserprodukts dort eine eindeutige Abbildung $t'\colon |T| \to |X \times_S Y|$ von topologischen Räumen, sodass das gesamte Diagramm auf unterliegenden topologischen Räumen kommutiert. Wir haben also die Situation



auf topologischen Räumen gegeben und es genügt zu zeigen, dass t' einer eindeutigen Abbildung von Schemata unterliegt. Nun gilt aber für eine offene Menge $U \subseteq |X \times_S Y|$, dass

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_{X\times_S Y}(U) & = & \\ \mathcal{O}_X(U) \xrightarrow{p^\sharp(U)} & & \mathcal{O}_T(|p|^{-1}(U)) \\ & = & \mathcal{O}_T(t'^{-1}|p_X|^{-1}(U)) \\ & = & \mathcal{O}_T(t'^{-1}(U)) \\ & = & t'_*\mathcal{O}_T(U) \end{array}$$

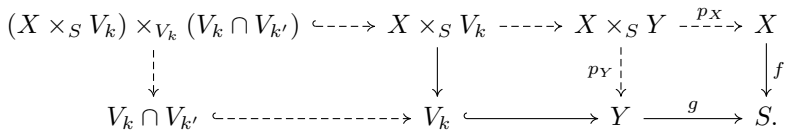
und dieser Garbenmorphismus ist also durch eine eindeutige Weise gegeben. □

Satz 12.9. *Sei S ein Schema und $X, Y \in \mathbf{Sch}/S$. Dann existiert das Faserprodukt*

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{p_X} & X \\ {\scriptstyle p_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & S. \end{array}$$

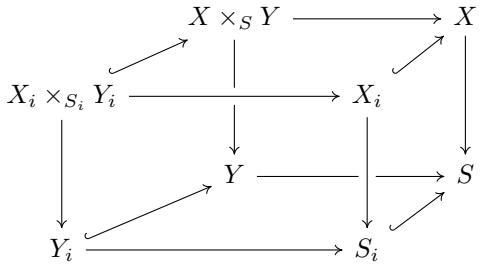
Beweis. Wir haben die Existenz bereits in Lemma 12.7 gezeigt, falls X, Y, S affin sind.

Angenommen, das Faserprodukt existierte, wenn S und X beliebig sind und Y affin. Sei $\{V_k \hookrightarrow Y\}$ eine offene Überdeckung von Y durch affine Schemata V_k. Betrachte für jedes k das Diagramm



Wir wissen nach Voraussetzung, dass das ungestrichelte Rechteck für jeden Index k existiert und ein Faserprodukt ist. Natürlich wollen wir Satz 11.14 benutzen und $X \times_S V_k$ zu dem Schema $X \times_S Y$ verkleben. Betrachtet man einen zweiten Index k' und den Durchschnitt $V_k \cap V_k'$ (dieser muss nicht affin sein!), so existieren nach Lemma 12.8 die Faserprodukte $(X \times_S V_k) \times_{V_k} (V_k \cap V_{k'})$ und $(X \times_S V_k') \times_{V_k'} (V_k \cap V_{k'})$. Diese sind aber nach Lemma 12.6 jeweils durch einen eindeutigen Isomorphismus $\varphi_{k'k}$ isomorph zu $X \times_S (V_k \cap V_{k'})$ und wiederum durch die Eindeutigkeit ist die Kozykelbedingung erfüllt. Also können wir Satz 11.14 benutzen und das Schema $X \times_S Y$ konstruieren. Genau die im Beweis von Lemma 12.8 sieht man, dass dies tatsächlich dieses universelle Eigenschaft des Faserprodukts hat.

Durch Symmetrie von X und Y bleibt nur noch zu zeigen, dass das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert, wenn X und Y beide affin sind. Dazu wählen wir eine offene affine Überdeckung $\{S_i \hookrightarrow S\}$. Wir betrachten den Würfel



wobei die rechte, die untere und die vordere Seite per Definition Faserprodukte sind. Wir möchten zeigen, dass auch die hintere Seite ein Faserprodukt ist. Dieses geht nun analog zu der obigen Betrachtung zum Zusammenkleben. □

Korollar 12.10. *Sei S ein Schema und $X, Y \in \mathbf{Sch}/S$. Sei $\{S_i \hookrightarrow S\}$ eine offene Überdeckung, $X_i := X \times_S S_i$ und $Y_i := Y \times_S S_i$ die jeweiligen Faserprodukte und offene Überdeckungen $\{U_{ij} \hookrightarrow X_i\}$ und $\{V_{ik} \hookrightarrow Y_i\}$ dieser gegeben, so ist*

$$\{U_{ij} \times_{S_i} V_{ik} \hookrightarrow X \times_S Y\}$$

auch eine offene Überdeckung.

Bemerkung 12.11. Es ist der unterliegende topologische Raum $|X \times_S Y|$ eines Faserprodukts $X \times_S Y$ von Schemata nicht unbedingt das topologische Faserprodukt $|X| \times_{|S|} |Y|$ der jeweiligen unterliegenden topologischen Räume der beteiligten Schemata, da beispielsweise $|\mathbb{A}^2| = |\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1|$ nicht die Produkttopologie trägt.

Definition 12.12. Für ein S-Schema X und einen Punkt $s \in S$ heißt das $\operatorname{Spec}(k(s))$-Schema X_s, welches durch das Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc} X_s & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spec}(k(s)) & \xrightarrow{i_s} & S \end{array} \tag{12.13}$$

gegeben ist, die *Faser* von X an s, wobei i_s der kanonische Morphismus aus (11.11) ist.

Lemma 12.14. *Ist $f\colon X \to S$ ein S-Schema und $s \in S$ ein Punkt, so ist auch das dem Faserprodukt* (12.13) *unterliegende Diagramm von topologischen Räumen*

$$\begin{array}{ccc} |X_s| & \longrightarrow & |X| \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |f|} \\ * \cong |\operatorname{Spec}(k(s))| & \xrightarrow{|i_s|} & |S| \end{array}$$

ein Faserprodukt. Es gibt also mit anderen Worten einen Homöomorphismus

$$|X_s| \cong |f|^{-1}(s)$$

topologischer Räume induziert durch den Morphismus $X_s \to X$.

Beweis. Sei $Y \hookrightarrow S$ eine offene affine Umgebung von s. Wir haben in Lemma 12.8 gesehen, dass in diesem Fall $|X \times_S Y| = |f|^{-1}(Y)$ gilt, also die analoge Aussage des zu beweisenden Lemmas für offene Immersionen. Wegen Lemma 12.6 angewandt auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} |X_s| & \longrightarrow & |X \times_S Y| & \longrightarrow & |X| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |f|} \\ |\operatorname{Spec}(k(s))| & \longrightarrow & |Y| & \hookrightarrow & |S| \end{array}$$

können wir annehmen, dass $S = Y$ affin ist. Ebenso können wir annehmen, dass X affin ist, denn ist $\{j_i \colon U_i \hookrightarrow X\}$ eine offene Überdeckung, so ist nach Konstruktion des Faserprodukts $\{U_i \times_S \operatorname{Spec}(k(s)) \hookrightarrow X_s\}$ eine offene Überdeckung dessen und es genügte zu zeigen, dass $|U_i \times_S \operatorname{Spec}(k(s))| \cong |fj_i|^{-1}(\operatorname{Spec}(k(s)))$ gilt.

Seien also $S = \operatorname{Spec}(R)$ und $X = \operatorname{Spec}(A)$, $\tilde{\varphi} \colon \operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(R)$ der vormals mit f bezeichnete Schemamorphismus und s ein Primideal in R. Wir haben ein Diagramm (siehe (11.11))

$$\begin{array}{ccccc} R & \xrightarrow{l} & R_s & \xrightarrow{p} & k(s) \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{l'} & A \otimes_R R_s & \xrightarrow{p'} & A \otimes_R k(s). \end{array}$$

und $|X_s| = |\operatorname{Spec}(A \otimes_R k(s))|$. Wir müssen zeigen, dass $\tilde{\varphi}^{-1}(s) \cong |\operatorname{Spec}(A \otimes_R k(s))|$.

Da das Tensorprodukt auf kanonische Weise verträglich ist mit Lokalisierungen, gibt es einen Ringisomorphismus $A \otimes_R R_s \cong (\varphi(R \setminus s))^{-1}A$ und mit Lemma 4.10 induziert $\operatorname{Spec}(l')$ einen Homöomorphismus

$$|\operatorname{Spec}(A \otimes_R R_s)| \cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap \varphi(R \setminus s) = \emptyset\}.$$

Durch die Rechtsexaktheit des Tensorprodukts gibt es ein kommutatives ungestricheltes Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} s_s & \hookrightarrow & R_s & \xrightarrow{p} & k(s) \\ \vdots & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow \\ (g(s_s)) & \dashrightarrow & A \otimes_R R_s & \xrightarrow{p'} & A \otimes_R k(s) \end{array}$$

mit einer surjektiven Abbildung p'. Nach Korollar A.44 ist der Kern des surjektiven Ringhomomorphismus p' gegeben durch das von $g(s_s)$ erzeugte Ideal $(g(s_s))$ in $A \otimes_R R_s$. Mit Lemma 4.10 induziert $\operatorname{Spec}(p')$ einen Homöomorphismus

$$|\operatorname{Spec}(A \otimes_R k(s))| \cong \mathcal{V}(g(s_s)).$$

Insgesamt ist also X_s homöomorph zu dem Unterraum

$$\begin{array}{rcl} |\operatorname{Spec}(A \otimes_R k(s))| & \cong & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap \varphi(R \setminus s) = \emptyset\} \cap \operatorname{Spec}(l')\mathcal{V}(g(s_s)) \\ & \cong & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap \varphi(R \setminus s) = \emptyset\} \cap \operatorname{Spec}(l')\mathcal{V}(gl(s)) \\ & \cong & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap \varphi(R \setminus s) = \emptyset\} \cap \operatorname{Spec}(l')\mathcal{V}(l'\varphi(s)) \\ & \cong & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap \varphi(R \setminus s) = \emptyset \text{ und } \varphi(s) \subseteq \mathfrak{p}\} \\ & \cong & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = s\} \\ & \cong & \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \tilde{\varphi}(\mathfrak{p}) = s\} \\ & \cong & \tilde{\varphi}^{-1}(s) \end{array}$$

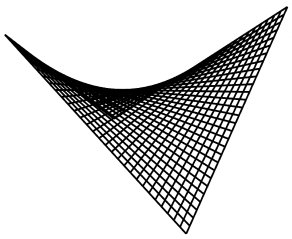
auf die gewünschte Weise. □

Bemerkung 12.15. Nach dem vorherigen Lemma 12.14 können wir ein S-Schema $X \to S$ auffassen als eine Familie von $\operatorname{Spec}(k(s))$-Schemata X_s parametrisiert durch die Punkte s von S.

Beispiel 12.16. Sei k ein Körper und betrachte das $\mathbb{A}^1_k$-Schema

$$\operatorname{Spec}(k[x,y,z]/(xy-z)) \mapsto \operatorname{Spec}(k[z]) = \mathbb{A}^1_k$$

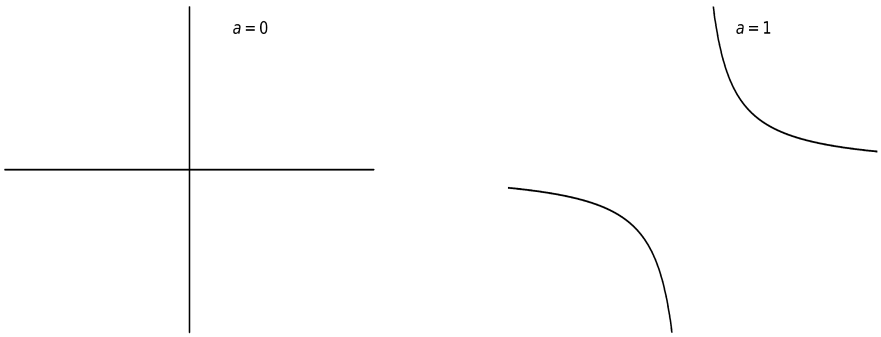
gegeben durch die Inklusion $k[z] \hookrightarrow k[x,y,z] \twoheadrightarrow k[x,y,z]/(xy-z)$.



Betrachte den abgeschlossenen Punkt $s = (z-a) \in \mathbb{A}^1_k$ mit $a \in k$. Dann ist $X_s = \operatorname{Spec}(A_s)$ mit

$$A_s = k[x,y,z]/(xy-z) \otimes_{k[z]} k[z]/(z-a) \cong k[x,y]/(xy-a)$$

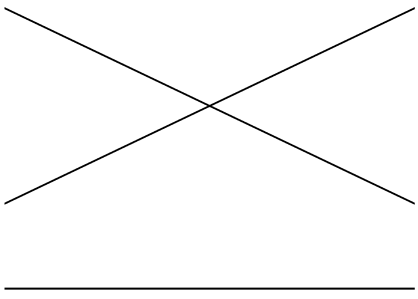
und X_s ist irreduzibel genau dann, wenn $a \neq 0$.



Beispiel 12.17. Sei k ein Körper und betrachte das $\mathbb{A}^1_k$-Schema

$$\operatorname{Spec}(k[x,y]/(xy)) \mapsto \operatorname{Spec}(k[t]) = \mathbb{A}^1_k$$

gegeben durch $k[t] \to k[x,y]/(xy)$ mit $t \mapsto x + y + (xy)$.



Betrachte den abgeschlossenen Punkt $s = (t-a) \in \mathbb{A}^1_k$ mit $a \in k$. Dann ist $X_s = \operatorname{Spec}(A_s)$ mit

$$A_s = k[x,y]/(xy) \otimes_{k[t]} k[t]/(t-a) \cong k[x,y]/(xy, x+y-a) \cong k[x]/(x(x-a))$$

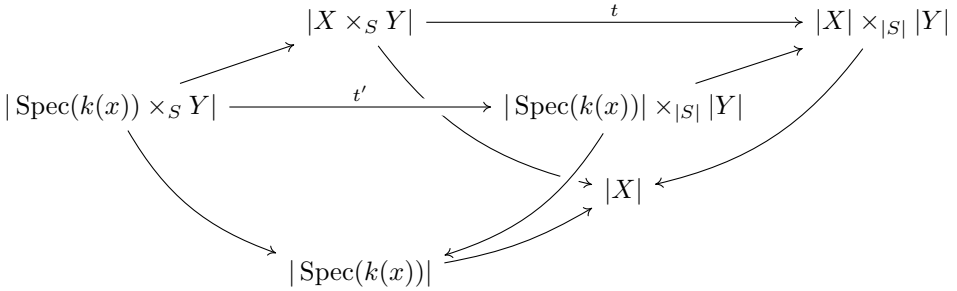
also $A_s \cong k[x]/(x^2)$ falls $a = 0$ und $A_s \cong k \times k$ sonst nach dem Chinesischen Restsatz A.2.

Lemma 12.18. *Seien X und Y zwei S-Schemata. Dann ist die (topologische) Faser der kanonischen surjektiven Abbildung*

$$|X \times_S Y| \twoheadrightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$$

an einem Punkt $(x, s, y) \in |X| \times_{|S|} |Y|$ gegeben durch den Raum $|\operatorname{Spec}(k(x) \otimes_{k(s)} k(y))|$.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm



von topologischen Räumen, das dadurch entsteht, dass wir das hintere Dreieck entlang $|\operatorname{Spec}(k(x))| \to |X|$ zurückziehen. Alle vorkommenden Quadrate sind Faserprodukte topologischer Räume und das linke Quadrat wegen des vorherigen Lemmas 12.14. Es ist also die Faser von t an (x, s, y) die gleiche, wie die Faser von t' an diesem Punkt. Das analoge Argument für $|\operatorname{Spec}(k(y))| \to |Y|$ zeigt, dass wir nur die Faser der Abbildung

$$|\operatorname{Spec}(k(x)) \times_S \operatorname{Spec}(k(y))| \to |\operatorname{Spec}(k(x))| \times_{|S|} |\operatorname{Spec}(k(y))|$$

an (x, s, y) auszurechnen brauchen (Die Quelle dieser Abbildung ist übrigens schon isomorph zu der gesuchten Faser, da das Ziel der Abbildung einpunktig ist.). Um das gleiche Argument zu benutzen und weiter an $|\operatorname{Spec}(k(s))| \to |S|$ zurückzuziehen, müssen wir noch wissen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} |\operatorname{Spec}(k(x))| & = & |\operatorname{Spec}(k(x))| \\ \downarrow & & \downarrow \\ |\operatorname{Spec}(k(s))| & \longrightarrow & |S| \end{array}$$

ein Faserprodukt ist. Dieses können wir mit Lemma 12.14 auch vor der Anwendung von $|-|$ zeigen. Sobald wir dieses gezeigt haben folgt, dass die gesuchte Faser von t genau die Faser von

$$|\operatorname{Spec}(k(x)) \times_{\operatorname{Spec}(k(s))} \operatorname{Spec}(k(y))| \to |\operatorname{Spec}(k(y))| \times_{|\operatorname{Spec}(k(s))|} |\operatorname{Spec}(k(y))|$$

ist, aber das ist genau die Quelle dieser Abbildung, da das Ziel eine einpunktige Menge ist.

Wir sind also in der folgenden Situation: Es sei $\tilde{\varphi}\colon X \to S$ ein Schemamorphismus mit $\tilde{\varphi}(x) = s$ zwischen affinen Schemata $X = \operatorname{Spec}(A)$ und $S = \operatorname{Spec}(R)$ induziert von einem Ringhomomorphismus $\varphi\colon R \to A$ und es bleibt zu zeigen, dass

$$k(x) \otimes_R k(s) \cong k(x)$$

gilt (Man beachte, dass sogar das Tensorprodukt zweier Körper über einem Körper nicht unbedingt ein Körper ist.). Betrachte die kanonische Abbildung $R \to R_s \twoheadrightarrow R_s/s_s = k(s)$ und schreibe $k(x) \otimes_R k(s) \cong (k(x) \otimes_R R_s) \otimes_{R_s} k(s)$. Wir zeigen zunächst, dass $k(x) \otimes_R R_s \cong k(x)$ gilt. Dieses Tensorprodukt ist isomorph zur Lokalisierung des Rings $k(x)$ an dem Bild von $R \setminus s$ darin. Da in einem Körper sowieso schon jedes Element $\neq 0$ invertierbar ist, genügt es zu zeigen, dass dieses Bild keinen Nullteiler, also nicht die Null enthält. Es gibt aber mit der Voraussetzung, dass x auf s abgebildet wird, also $\varphi^{-1}(x) = s$, ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_s & \longrightarrow & A_x \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(s) & \longrightarrow & k(x) \end{array} \tag{12.19}$$

und da alle Elemente in $R \backslash s$ auf Einheiten in $k(s)$ abgebildet werden, bleiben diese Einheiten in dem Bild von $k(s) \hookrightarrow k(x)$.

Es bleibt nun noch zu zeigen, dass $k(x) \otimes_{R_s} k(s) \cong k(x)$ gilt. Betrachte dafür, wie im Beweis von Lemma 12.14, das Diagramm

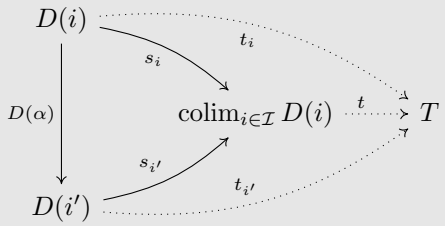
$$\begin{array}{ccccc} s_s & \hookrightarrow & R_s & \twoheadrightarrow & k(s) \\ \vdots & & \downarrow & & \downarrow \\ (\text{Bild von } s_s) & \dashrightarrow & k(x) \otimes_{R_s} R_s & \xrightarrow{p'} & k(x) \otimes_{R_s} k(s). \end{array}$$

Um zu zeigen, dass p' ein Isomorphismus ist, müssen wir also sehen, wieso das Bild von s_s in $k(x)$ Null ist. Dieses folgt aber direkt aus dem Diagramm (12.19). $\square$

13. Einschub: Kategorielle Eigenschaften

Dieses Kapitel ist ein Einschub über „kategorielle Eigenschaften“ der bisher betrachteten Konstruktionen und nicht unbedingt notwendig für den Rest dieses Texts. Es sei daran erinnert, dass wir in Bemerkung 4.8 Kategorien und Funktoren, in Bemerkung 6.9 Äquivalenzen von Kategorien und in Bemerkung 7.21 den kategoriellen Begriff der Adjunktion betrachtet haben.

Definition 13.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $\mathcal{I}$ eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden, die *Indexkategorie* genannt wird und $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Funktor, den man ein *Diagramm* nennt. Ein *Kolimes* von D ist ein $\mathcal{C}$-Objekt $\operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ zusammen mit $\mathcal{C}$-Morphismen $s_i\colon D(i) \to \operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ sodass für jeden $\mathcal{I}$-Morphismus $\alpha\colon i \to i'$ das ungestrichelte Diagramm



kommutiert und für jedes $\mathcal{C}$-Objekt T zusammen mit $\mathcal{C}$-Morphismen $t_i\colon D(i) \to T$ mit der gleichen Eigenschaft ein eindeutiger $\mathcal{C}$-Morphismus $t\colon \operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}} D(i) \to T$ exisitiert, der das gesamte obige Diagramm kommutativ macht.

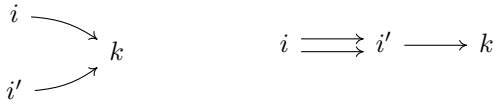
Bemerkung 13.2. Genau wie in Lemma 12.4 zeigt man, dass ein Kolimes eindeutig ist (bis auf eindeutige Isomorphie), sofern er exisitiert. Deshalb kann man bedenkenlos von „dem“ Kolimes eines Diagramms reden. Es wird, etwas ungenau, der Kolimes eines Diagramms D manchmal nur mit dem Objekt $\operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ identifiziert.

Beispiel 13.3.

(1) Ist $\mathcal{I}$ die *leere Kategorie* mit der leeren Menge als Menge der Objekte und $\mathcal{D}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ das eindeutige „leere Diagramm“, so ist der Kolimes von D genau ein *initiales Objekt* in der Kategorie $\mathcal{C}$, also ein Objekt C, sodass es für jedes andere $\mathcal{C}$-Objekt T ein eindeutigen $\mathcal{C}$-Morphismus $C \to T$ gibt. Ein Beispiel hierfür ist die leere Menge $\emptyset$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ oder für $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$, die abelsche Gruppe $\{0\}$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ und der Ring $\mathbb{Z}$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Ring}$.

(2) Ist $\mathcal{I}$ eine *diskrete Kategorie*, also eine Kategorie mit nur den jeweiligen Identitäten als Morphismen, so ist der Kolimes eines Diagramms $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ genau das Koprodukt $\coprod_{i\in\mathcal{I}} D(i)$. Ein Beispiel hierfür ist die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ oder für $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$, die abelsche Gruppe $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ und der Ring $\bigotimes_{\mathbb{Z},i\in\mathcal{I}} D(i)$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Ring}$ und eine endliche Indexkategorie $\mathcal{I}$ (Die Kategorie der Ringe hat zwar auch unendliche Koprodukte, diese sind aber etwas schwieriger zu verstehen).

(4) Ist $\mathcal{I}$ eine *filtrierte Kategorie*, also eine nichtleere Kategorie $\mathcal{I}$ sodass für alle zwei Objekte i und j daraus ein $\mathcal{I}$-Objekt k existiert mit $\mathcal{I}$-Morphismen $i \to k$ und $j \to k$ und sodass für zwei $\mathcal{I}$-Morphismen $i \to i'$ ein $\mathcal{I}$-Morphismus $i' \to k$ existiert, sodass die zwei Kompositionen gleich sind,



so heißt der Kolimes über ein Diagramm $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein *filtrierter Kolimes*. Jedes Poset $(P, \leq)$, also eine Menge mit einer reflexiven, antisymmetrischen (beide Möglichkeiten für ein Paar implizieren Gleichheit) und transitiven Relation, definiert eine Kategorie $\mathcal{I}$ mit einem Morphismus $i \to i'$ genau dann, wenn $i \leq i'$. Diese Kategorie ist filtriert, genau dann, wenn lediglich die erste der beiden obigen Eigenschaften gilt, da es höchstens ein Morphismus $i \to i'$ geben kann. Ist $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$, so ist

ein filtrierter Kolimes gegeben durch die Menge

$$\coprod_{i\in\mathcal{I}} D(i)/_\sim$$

wobei $x_i \in D(i)$ und $x_j \in D(j)$ äquivalent sind genau dann, wenn es $\mathcal{I}$-Morphismen $\alpha\colon i \to k$ und $\beta\colon j \to k$ gibt mit $D(\alpha)(x_i) = D(\beta)(x_j)$, also wenn sie „irgendwann gleich“ werden. Ist $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ oder $\mathcal{C} = \mathbf{Ring}$, so hat diese Menge auch die natürliche Struktur eines $\mathcal{C}$-Objekts analog zu Definition 7.13 und definiert den Kolimes in $\mathcal{C}$. Insbesondere ist der Halm aus Definition 7.13 ein Beispiel eines solchen filtrierten Kolimes.

Bei filtrierten Kolimiten kann man „die ersten Einträge im Diagramm igonrieren“ oder genauer: Ist $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ eine (beliebige) Unterkategorie einer filtrierten Kategorie $\mathcal{I}$ und gibt es für jedes $i \in \mathcal{I}$ einen Morphismus $i \to j$ mit $j \in J$, so ist auch $\mathcal{J}$ eine filtrierte Kategorie und es gilt $\operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}} D(i) = \operatorname{colim}_{j\in\mathcal{J}} D(j)$. Hat also insbesondere $\mathcal{I}$ ein „letztes“ Objekt k, so ist $\operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}} D(i) = D(k)$.

(5) Ist $\mathcal{I}$ die (nicht filtrierte) durch $b \leftarrow a \to c$ gegebene Kategorie (mit den Identitäten), so heißt ein Kolimes eines Diagramms $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ auch ein *Pushout* und wird oft mit dem Symbol „$\ulcorner$“ in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D(a) & \xrightarrow{\beta} & D(b) \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle s_b} \\ D(c) & \xrightarrow{s_c} & \operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}} D(i) \end{array}$$

gekennzeichnet. Solche Pushouts haben wir am Anfang von Kapitel 8 in der Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ der topologischen Räume betrachtet. Wie in Bemerkung A.38 angedeutet, ist das Tensorprodukt $B \otimes_A C$ der Pushout in der Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Ring}$ der Ringe. Die unterliegenden abelschen Gruppen bilden aber keinen Pushout in der Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ der abelschen Gruppen, da dieser durch die abelsche Gruppe

$$B \oplus C \Big/ \{(\beta(a), -\gamma(b)) \in B \oplus C \mid a \in A\}$$

gegeben ist, wie man leicht nachrechnet. Für einen beliebigen Ring A verallgemeinert sich diese Situation auf die Kategorien $\mathcal{C} = A\text{-}\mathbf{Alg}$ der A-Algebren und $\mathcal{C} = A\text{-}\mathbf{Mod}$ der A-Moduln. Insbesondere ist der *Kokern* $\operatorname{coker}(\varphi)$ eines A-Modulhomomorphismus $\varphi\colon M \to N$ der spezielle Pushout

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{coker}(\varphi) \end{array}$$

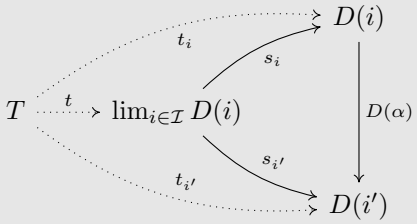
in der Kategorie $\mathcal{C} = A\text{-}\mathbf{Mod}$.

(6) Die in Definition 3.21 betrachtete Menge ist ebenfalls ein Beispiel eines Kolimes und wurde daher auch schon mit den passenden Symbolen bezeichnet. (Genau genommen ist es hier nicht der Fall, dass die Objekte der angegebenen Indexkategorie $\mathcal{I}$ eine Menge bilden. Dieses ist wegen Satz 3.23 aber kein Problem.)

Das zu einem Kolimes duale Konzept ist ein Limes.

Definition 13.4. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $\mathcal{I}$ eine Kategorie, deren Objekte eine Menge bilden, die *Indexkategorie* genannt wird und $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Funktor, den man ein

Diagramm nennt. Ein *Limes* von D ist ein $\mathcal{C}$-Objekt $\lim_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ zusammen mit $\mathcal{C}$-Morphismen $s_i\colon \lim_{i\in\mathcal{I}} D(i) \to D(i)$ sodass für jeden $\mathcal{I}$-Morphismus $\alpha\colon i \to i'$ das ungestrichelte Diagramm



kommutiert und für jedes $\mathcal{C}$-Objekt T zusammen mit $\mathcal{C}$-Morphismen $t_i\colon T \to D(i)$ mit der gleichen Eigenschaft ein eindeutiger $\mathcal{C}$-Morphismus $t\colon T \to \lim_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ exisitiert, der das gesamte obige Diagramm kommutativ macht.

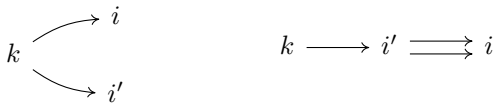
Bemerkung 13.5. Genau wie in Lemma 12.4 zeigt man, dass ein Limes eindeutig ist (bis auf eindeutige Isomorphie), sofern er exisitiert. Deshalb kann man bedenkenlos von „dem“ Limes eines Diagramms reden. Es wird, etwas ungenau, der Limes eines Diagramms D manchmal nur mit dem Objekt $\lim_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ identifiziert.

Beispiel 13.6.

(1) Ist $\mathcal{D}\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ das „leere Diagramm“, so ist der Limes von D genau ein *terminales Objekt* in der Kategorie $\mathcal{C}$, also ein Objekt L, sodass es für jedes andere $\mathcal{C}$-Objekt T ein eindeutigen $\mathcal{C}$-Morphismus $T \to L$ gibt. Ein Beispiel hierfür ist die einpunktige Menge $\{*\}$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ oder für $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$, die abelsche Gruppe $\{0\}$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ und der Nullring (0) für $\mathcal{C} = \mathbf{Ring}$.

(2) Ist $\mathcal{I}$ eine *diskrete Kategorie*, so ist der Limes eines Diagramms $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ genau das Produkt $\prod_{i\in\mathcal{I}} D(i)$. Ein Beispiel hierfür ist das cartesische Produkt $\prod_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ oder für $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$, die abelsche Gruppe $\prod_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ und der Ring $\prod_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Ring}$.

(3) Ist $\mathcal{I}$ eine *kofiltrierte Kategorie*, also eine Kategorie, sodass $\mathcal{I}^{op}$ eine filtrierte Kategorie ist,



so heißt der Limes über ein Diagramm $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein *kofiltrierter Limes*. Bei kofiltrierten Limiten kann man „die letzten Einträge im Diagramm igonrieren“ oder genauer: Ist $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ eine (beliebige) Unterkategorie einer kofiltrierten Kategorie $\mathcal{I}$ und gibt es für jedes $i \in \mathcal{I}$ einen Morphismus $j \to i$ mit $j \in J$, so ist auch $\mathcal{J}$ eine kofiltrierte Kategorie und es gilt $\lim_{i\in\mathcal{I}} D(i) = \lim_{j\in\mathcal{J}} D(j)$. Hat also insbesondere $\mathcal{I}$ ein „erstes“ Objekt k, so ist $\lim_{i\in\mathcal{I}} D(i) = D(k)$.

(4) Ist $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein beliebiges Diagramm für $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$, so ist der Limes gegeben durch die Teilmenge

$$\left\{ \underline{a} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} D(i) \mid D(\alpha)(a_i) = a_{i'} \text{ für alle } i \to i' \text{ in } \mathcal{I} \right\}$$

des kartesischen Produkts, also durch „mit dem Diagramm kompatible“ Elemente des Produkts. Ist $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$, $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ oder $\mathcal{C} = \mathbf{Ring}$, so hat diese Menge eine natürliche Struktur eines $\mathcal{C}$-Objekts und definiert den Limes in $\mathcal{C}$.

(5) Ist $\mathcal{I}$ die durch $b \to a \leftarrow c$ gegebene Kategorie (mit den Identitäten), so heißt ein Limes eines Diagramms $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ auch ein *Pullback* oder ein *Faserprodukt* und wird oft mit dem Symbol „⌟“ in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \lim_{i\in\mathcal{I}} D(i) & \xrightarrow{s_c} & D(c) \\ {\scriptstyle s_b}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ D(b) & \xrightarrow{\beta} & D(a) \end{array}$$

gekennzeichnet. Solche Pullbacks haben wir in Kapitel 12 in der Kategorie $\mathcal{C} = \mathbf{Sch}$ der Schemata untersucht und auch in Bemerkung 5.12 betrachtet. Für $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$, $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$, $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$ oder $\mathcal{C} = \mathbf{Ring}$ ist der Pullback gegeben durch die offensichtliche jeweilige Zusatzstruktur auf der Menge

$$B \times_A C = \{(b, c) \in B \times C \mid \beta(b) = \gamma(c)\}.$$

Für einen beliebigen Ring A verallgemeinert sich diese Situation auf die Kategorien $\mathcal{C} = A\text{-}\mathbf{Alg}$ der A-Algebren und $\mathcal{C} = A\text{-}\mathbf{Mod}$ der A-Moduln. Insbesondere ist der *Kern* $\ker(\varphi)$ eines A-Modulhomomorphismus $\varphi\colon M \to N$ der spezielle Pullback

$$\begin{array}{ccc} \ker(\varphi) & \longrightarrow & M \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ 0 & \longrightarrow & N \end{array}$$

in der Kategorie $\mathcal{C} = A\text{-}\mathbf{Mod}$.

(7) Ein Equalizer-Diagramm, wie wir in Definition 7.8 betrachtet haben, ist ein Beispiel für einen speziellen Limes.

Bemerkung 13.7. Leider gibt es in der Literatur verschiedene und teilweise verwirrende Bezeichnungen für Limiten und Kolimiten, manchmal auch nur in speziellen Situationen:

Kolimes	Limes
induktiver Limes	projektiver Limes
direkter Limes	inverser Limes
(„Quotienten von Koprodukten“)	(„Unterstrukturen von Produkten“)

Bemerkung 13.8. Ist $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Diagramm und $X \in \mathcal{C}$ ein Objekt, so ist die Komposition

$$\mathcal{I} \xrightarrow{D} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)} \mathbf{Set}$$

ein Diagramm und es gibt eine in X natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_{i\in\mathcal{I}} D(i)) \;\cong\; \lim_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, D(i))$$

sofern der Limes $\lim_{i\in\mathcal{I}} D(i)$ existiert. Grob gesprochen kann man einen Limes „hinten aus einem Hom als Limes herausziehen“. Analog kann man einen Kolimes, falls dieser exisitiert, „vorne aus einem Hom als Limes herausziehen“. Es gibt also eine in einem Objekt $Y \in \mathcal{C}$ natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}} D(i), Y) \;\cong\; \lim_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(D(i), Y).$$

Dieses kann man jeweils leicht direkt mit den Definitionen 13.1 und 13.4 eines Kolimes und Limes zeigen.

Lemma 13.9 (**Yoneda Lemma**). *Betrachte für eine Kategorie $\mathcal{C}$ den Funktor*

$$\begin{array}{rccc} y\colon & \mathcal{C} & \to & \mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Set}) \\ & X & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X). \end{array}$$

Dann ist die in $X \in \mathcal{C}$ natürliche Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{op},\mathbf{Set})}(y(X), F) & \xrightarrow{\cong} & F(X) \\ \eta & \mapsto & \eta(X)(\mathrm{id}_X) \end{array}$$

eine Bijektion. Insbesondere ist y voll und treu und heißt Yoneda Einbettung.

Beweis. Zunächst ist klar, dass mit $F := y(Y)$ der zweite Teil aus dem ersten folgt, da

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{op},\mathbf{Set})}(y(X), y(Y)) \cong y(Y)(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y).$$

Für den ersten Teil rechnet man leicht nach, dass

$$\begin{array}{rcl} F(X) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fun}(\mathcal{C}^{op},\mathbf{Set})}(y(X), F) \\ s & \mapsto & \eta_s \end{array}$$

mit

$$\begin{array}{rccc} \eta_s(U)\colon & y(X)(U) & \to & F(U) \\ & f & \mapsto & F(f)(s) \end{array}$$

eine Umkehrabbildung zu der gegebenen Abbildung ist. (Es ist noch die Natürlichkeit von η_s zu überprüfen, was verwirrend aber einfach ist.) □

Lemma 13.10. *Ist*

$$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$$

eine Adjunktion, so bewahrt der Linksadjungierte F Kolimiten und der Rechtsadjungierte G Limiten. Ist genauer $D\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Diagramm, für das der Kolimes existiert, so gilt

$$F(\operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}} D(i)) \;\cong\; \operatorname*{colim}_{i\in I} F(D(i))$$

und die analoge Aussage für Limiten.

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage für Limiten. Die duale Aussage für Kolimiten erhält man auf analoge Weise. Es gilt mit der vorherigen Bemerkung 13.8 für ein Objekt $X \in \mathcal{C}$, dass

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(\lim_{i\in\mathcal{I}} D(i))) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), \lim_{i\in\mathcal{I}} D(i)) \\
&\cong \lim_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), D(i)) \\
&\cong \lim_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(D(i))) \\
&\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \lim_{i\in\mathcal{I}} G(D(i)))
\end{aligned}$$

und die Aussage folgt mit der Yoneda Einbettung aus Lemma 13.9. □

Bemerkung 13.11. Ist $D\colon \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ein Diagramm, so gilt

$$\operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}} \operatorname*{colim}_{j\in\mathcal{J}} D(i,j) \;\cong\; \operatorname*{colim}_{j\in\mathcal{J}} \operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}} D(i,j)$$

und die analoge Aussage für Limiten. Man sagt hierzu, dass Kolimiten mit Kolimiten „kommutieren“, falls sie existieren.

Es ist nicht im Allgemeinen richtig, dass Kolimiten mit Limiten kommutieren. Es gibt jedoch Ausnahmen: Filtrierte Kolimiten sind durch den folgenden Satz von besonderer Wichtigkeit.

Satz 13.12. *Filtrierte Kolimiten kommutieren mit endlichen Limiten in* **Set**. *Ist genauer $D\colon \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to$ **Set** ein Diagramm sodass $\mathcal{I}$ eine filtrierte und $\mathcal{J}$ eine endliche Kategorie ist, so gibt es eine kanonische Bijektion*

$$\operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}} \lim_{j\in\mathcal{J}} D(i,j) \;\cong\; \lim_{j\in\mathcal{J}} \operatorname*{colim}_{i\in\mathcal{I}} D(i,j).$$

Bemerkung 13.13. Hier sind ein paar Fakten über die Existenz von Kolimiten und Limiten in den von uns betrachteten Kategorien, die wir nicht beweisen werden:

(1) Die Kategorien **Set**, **Top**, **Ab**, **Ring**, **RS** und **LRS** haben alle Kolimiten und Limiten und es gibt Adjunktionen

diskret :	**Set**	$\leftrightarrows$	**Top**	: vergiss	(Hat auch einen Rechtsadjungierten)
$\mathbb{Z}[-]$:	**Set**	$\leftrightarrows$	**Ab**	: vergiss	
	Ab	$\leftrightarrows$	**Ring**	: vergiss	
Γ :	**Aff**	$\cong$	$\mathbf{Ring}^{op}$	: Spec	(Korollar 10.23)
incl :	**LRS**	$\leftrightarrows$	**RS**		(incl bewahrt keine Limiten)
$\lvert\text{-}\rvert$:	**RS**	$\leftrightarrows$	**Top**	: $(-, ac\mathbb{Z})$	($\lvert\text{-}\rvert$ bewahrt Limiten)

(2) Die Kategorie **Sch** der Schemata hat nach Satz 12.9 Pullbacks, aber nicht alle Limiten und nicht alle Kolimiten. Es existieren Pushouts

$$\begin{array}{ccc}
U_a & \xrightarrow{\beta} & U_b \\
{\scriptstyle\gamma}\downarrow & \ulcorner & \downarrow \\
U_c & \longrightarrow & X
\end{array}$$

von offenen Immersionen β und γ nach Satz 11.14. Die Inklusion **Sch** $\hookrightarrow$ **LRS** bewahrt nicht im Allgemeinen Kolimiten, aber endliche Limiten. Es gibt eine Adjunktion

$$\Gamma : \mathbf{Sch} \leftrightarrows \mathbf{Ring}^{op} : \operatorname{Spec}$$

aber Spec bewahrt nicht im Allgemeinen Pushouts in $\mathbf{Ring}^{op}$ (also Pullbacks in **Ring**).

(3) Es ist eine interessante und nicht-triviale Frage, wann ein Pullback

$$\begin{array}{ccc} B \times_A C & \longrightarrow & C \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ B & \longrightarrow & A \end{array}$$

von Ringen einen Pushout

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(A) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(B) \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(C) & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(B \times_A C) \end{array} \tag{13.14}$$

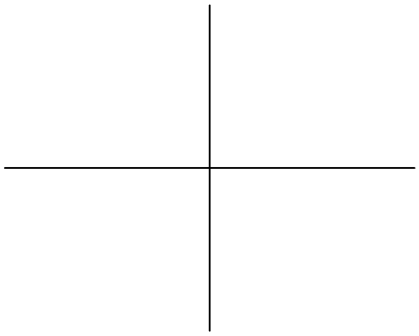
in der Kategorie **Sch** der Schemata induziert. Dieses ist tatsächlich der Fall, wenn die Ringabbildung $B \twoheadrightarrow A$ surjektiv ist (und damit auch die Ringabbildung $B \times_A C \twoheadrightarrow C$ surjektiv ist) und in diesem Fall ist (13.14) auch ein Pushout in **LRS**.

Beispiel 13.15.

(1) Für einen Ring R ist

$$\begin{array}{ccc} R[x,y]/(xy) & \longrightarrow & R[y] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ R[x] & \longrightarrow & R \end{array}$$

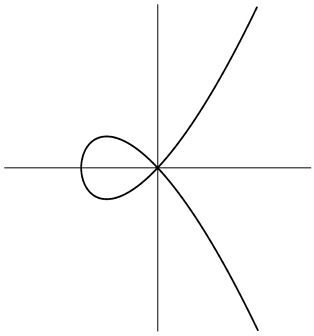
mit den kanonischen Projektionen ein Pullback von Ringen, sodass $R[x] \twoheadrightarrow R$ surjektiv ist. Also ist das zugehörige Diagramm (13.14) ein Pushout von Schemata und nach Anwenden von $|\text{-}|$ auch ein Pushout topologischer Räume. (Das folgende Bild illustriert eher die $\mathbb{R}$-wertigen Punkte, also $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{R}), \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x,y]/(xy)))$ als den topologischen Raum $\mathrm{Spec}(R[x,y]/(xy))$.)



(2) Es ist für $R := \mathbb{R}$ (es ist nur wichtig, dass 2 invertierbar ist)

$$\begin{array}{ccc} R[x,y]/(y^2 - x^3 - x^2) & \longrightarrow & R[t] \\ {\scriptstyle x\mapsto 0 \atop y \mapsto 0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t \mapsto (1,-1)} \\ R & \xrightarrow{\Delta} & R \times R \end{array}$$

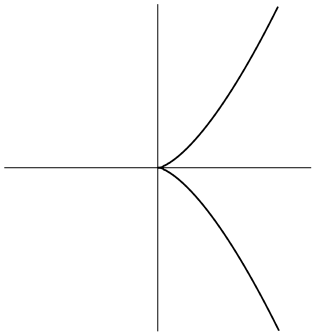
wobei Δ die Diagonale $a \mapsto (a,a)$ bezeichnet und die obere horizontale Abbildung durch $x \mapsto t^2 - 1$ und $y \mapsto t(t^2-1)$ gegeben ist, ein Pullback von Ringen sodass $R[t] \twoheadrightarrow R \times R$ surjektiv ist. Also ist das zugehörige Diagramm (13.14) ein Pushout von Schemata und nach Anwenden von $|\text{-}|$ auch ein Pushout topologischer Räume. (Wie in (1) beschreibt das folgende Bildchen eher die $\mathbb{R}$-wertigen Punkte.)



(3) Es ist für $R := \mathbb{R}$ (oder einen allgemeinen Ring)

$$\begin{array}{ccc} R[x,y]/(y^2-x^3) & \longrightarrow & R[t] \\ {\scriptstyle x\mapsto 0 \atop \scriptstyle y\mapsto 0}\downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ R & \longrightarrow & R[t]/(t^2) \end{array}$$

ein Pullback von Ringen sodass $R[t] \twoheadrightarrow R \times R[t]/(t^2)$ surjektiv ist. Also ist das zugehörige Diagramm (13.14) ein Pushout von Schemata und nach Anwenden von $|\text{-}|$ auch ein Pushout topologischer Räume. (Wie in (1) beschreibt das folgende Bildchen eher die $\mathbb{R}$-wertigen Punkte.)



14. Modulgarben

Genau, wie Schemata grob gesprochen eine Art „Globalisierung“ von Ringen sind, möchten wir auch Moduln über einem Ring zusammenkleben und geometrisch verstehen.

Bemerkung 14.1. Sei X ein topologischer Raum. Sind $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X)$ zwei Prägarben, so definiert die Zuordnung

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F} \times \mathcal{G}\colon & \mathbf{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathcal{S} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U) \end{array}$$

mit dem Produkt der Einschränkungsabbildungen eine Prägarbe $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \in \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X)$ die eine Garbe ist, falls $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben sind (siehe dafür zum Beispiel Bemerkung 13.11 mit dem Hinweis, das ein Equalizer-Diagramm ein spezieller Limes ist).

Definition 14.2. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein *$\mathcal{O}_X$-Modul* ist eine Garbe von abelschen Gruppen $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}^{\mathbf{Ab}}(X)$ zusammen mit einem Garbenmorphismus

$$\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

von Mengen, der *Skalarmultiplikation* genannt wird, sodass für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Abbildung

$$\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

der abelschen Gruppe $\mathcal{F}(U)$ die Struktur eines $\mathcal{O}_X(U)$-Moduls gibt.

Eine Garbenabbildung $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen $\mathcal{O}_X$-Moduln heißt ein *Homomorphismus* von $\mathcal{O}_X$-Moduln (oder *$\mathcal{O}_X$-linear*), falls für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Abbildung $f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismus ist.

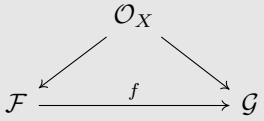
Es bezeichne $\mathcal{O}_X$**-Mod** die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln.

Ein *$\mathcal{O}_X$-Untermodul* eines $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}$ ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$ zusammen mit einem Homomorphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln, der schnittweise injektiv ist. Wir schreiben in diesem Fall $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}$

Ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul des $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{O}_X$ heißt eine *Idealgarbe*.

Eine *$\mathcal{O}_X$-Algebra* ist eine Garbe von Ringen $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}^{\mathbf{Ring}}(X)$ zusammen mit einem Morphismus $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ von Ringgarben.

Ein *$\mathcal{O}_X$-Algebrenhomomorphismus* $f\colon F \to \mathcal{G}$ ist ein Morphismus von Ringgarben, sodass das Dreieck



kommutiert.

Es bezeichne $\mathcal{O}_X$**-Alg** die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Algebren.

Beispiel 14.3.

(1) Sei X ein topologischer Raum, $ac\mathbb{Z}$ die konstante Garbe von Ringen auf X aus Definition 7.22. Betrachte den geringten Raum $(X, ac\mathbb{Z})$. Dann ist ein $ac\mathbb{Z}$-Modul $\mathcal{F}$ genau eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Genauer gibt es eine Äquivalenz $ac\mathbb{Z}$**-Mod** $\cong \mathbf{Sh}^{\mathbf{Ab}}(X)$ von Kategorien.

(2) Betrachtet man den gleichen geringten Raum $(X, ac\mathbb{Z})$ wie in Teil (1), so ist eine $ac\mathbb{Z}$-Algebra genau eine Garbe von Ringen auf X. Genauer gibt es eine Äquivalenz $ac\mathbb{Z}$**-Alg** $\cong \mathbf{Sh}^{\mathbf{Ring}}(X)$ von Kategorien.

(3) Ist A ein Ring und $X = *$ ein einpunktiger topologischer Raum mit Ringgarbe $\mathcal{O}_X$ gegeben durch $\mathcal{O}_X(X) := A$, so entspricht ein $\mathcal{O}_X$-Modul genau einem A-Modul. Genauer gibt es eine Äquivalenz von Kategorien $\mathcal{O}_X$**-Mod** $\cong A$**-Mod** und ebenso $\mathcal{O}_X$**-Alg** $\cong A$**-Alg**.

(4) Ist $(f, f^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung geringter Räume, so ist die zugehörige Abbildung $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ von Garben auf Y eine $\mathcal{O}_Y$-Algebra.

Im Folgenden listen wir einige Eigenschaften von und Konstruktionen in der Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln auf. Sei hierfür stets $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

– (**Halme**) Ist $x \in X$ ein Punkt, so ist analog zu Definition 7.13 die Zuordnung

$$\begin{array}{rccc} (-)_x\colon & \mathcal{O}_X\textbf{-Mod} & \to & \mathcal{O}_{X,x}\textbf{-Mod} \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \operatorname*{colim}_{x\in U\in \mathbf{Ouv}(X)^{op}} \mathcal{F}(U) \\ & f & \mapsto & f_x \end{array}$$

ein Funktor und heißt der *Halm von $\mathcal{F}$ an x*.

– (**Quotienten**) Ist $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul, so ist die Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$$

nicht unbedingt eine Garbe. Ihre Garbifizierung ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ und heißt der *Quotient von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$*. Da die Garbifizierung die Halme nicht ändert, gilt für einen Punkt $x \in X$, dass $(\mathcal{F}/\mathcal{G})_x \cong \mathcal{F}_x/\mathcal{G}_x$.

– (**Kerne**) Ist $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist die Prägarbe

$$U \mapsto \ker(f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

eine Garbe und ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{F}$. Sei heißt der *Kern von f* und wird mit $\ker(f)$ bezeichnet. Da in der Kategorie von abelschen Gruppen filtrierte Kolimiten mit Faserprodukten kommutieren, gilt für einen Punkt $x \in X$, dass $\ker(f)_x \cong \ker(f_x)$. Da f schnittweise injektiv ist genau dann, wenn f halmweise injektiv ist, ist dieses außerdem äquivalent zu $\ker(f) = 0$.

– (**Bilder**) Ist $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist die Prägarbe

$$U \mapsto \operatorname{im}(f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

nicht unbedingt eine Garbe. Ihre Garbifizierung ist ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\operatorname{im}(f) \hookrightarrow \mathcal{G}$ und heißt das *Bild von f*. Es gilt für einen Punkt $x \in X$, dass $\operatorname{im}(f)_x \cong \operatorname{im}(f_x)$. Durch die Kompatibilität von Quotienten, Kernen und Bildern mit Halmen und der entsprechenden Aussage für abelsche Gruppen, gibt es einen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus

$$\mathcal{F}/\ker(f) \xrightarrow{\cong} \operatorname{im}(f).$$

– (**Exakte Sequenzen**) Eine Sequenz

$$\mathcal{F}' \xrightarrow{f'} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F}''$$

von Homomorphismen von $\mathcal{O}_X$-Moduln heißt *exakt*, falls $\operatorname{im}(f') = \ker(f)$. Nach den vorherigen Bemerkungen ist dieses äquivalent dazu, dass für alle $x \in X$ die Sequenz

$$\mathcal{F}'_x \xrightarrow{f'_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{F}''_x$$

von Homomorphismen von $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduln exakt ist. Ist $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f'} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F}''$ eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln und $U \subseteq X$ eine offene Menge, so ist die Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)$$

exakt.

– (**Direkte Summen und Produkte**) Ist $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine beliebige Familie von $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist die Prägarbe

$$U \mapsto \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}_i(U)$$

eine Garbe und mit komponentenweiser Struktur ein $\mathcal{O}_X$-Modul, der mit $\prod_i \mathcal{F}_i$ bezeichnet wird. Für einen Punkt $x \in X$ ist der kanonische induzierte $\mathcal{O}_{X,x}$-Modulhomomorphismus $(\prod_i \mathcal{F}_i)_x \to \prod_i (\mathcal{F}_i)_x$ nicht unbedingt ein Isomorphismus. Die Prägarbe

$$U \mapsto \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}_i(U)$$

ist nicht unbedingt eine Garbe und dessen Garbifizierung ist (mit komponentenweiser Struktur) ein $\mathcal{O}_X$-Modul, der mit $\bigoplus_i \mathcal{F}_i$ bezeichnet wird. Für einen Punkt $x \in X$ ist $(\bigoplus_i \mathcal{F}_i)_x \to \bigoplus_i (\mathcal{F}_i)_x$ ein $\mathcal{O}_{X,x}$-Modulisomorphismus. Die kanonische injektive $\mathcal{O}_X$-Modulabbildung $\bigoplus_i \mathcal{F}_i \hookrightarrow \prod_i \mathcal{F}_i$ ist ein Isomorphismus, falls $\mathcal{I}$ eine endliche Indexmenge ist.

– (**Erzeugung von Untermoduln**) Sei $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine beliebige Familie von $\mathcal{O}_X$-Untermoduln $\mathcal{F}_i \hookrightarrow \mathcal{F}$. Man definiert den $\mathcal{O}_X$-Untermodul

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}_i := \mathrm{im}(\bigoplus_i \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{F}.$$

Dieses ist die Garbifizierung der durch $U \mapsto \sum_i \mathcal{F}_i(U)$ gegebenen Prägarbe. Da Bilder und direkte Summen kompatibel sind mit Halmen, gibt es für ein $x \in X$ einen $\mathcal{O}_{X,x}$-Modulhomomorphismus $(\sum_i \mathcal{F}_i)_x \cong \sum_i (\mathcal{F}_i)_x$. Außerdem definiert man

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}_i := \ker(\mathcal{F} \to \prod_i (\mathcal{F}/\mathcal{F}_i)) \hookrightarrow \mathcal{F}$$

und diese Garbe ist genau die durch $U \mapsto \bigcap_i \mathcal{F}_i(U)$ gegebene Prägarbe. Für $x \in X$ ist der kanonische $\mathcal{O}_{X,x}$-Modulhomomorphismus $(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}_i)_x \to \bigcap_{i\in\mathcal{I}} (\mathcal{F}_i)_x$ nicht unbedingt ein Isomorphismus. Dieses ist aber der Fall, wenn $\mathcal{I}$ eine endliche Indexmenge ist.

– (**Tensorprodukte**) Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist die Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

mit dem Tensorprodukt der Einschränkungsabbildungen als Einschränkungsabbildungen nicht unbedingt eine Garbe. Ihre Garbifizierung ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul (mit offensichtlicher Struktur) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ und heißt das *Tensorprodukt von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$*. Es gilt für einen Punkt $x \in X$, dass $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x \cong \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$, da Tensorprodukte von abelschen Gruppen mit filtrierten Kolimiten verträglich sind.

Ist $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ eine Idealgarbe, so definiert man den $\mathcal{O}_X$-Untermodul

$$\mathcal{I}\mathcal{F} := \mathrm{im}(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \to \mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{F},$$

bezüglich der Multiplikationsabbildung und für $x \in X$ gilt $(\mathcal{I}\mathcal{F})_x \cong \mathcal{I}_x\mathcal{F}_x$.

– (**Interner Hom**) Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln, so kann man zwei $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismen $f, f' \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ schnittweise „im Ziel“ addieren und mit einem Element $\lambda \in \mathcal{O}_X(X)$ durch $(\lambda f)(U) := \lambda_{|U} f(U)$ skalarmultiplizieren. Die Menge der $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismen zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ wird also zu einem $\mathcal{O}_X(X)$-Modul

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Die Zuordnung

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U})$$

definiert mit Lemma 8.13 eine Garbe, also einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Für einen Punkt $x \in X$ ist der kanonische $\mathcal{O}_{X,x}$-Modulhomomorphismus

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

nicht unbedingt ein Isomorphismus. Dieses ist aber der Fall mit Endlichkeitsbedingungen an $\mathcal{F}$, wie wir später sehen werden. Es ist die Kategorie $\mathcal{O}_X$**-Mod** mit dem Tensorprodukt, der Einheit $\mathcal{O}_X$ und dem internen Hom $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}$ eine sonegannte abgeschlossen monoidale Kategorie, es gibt also einen in $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$, G und $\mathcal{H}$ natürlichen Isomorphismus

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H})).$$

– (**Erzeugung durch globale Schnitte**) Für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{F}(X) \\ f & \mapsto & f(X)(1) \end{array}$$

von $\mathcal{F}(X)$-Moduln, wobei die Umkehrabbildung ein Element $a \in \mathcal{F}(X)$ schickt auf die $\mathcal{O}_X$-Modulabbildung $f \colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$, die durch $f(U) \colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{F}(U)$ mit $1 \mapsto a_{|U}$ gegeben ist. Für eine beliebige Menge $\mathcal{I}$ haben wir folglich auch einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bigoplus_{\mathcal{I}} \mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \cong \prod_{\mathcal{I}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \cong \prod_{\mathcal{I}} \mathcal{F}(X)$$

von $\mathcal{F}(X)$-Moduln und wir sagen, dass eine Familie $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ von Schnitten $a_i \in \mathcal{F}(X)$ den $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ *erzeugt*, wenn die korrespondierende Abbildung $\bigoplus_{\mathcal{I}} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ schnittweise surjektiv ist. Dieses ist der Fall genau dann, wenn für alle $x \in X$ der $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul $\mathcal{F}_x$ durch die Familie $(a_{i,x})_{i\in\mathcal{I}}$ erzeugt wird.

Nun möchten wir das direkte und das inverse Bild anstatt für eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ und Garben für eine Abbildung $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von geringten Räumen und $\mathcal{O}_X$-Moduln definieren. Es sei also $(f, f^\sharp)$ mit $f\colon X \to Y$ und $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ eine Abbildung geringter Räume. Zunächst möchten wir das *direkte Bild*

$$f_*\colon \mathcal{O}_X\textbf{-Mod} \to \mathcal{O}_Y\textbf{-Mod} \tag{14.4}$$

definieren. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ zwei Garben auf X und $V \subseteq Y$ eine offene Menge, so gilt

$$f_*(\mathcal{F} \times \mathcal{F}')(V) = (\mathcal{F} \times \mathcal{F}')(f^{-1}(V)) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \times \mathcal{F}'(f^{-1}(V)) = f_*(\mathcal{F})(V) \times f_*(\mathcal{F}')(V)$$

und daher gilt $f_*(\mathcal{F} \times \mathcal{F}') = f_*\mathcal{F} \times f_*\mathcal{F}'$. Da f_* ein Funktor ist, trägt für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ die Garbe $f_*(\mathcal{F})$ eine $f_*(\mathcal{O}_X)$-Modulstruktur. Durch Komposition mit $f^\sharp$ trägt $f_*(\mathcal{F})$ auch eine $\mathcal{O}_Y$-Modulstruktur. Diese Konstruktion definiert den Funktor (14.4).

Bemerkung 14.5. Für zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ und eine offene Menge $V \subseteq Y$ ist die kanonische Abbildung

$$\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \times \mathcal{F}'(f^{-1}(V)) \to (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}')(f^{-1}(V))$$

$\mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) = f_*(\mathcal{O}_X)(V)$-bilinear und durch Komposition mit $f^\sharp$ auch $\mathcal{O}_Y(V)$-bilinear. Daher liefert die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts eine Abbildung

$$f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*(\mathcal{F}') \to f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}')$$

von $\mathcal{O}_Y$-Moduln, die aber unbedingt weder injektiv noch surjektiv ist.

Nun möchten wir das *inverse Bild*

$$f^*\colon \mathcal{O}_Y\textbf{-Mod} \to \mathcal{O}_X\textbf{-Mod} \tag{14.6}$$

definieren. Sind $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ zwei Garben auf Y, so gilt $f^-(\mathcal{G} \times \mathcal{G}') \cong f^-(\mathcal{G}) \times f^-(\mathcal{G}')$ für Prägarben aber auch für Garben, da die Garbifizierung mit endlichen Produkten verträglich ist. Genau wie beim direkten Bild, trägt für einen $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{G}$ die Garbe $f^-(\mathcal{G})$ also eine $f^-(\mathcal{O}_Y)$-Modulstruktur. Nun definiert aber die mit Satz 8.9 zu $f^\sharp$ adjungierte Abbildung $f^-(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{O}_X$ auf $\mathcal{O}_X$ die Struktur einer $f^-(\mathcal{O}_Y)$-Algebra. Wir setzen das inverse Bild von $\mathcal{G}$ als den $\mathcal{O}_X$-Modul

$$f^*(\mathcal{G}) := f^-\mathcal{G} \otimes_{f^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Diese Konstruktion definiert den Funktor (14.6).

Beispiel 14.7. Ist $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung geringter Räume, so gilt, dass $f^*(\mathcal{O}_Y) \cong \mathcal{O}_X$.

Beispiel 14.8. Ist $f\colon V \hookrightarrow Y$ eine offene Immersion, so gilt analog zu Beispiel 8.8.(3) für einen $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{G}$, dass gilt $f^*(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_{|U}$ die *Einschränkung* ist.

Bemerkung 14.9. Für zwei $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ und eine offene Menge $U \subseteq X$ ist die kanonische Abbildung

$$f^-(\mathcal{G})(U) \times f^-(\mathcal{G}')(U) \to f^-(\mathcal{G} \times \mathcal{G}')(U) \to f^-(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}')(U)$$

$f^-(\mathcal{O}_Y)(U)$-bilinear und induziert daher eine $f^-(\mathcal{O}_Y)$-Modulabbildung

$$f^-(\mathcal{G}) \otimes_{f^-(\mathcal{O}_Y)} f^-(\mathcal{G}') \xrightarrow{\cong} f^-(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}'),$$

die ein Isomorphismus ist. Dieses kann man auf Halmen testen, wobei man die Verträglichkeit dieser mit Tensorprodukten und Satz 8.9 benutzt. Damit bekommt man einen natürlichen Isomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$\begin{aligned} f^*(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{G}') &\cong (f^-\mathcal{G} \otimes_{f^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} (f^-\mathcal{G}' \otimes_{f^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) \\ &\cong (f^-\mathcal{G} \otimes_{f^-\mathcal{O}_Y} f^-\mathcal{G}') \otimes_{f^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \\ &\cong (f^-(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}')) \otimes_{f^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \\ &\cong f^*(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}'). \end{aligned}$$

Satz 14.10. *Sei $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$, $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_X$-**Mod** und $\mathcal{G} \in \mathcal{O}_Y$-**Mod**. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow[\phi]{\cong} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

von $\mathcal{O}_Y(Y)$-Moduln (wobei der $\mathcal{O}_X(X)$-Modul auf der linken Seite durch die Abbildung $f^\sharp(Y)\colon \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ als $\mathcal{O}_Y(Y)$-Modul betrachtet wird), also eine Adjunktion

$$\textit{(Inverses Bild)} \qquad f^* : \mathcal{O}_Y\textbf{-Mod} \rightleftarrows \mathcal{O}_X\textbf{-Mod} : f_* \qquad \textit{(Direktes Bild)}.$$

Ist außerdem $g\colon (Y,\mathcal{O}_Y) \to (Z,\mathcal{O}_Z)$ eine weitere Abbildung von geringten Räumen, so sind das inverse und das direkte Bild verträglich mit der Komposition, es gilt also

$$(gf)^* \cong f^*g^* \quad \textit{und} \quad (gf)_* \cong g_*f_*$$

und für $x \in X$, dass $(f^*\mathcal{G})_x \cong \mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{X,x}$.

Ist außerdem $f\colon X \hookrightarrow Y$ eine offene Immersion, so ist die Koeinheit $f^*f_* \to \mathrm{id}$ der obigen Adjuktion ein Isomorphismus.

Beweis. Es ist eine leichte Übung zu zeigen, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G},\mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{f^-\mathcal{O}_Y}(f^-\mathcal{G},\mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G},f_*\mathcal{F})$$

gibt, wobei für den zweiten Isomorphismus Satz 8.9 benutzt wird.

Analog zu Satz 8.9 gilt für einen $\mathcal{O}_Z$-Modul $\mathcal{H}$, dass

$$\begin{array}{rcl}(gf)^*(\mathcal{H}) & \cong & (gf)^-\mathcal{H} \otimes_{(gf)^-\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_X \\ & \cong & (f^-g^-\mathcal{H} \otimes_{f^-g^-\mathcal{O}_Z} f^-\mathcal{O}_Y) \otimes_{f^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \\ & \cong & f^-(g^-\mathcal{H} \otimes_{g^-\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Y) \otimes_{f^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \\ & \cong & f^*(g^-\mathcal{H} \otimes_{g^-\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Y) \\ & \cong & (f^*g^*)(\mathcal{H})\end{array}$$

und die Aussage über das direkte Bild folgt direkt mit Satz 8.9. Für einen Punkt $x \in X$ gilt $(f^*\mathcal{G})_x \cong \mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \mathcal{O}_{X,x}$ mit $(f^-\mathcal{G})_x \cong \mathcal{G}_{f(x)}$ aus Satz 8.9 und der Verträglichkeit des Tensorprodukts und der Garbifizierung mit Halmen.

Für die letzte Behauptung über die Koeinheit sei $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_X\textbf{-Mod}$ und betrachte $f\colon X \hookrightarrow Y$. Dann gibt es mit Satz 8.9 eine natürliche Abbildung

$$f^*f_*(\mathcal{F}) \;=\; f^-f_*(\mathcal{F}) \otimes_{f^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \;\cong\; \mathcal{F} \otimes_{f^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \;\longrightarrow\; \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \;\cong\; \mathcal{F} \tag{14.11}$$

wobei $f^-\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ die zu $f^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ adjungierte Abbildung ist und von der wir zeigen möchten, dass sie ein Isomorphismus ist. Dieses kann man auf Halmen an $x \in X$ testen. Ist aber f eine offene Immersion, so ist f^- nach Beispiel 8.8.(3) die Einschränkung $\mathcal{O}_{Y|X} \cong \mathcal{O}_X$, die sicherlich die gleichen Halme hat. (Dafür, dass (14.11) ein Isomorpismus ist genügt, dass $f^-\mathcal{O}_Y \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X$ surjektiv ist, wofür es in diesem Fall genügt, dass $f^\sharp$ surjektiv ist. Dieses wird im nächsten Kapitel 15 zum Begriff der „abgeschlossene Immersion“ führen.) □

Wir möchten nun eine analoge Version der in Korollar 10.23 betrachteten Äquivalenz

$$\Gamma : \mathbf{Aff} \rightleftarrows \mathbf{Ring}^{op} : \mathrm{Spec}$$

für Moduln über einem Ring bekommen und werden, völlig analog zur Konstruktion der Strukturgarbe, einen volltreuen Funktor

$$\tilde{\cdot}\colon A\textbf{-Mod} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}\textbf{-Mod}$$

konstruieren, der allerdings überraschenderweise keine Äquivalenz von Kategorien definiert. Um tatsächlich eine Äquivalenz von Kategorien zu bekommen, muss man sich auf der rechten Seite auf die sogenannten „quasikohärenten“ $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-Moduln einschränken, die wir definieren werden.

Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Genau wie in Lemma 9.3 setzen wir $X := \mathrm{Spec}(A)$ und betrachten für eine offene Menge $U \subseteq X$ die multiplikative Teilmenge

$$S_U := A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} \mathfrak{p}$$

von A. Dann ist die Zuordnung

$$\begin{array}{rccc}\tilde{M}^{pre}\colon & \mathbf{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & S_U^{-1}M\end{array}$$

eine Prägarbe und mit der offensichtlichen Abbildung ist $\tilde{M}^{pre}(U)$ ein $\mathcal{O}_X^{pre}(U)$-Modul.

Definition 14.12. Die Garbifizierung $\tilde{M}$ von $\tilde{M}^{pre}$ ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul und heißt der *zu M gehörige $\mathcal{O}_X$-Modul* oder der *zu M assoziierte $\mathcal{O}_X$-Modul*.

Beispiel 14.13. Ist $X = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Schema, so gibt es offenbar eine Isomorphie $\mathcal{O}_X \cong \tilde{A}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln.

Genau wie in Lemma 9.5 zeigt man für ein $\mathfrak{p} \in X$, dass

$$\tilde{M}^{pre}_{\mathfrak{p}} \cong \tilde{M}_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}} \tag{14.14}$$

und genau wie in Lemma 9.6, dass für $s \in A$ kompatibel mit den Lokalisierungs und Einschränkungsabbildungen

$$M[\tfrac{1}{s}] \cong \tilde{M}^{pre}(D(s)) \tag{14.15}$$

gilt. Der Beweis von Satz 9.10 lässt sich ebenfalls wörtlich übertragen und die Einschränkung $\phi_*(\tilde{M}^{pre})$ ist eine $\mathfrak{B}$-Garbe. Hierraus folgt insbesondere, genau wie in Korollar 9.11, dass $M[\frac{1}{s}] \cong \tilde{M}(D(s))$ und folglich $\tilde{M}(\operatorname{Spec}(A)) \cong M$, wie in Korollar 9.12.

Satz 14.16. *Sei A ein Ring mit zugehörigem affinen Schema $X = \operatorname{Spec}(A)$, M ein A-Modul und $\mathcal{F}$ ein beliebiger $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{Hom}_A(M, \mathcal{F}(X)) \\ & f & \mapsto & f(X) \end{array}$$

oder mit anderen Worten eine Adjunktion

$$\tilde{\cdot}\colon A\textbf{-Mod} \rightleftarrows \mathcal{O}_X\textbf{-Mod} : \Gamma$$

wobei $\Gamma(\mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$ den Funktor der globalen Schnitte *bezeichne. Außerdem ist die Einheit id $\to \Gamma\tilde{\cdot}$ der obigen Adjunktion ein Isomorphismus und damit A-**Mod** eine koreflexive Unterkategorie von $\mathcal{O}_X$-**Mod** (siehe Bemerkung 7.21).*

Beweis. Es ist klar, dass ϕ eine natürliche Abbildung zwischen den angegebenen Abbildungsmengen ist. Um die Bijektivität zu zeigen, möchten wir eine Umkehrabbildung dazu konstruieren. Sei also $g\colon M \to \mathcal{F}(X)$ eine Abbildung von A-Moduln. Wir möchten einen Morphismus $f\colon \tilde{M} \to \mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln definieren. Nach Satz 9.15 genügt es, dies auf den basisoffenen Mengen $D(s)$ für $s \in A$ kompatibel mit den Einschränkungen zu tun. Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\ g\ } & \mathcal{F}(X) \\ {\scriptstyle l_s}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (-)_{|D(s)}} \\ M[\frac{1}{s}] & \dashrightarrow & \mathcal{F}(D(s)) \end{array} \tag{14.17}$$

welches wir auf die angedeutete Weise vervollständigen möchten. Es ist nun aber $\mathcal{F}(D(s))$ ein $\operatorname{Spec}(A)(D(s)) \cong A[\frac{1}{s}]$-Modul. Daher ist die skalare Multiplikation $s\cdot\colon \mathcal{F}(D(s)) \to \mathcal{F}(D(s))$ bijektiv und nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung von Moduln, existiert ein eindeutiger A-Modulhomomorphismus, wie angedeutet.

Durch Einsetzen von $D(1) = X$ sehen wir zunächst, dass die Zuordnung $g \mapsto f \mapsto f(X)$ die Identität ist. Es ist aber ebenfalls klar, dass $f \mapsto f(X) = g \mapsto f$ die Identität ist, da in dem obigen Diagramm keine Wahl für den induzierten Morphismus möglich ist.

Es gilt $M \cong \Gamma\tilde{M}$ nach (14.15) mit $D(1) = X$ auf eine natürliche Weise, womit die Behauptung über die Einheit der Adjunktion folgt. □

Bevor wir das Bild des Funktors $\tilde{\cdot}$ identifizieren, müssen wir noch etwas über dessen Kompatibilität mit den üblichen Konstruktionen für Moduln sagen.

Lemma 14.18. *Sei A ein Ring und $X := \operatorname{Spec}(A)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) Eine Sequenz

$$M' \to M \to M''$$

von A-Moduln ist exakt genau dann, wenn die Sequenz

$$\tilde{M}' \to \tilde{M} \to \tilde{M}''$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln exakt ist.

(2) Für einen A-Modulhomomorphismus f gilt

$$\tilde{\ker}(f) \cong \ker(\tilde{f}) \quad \textit{und} \quad \tilde{\mathrm{im}}(f) \cong \mathrm{im}(\tilde{f}).$$

(3) Für eine Familie $(M_i)_{i\in\mathcal{I}}$ von A-Moduln gilt

$$\tilde{\bigoplus_i} M_i \cong \bigoplus_i \tilde{M}_i.$$

Beweis. Für (1) beachtet man, dass die Sequenz $\tilde{M}' \to \tilde{M} \to \tilde{M}''$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln per Definition exakt ist genau dann, wenn sie halmweise exakt ist. Nach (14.14) ist dieses also der Fall genau dann, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ die Sequenz $M'_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} \to M''_\mathfrak{p}$ von $A_\mathfrak{p}$-Moduln exakt ist. Aus der Kommutativen Algebra (siehe Anhang A) ist bekannt, dass dieses der Fall ist genau dann, wenn die Sequenz $M' \to M \to M''$ von A-Moduln exakt ist.

Aus (1) folgt unmittelbar (2).

Für die dritte Aussage betrachtet man den Funktor $\tilde{\cdot}$ angewandt auf jede der Inklusionen $M_i \hookrightarrow \bigoplus_i M_i$. Die universelle Eigenschaft der direkten Summe liefert eine $\mathcal{O}_X$-Modulabbildung $\bigoplus_i \tilde{M}_i \to \tilde{\bigoplus}_i M_i$ welche ein Isomorphismus ist, da sie halmweise ein Isomorphismus ist, weil Halme und Lokalisierungen mit direkten Summen verträglich sind. □

Um die folgende Definition zu motivieren, beobachtet man, dass es für einen A-Modul M immer Indexmengen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ und eine exakte Sequenz

$$\bigoplus_\mathcal{L} A \to \bigoplus_\mathcal{K} A \xrightarrow{f} M \to 0 \tag{14.19}$$

von A-Moduln gibt (Man wähle für den linken Teil eine Surjektion $\bigoplus_\mathcal{L} A \twoheadrightarrow \ker(f)$).

Definition 14.20. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ heißt *quasikohärent*, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$ gibt und für jede Überdeckungsmenge U_i Indexmengen $\mathcal{K}_i$, und $\mathcal{L}_i$ und eine exakte Sequenz

$$\bigoplus_{\mathcal{L}_i} \mathcal{O}_{X|U_i} \to \bigoplus_{\mathcal{K}_i} \mathcal{O}_{X|U_i} \xrightarrow{f} \mathcal{F}_{|U_i} \to 0 \tag{14.21}$$

von $\mathcal{O}_{X|U_i}$-Moduln. Es bezeichne $\mathbf{QCoh}(X)$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{O}_X$**-Mod** bestehend aus den quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln.

Bemerkung 14.22. Quasikohärenz ist eine lokale Eigenschaft in der folgenden Weise: Ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $\{U_j \hookrightarrow X\}$ eine offene Überdeckung von X, so ist $\mathcal{F}$ quasikohärent genau dann, wenn jede Einschränkung $\mathcal{F}_{|U_j}$ quasikohärent ist. Dabei ist klar, dass aus der Quasikohärenz von allen $\mathcal{F}_{|U_j}$ die Quasikohärenz von $\mathcal{F}$ folgt. Für die andere Richtung benutzt man, dass die Einschränkungen $(-)_{|U_j}$ als inverse Bilder (siehe Beispiel 14.8) und damit als Linksadjungierte nach Satz 14.10 mit direkten Summen kommutieren und rechtsexakt sind (siehe Lemma 13.10).

Beispiel 14.23.

(1) Mit (14.19) und Lemma 14.18 gilt für $X := \mathrm{Spec}(A)$, dass der $\mathcal{O}_X$-Modul $\tilde{M}$ für einen A-Modul M quasikohärent ist.

(2) Für ein Beispiel eines nicht quasikohärenten Moduls betrachte $X = \coprod_\mathbb{N} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ und die durch die universelle Eigenschaft definierte Abbildung $f\colon X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, die die Identität auf jedem Sumanden ist. Wir behaupten, dass der $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$-Modul $f_*(\mathcal{O}_X)$ nicht quasikohärent ist. Wäre dieses der Fall, so gäbe es nach Korollar 14.25 unten einen $\mathbb{Z}$-Modul M mit $\tilde{M} \cong f_*(\mathcal{O}_X)$. Wegen $f_*(\mathcal{O}_X)(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) = \mathcal{O}_X(X) \cong \prod_\mathbb{N} \mathbb{Z}$ hätte dieser $\mathbb{Z}$-Modul die Form $M \cong \prod_\mathbb{N} \mathbb{Z}$.

Die Abbildung f korrespondiert mit Satz 10.20 zu der Abbildung $\mathbb{Z} \to \prod_\mathbb{N} \mathbb{Z}$ induziert durch die universelle Eigenschaft des Produkts. Wir betrachten die offene Menge $D(s) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ und beobachten $f^{-1}(D(s)) = \coprod_\mathbb{N} D(s) \to D(s)$. Setze zur Abkürzung $U := \coprod_\mathbb{N} D(s)$. Nun gilt

$$\textstyle\prod_\mathbb{N} \mathbb{Z}[\frac{1}{s}] \cong \mathcal{O}_{X|U}(U) \cong \mathcal{O}_X(f^{-1}(D(s))) = f_*(\mathcal{O}_X)(D(s)) \cong \tilde{M}(D(s)) \cong (\prod_\mathbb{N} \mathbb{Z})[\frac{1}{s}],$$

aber Lokalisierung vertauscht nicht mit unendlichen Produkten. Dieses ist ein Widerspruch und somit $f_*(\mathcal{O}_X)$ nicht quasikohärent.

Satz 14.24. *Sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(1) Für jedes offene affine $U := \mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow X$ gibt es einen A-Modul M mit $\mathcal{F}_{|U} \cong \tilde{M}$.

(2) Es gibt eine offene affine Überdeckung $\{\mathrm{Spec}(A_i) \hookrightarrow X\}$ und für jeden Index i einen A_i-Modul M_i mit $\mathcal{F}_{|U_i} \cong \tilde{M}_i$.

(3) $\mathcal{F}$ ist quasikohärent.

(4) Für jedes offene affine $\mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow X$ und jedes $s \in A$ ist die kanonische Abbildung

$$\mathcal{F}(\mathrm{Spec}(A))[\tfrac{1}{s}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(D(s))$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Es ist klar, dass (2) aus (1) folgt. Ebenso folgt sofort (3) aus (2) mit (14.19). Um zu zeigen, dass (1) aus (4) folgt, können wir uns zunächst auf den affinen Fall $X = \mathrm{Spec}(A)$ beschränken. Wir setzen nun $M := \mathcal{F}(X)$. Nach Satz 14.16 gibt es eine Abbildung $\tilde{M} \to \mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Schaut man sich die Konstruktion dieser Abbildung an, genauer Diagramm (14.17), so sehen wir, dass diese auf basisoffenen Mengen nach Bedingung (4) ein Isomorphismus ist, was $\tilde{M} \cong \mathcal{F}$ zeigt.

Nun zeigen wir, dass die Bedingung (3) die Bedingung (4) impliziert. Wir können uns wieder auf den affinen Fall $X = \mathrm{Spec}(A)$ beschränken, da Quasikohärenz nach Bemerkung 14.22 eine lokale Eigenschaft ist. Wir haben gerade gesehen, dass Bedingung (4) gilt, falls $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$ für einen A-Modul M. Nun möchten wir den allgemeinen Fall darauf zurückführen. Da das affine Schema X nach Satz 4.12 quasikompakt ist, gibt es endlich viele Elemente $s_1, \ldots, s_n \in A$ mit $X = \cup_{i=1}^n D(s_i)$ und sodass für Indexmengen $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{L}_i$ die Sequenz

$$\bigoplus_{\mathcal{L}_i} \tilde{A}[\tfrac{1}{s_i}] \to \bigoplus_{\mathcal{K}_i} \tilde{A}[\tfrac{1}{s_i}] \to \mathcal{F}_{|D(s_i)} \to 0$$

von $\mathcal{O}_{D(s_i)}$-Moduln exakt ist, da wir vorausgesetzt haben, dass $\mathcal{F}$ quasikohärent ist und diese Eigenschaft nach Bemerkung 14.22 lokal ist. Nach Satz 14.16 kommt die erste Abbildung in dieser Sequenz von einer Abbildung $f_i \colon \bigoplus_{\mathcal{L}_i} A[\frac{1}{s_i}] \to \bigoplus_{\mathcal{K}_i} A[\frac{1}{s_i}]$ von $A[\frac{1}{s_i}]$-Moduln und mit Teil (1) von Lemma 14.18 ist $\mathcal{F}_{|D(s_i)} = \tilde{M}_i$, wobei M_i der Kokern von f_i ist. Es erfüllt also $\mathcal{F}_{|D(s_i)}$ die Bedingung (4). Ebenso zeigt man, dass $\mathcal{F}_{|D(s_i)\cap D(s_j)} = \mathcal{F}_{D(s_i s_j)}$ die Bedingung (4) erfüllen. Nun bekommt man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(X)[\frac{1}{s}] & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{F}(D(s_i))[\frac{1}{s}] & \longrightarrow & \prod_{i,j} \mathcal{F}(D(s_i s_j))[\frac{1}{s}] \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(D(s)) & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{F}(D(s s_i)) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \mathcal{F}(D(s s_i s_j))
\end{array}$$

wobei die obere Zeile die Lokalisierung weg von s der üblichen exakten Sequenz für die Garbenbedingung ist. Diese ist wieder exakt, da die vorkommenden Produkte endlich sind und also mit Lokalisierung vertauschen. Die untere Zeile ist ebenfalls exakt wegen der Garbenbedingung. Da wir schon beobachtet haben, dass die rechten beiden vertikalen Abbildungen Isomorphismen sind, ist es auch die linke wegen des Fünferlemmas. □

Korollar 14.25. *Sei A ein Ring mit zugehörigem affinen Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$. Die Zuordnung aus Satz 14.16 schränkt ein zu einer Äquivalenz*

$$\tilde{\cdot} : A\textbf{-Mod} \rightleftarrows \textbf{QCoh}(X) : \Gamma$$

von Kategorien.

Lemma 14.26. *Sei X ein Schema. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) Kerne und Bilder von Morphismen zwischen quasikohärenten Moduln sind wieder quasikohärent.

(2) Direkte Summen von quasikohärenten Moduln sind wieder quasikohärent.

(3) *Summen und endliche Durchschnitte von quasikohärenten Untermoduln in einem quasikohärenten Modul sind quasikohärent.*
(4) *Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist auch $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ quasikohärent und es gilt für eine offene affine Teilmenge $U = \operatorname{Spec}(A) \hookrightarrow X$, dass*

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})(U) \cong \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U).$$

Beweis. Behauptungen (1),(2) und (3) folgen direkt aus Satz 14.24 und Lemma 14.18. Für die letzte Behauptung (4) zeigen wir zunächst, dass es für ein affines Schema $X = \operatorname{Spec}(A)$ und A-Moduln M und N einen Isomorphismus

$$\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \cong (M \otimes_A N)^{\sim}$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln gibt. Das linke Tesorprodukt ist definiert als die Garbifizierung der Prägarbe $\tilde{M}(-) \otimes_{\mathcal{O}_X(-)} \tilde{N}(-)$ und auf basisoffenen Mengen gibt es einen funktoriellen und mit Einschränkungen kompatiblen Isomorphismus

$$\tilde{M}(D(s)) \otimes_{\mathcal{O}_X(D(s))} \tilde{N}(D(s)) \cong M[\tfrac{1}{s}] \otimes_{A[\frac{1}{s}]} N[\tfrac{1}{s}] \cong (M \otimes_A N)[\tfrac{1}{s}].$$

Dieses zeigt die Zwischenbehauptung. Da $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ quasikohärent sind, sind sie nach dem vorherigen Satz 14.24 lokal auf $U = \operatorname{Spec}(A)$ von der Form $\tilde{M}$ und $\tilde{N}$. Nach der obigen Beobachtung ist das Tensorprodukt von $\tilde{M}$ und $\tilde{N}$ auch im Bild von $\tilde{\cdot}$ und insbesondere quasikohärent. Also ist auch $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ quasikohärent. Die letzte Behauptung folgt mit der Garbeneigenschaft und dem Fünferlemma wie im Beweis von Satz 14.24. □

Genau wie wir in Satz 8.18 Garben auf einem topologischen Raum miteinander verklebt haben, möchten wir nun auch $\mathcal{O}_X$-Moduln auf einem geringten Raum miteinander verkleben. Dieses geht tatsächlich vollständig analog zu der Situation bei Garben. Insbesondere ist die folgende Definition ist komplett Definition 8.15.

Definition 14.27. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathfrak{U}_X := \{U_i \hookrightarrow X\}_{i \in \mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung. Ein *Verklebedatum $(\mathcal{F}_i, \phi_{ji})$ für $\mathcal{O}_X$-Moduln auf $\mathfrak{U}_X$* ist eine Familie

$$\mathcal{F}_i \colon \mathbf{Ouv}(U_i)^{op} \to \mathbf{Ab}$$

von $\mathcal{O}_{U_i}$-Moduln zusammen mit $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}$-Modulisomorphismen

$$\phi_{ji} \colon \mathcal{F}_{i|U_{ij}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{j|U_{ji}}$$

die die Kozykelbedingung (8.16) erfüllen. Ein Morphismus von solchen Verklebedaten definiert man wie in Definition 8.15. Die Verklebedaten für $\mathcal{O}_X$-Moduln auf $\mathfrak{U}_X$ bilden zusammen mit ihren Morphismen eine Kategorie, die mit $\mathfrak{U}_X$**-Mod** bezeichnet wird.

Auf analoge Weise definiert man die Kategorie $\mathbf{QCoh}(\mathfrak{U}_X)$ der Verklebedaten für quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln.

Ebenso vollständig analog zu Satz 8.18 zeigt man den folgenden Satz, der mit technischen Worten wieder ungefähr sagt, dass der „Funktor“ $(-)$**-Mod**$\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to$ 2-**Cat** und der Funktor $\mathbf{QCoh}(-)\colon \mathbf{Ouv}(X)^{op} \to$ 2-**Cat** jeweils einen Stack definieren. Mit dieser Formulierung ergeben sich sofort interessante Fragen nach einer Verallgemeinerung von Satz 14.28: Was passiert, wenn wir anstelle einer offenen Überdeckung, geschrieben als ein einzelner Morphismus $\mathfrak{U}_X = \coprod_i U_i \to X$, andere Morphismen von Schemata zulassen und anstelle der Einschränkung in der Definition 14.27 das zugehörige inverse Bild betrachten? Ein bedeutener Satz in dieser Richtung stammt von Grothendieck: Quasikohärente Moduln erfüllen sogar Abstieg (es gilt also die analoge Version von Satz 14.28) bezüglich einer sogenannten „étalen Überdeckung“.)

Satz 14.28. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathfrak{U}_X := \{U_i \hookrightarrow X\}_{i \in \mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung. Der Funktor*

$$\begin{array}{rccl} gd_{\mathfrak{U}_X}\colon & \mathcal{O}_X\textbf{-Mod} & \to & \mathfrak{U}_X\textbf{-Mod} \\ & \mathcal{F} & \mapsto & (\mathcal{F}_{|U_i}, (\mathcal{F}_{|U_i})_{U_{ij}} \xrightarrow{=} (\mathcal{F}_{|U_j})_{U_{ij}}) \end{array}$$

ist voll, treu und essentiell surjektiv und damit eine Äquivalenz von Kategorien. Durch die in Bemerkung 14.22 erklärte Lokalität der Quasikohärenzeigenschaft schränkt diese

Äquivalenz ein zu einer Äquivalenz

$$gd_{\mathfrak{U}_X}: \quad \mathbf{QCoh}(\mathcal{O}_X) \quad \to \quad \mathbf{QCoh}(\mathfrak{U}_X)$$

von Kategorien.

Der folgende Satz sagt mit anderen und bisher nicht als bekannt vorausgesetzten Worten, dass ein quasikohärenter Modul auf einem affinen Schema keine höhere sogenannte „Čech-Kohomologie“ hat. Es gibt sogar eine Umkehrung zu diesem Satz (zumindest für sogenannte „qcqs“ Schemata), die das *Kriterium von Serre für Affinität* genannt wird.

Satz 14.29 (**Exakte Sequenzen auf affinen Schemata**). *Sei $X = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Schema und*

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f'} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F}'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Sei außerdem $\mathcal{F}'$ quasikohärent. Dann ist auch

$$0 \to \mathcal{F}'(X) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X) \to 0$$

eine exakte Sequenz. Eine exakte Sequenz von quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln auf einem affinen Schema ist also exakt genau dann, wenn sie schnittweise exakt ist.

Beweis. Nach Satz 14.24 gilt $\mathcal{F}' \cong \tilde{M}$ für einen A-Modul M. Wir wissen bereits, dass der globale Schnittfunktor linksexakt ist und müssen daher nur zeigen, dass die Abbildung

$$f(X)\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X)$$

von A-Moduln surjektiv ist. Sei dazu $b \in \mathcal{F}''(X)$ ein globaler Schnitt zu dem wir ein Urbild $\bar{a} \in \mathcal{F}(X)$ finden möchten. Durch die Quasikompaktheit von X nach Satz 4.12 und die vorausgesetzte halmweise Surjektivität von f gibt es eine endliche basisoffene Überdeckung $\{U_i := D(s_i) \hookrightarrow X\}_{i=0}^n$ von X und Elemente $a_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $f(U_i)(a_i) = b_{|U_i}$.

Wir zeigen unten, dass es für jeden Index i einen globalen Schnitt $\bar{a}_i \in \mathcal{F}(X)$ gibt mit $f(X)(\bar{a}_i) = s_i^{d_i} b$ für irgendwelche Exponenten d_i. Dann können wir, durch Veränderung von $\bar{a}_i$, annehmen dass alle diese $d_i = d$ gleich sind, indem wir jeweils mit s_i geeignet oft multiplizieren. Da $D(s_0) \cup \ldots \cup D(s_n) = X$ gilt, folgt somit nach Korollar 4.5 auch $D(s_0^d) \cup \ldots \cup D(s_n^d) = X$ und daher $(s_0^d, \ldots, s_n^d) = A$. Es gibt also Elemente $\lambda_i \in A$ mit $1 = \sum_{i=0}^n \lambda_i s_i^d$. Dann setzen wir

$$\bar{a} := \sum_{i=0}^n \lambda_i \bar{a}_i,$$

welches ein gewünschtes Urbild ist, weil

$$\begin{array}{rcl} f(X)(\bar{a}) & = & f(X)(\sum_{i=0}^n \lambda_i \bar{a}_i) \\ & = & \sum_{i=0}^n \lambda_i f(X)(\bar{a}_i) \\ & = & \sum_{i=0}^n \lambda_i s_i^d b \\ & = & b. \end{array}$$

Wir müssen also nun die $\bar{a}_i$ finden. Sei dafür im Folgenden ein Index i fixiert. Wir wollen also zeigen, dass es ein $\bar{a}_i \in \mathcal{F}(X)$ mit $f(X)(\bar{a}_i) = s_i^{d_i} b$ gibt. Sei j ein zweiter Index. Es sind, eingeschränkt auf $U_{ij} := U_i \cap U_j$, die Elemente $a_{i|U_{ij}}$ und $a_{j|U_{ij}}$ beides Urbilder von $b_{|U_{ij}}$ und wegen der schnittweisen Linksexaktheit gilt daher

$$a_{i|U_{ij}} - a_{j|U_{ij}} = f'(U_{ij})(c_{ij})$$

für ein $c_{ij} \in M[\frac{1}{s_i s_j}]$. Die Restriktionsabbildung von $\mathcal{F}'$ ist gerade die Lokalisierungsabbildung $M[\frac{1}{s_j}] \to M[\frac{1}{s_i s_j}]$. Es gibt also einen Index m_{ij}, sodass $s_i^{m_{ij}} c_{ij} \in M[\frac{1}{s_j}]$ und wir wählen m_i so groß, dass $s_i^{m_i} c_{ij} \in M[\frac{1}{s_j}] \cong \mathcal{F}'(D(s_j))$ gilt für alle j.

Nun betrachten wir für jedes j das Element

$$u_{ij} := \; f'(U_j)(s_i^{m_i} c_{ij}) + s_i^{m_i} a_j \; = \; s_i^{m_i}(\; f'(U_j)(c_{ij}) + a_j \;) \; \in \mathcal{F}(U_j),$$

wobei wir die Multiplikation mit Elementen aus $\mathcal{O}_X(X) = A$ nicht mit einer Einschränkungsbezeichnung versehen. Jedes dieser u_{ij} ist ein Urbild von $s_i^{m_i} b_{|U_j}$ unter $f(U_j)$, da wegen der Exaktheit der erste Summand jeweils auf Null abgebildet wird. Wir wollen nun gerne mit der Garbenbedingung von $\mathcal{F}$ diese u_{ij} zu dem gesuchten Element $\bar{a}_i$ zusammenkleben. Es ist

allerdings nicht unbedingt richtig, dass für zwei Indizes (j,k) die Differenz $u_{ij|U_{jk}} - u_{ik|U_{jk}}$ Null ist und wir müssen diese Elemente noch etwas modifizieren.

Es gilt sicherlich $f(U_{jk})(u_{ij|U_{jk}} - u_{ik|U_{jk}}) = s_i^{m_i} b_{|U_{jk}} - s_i^{m_i} b_{|U_{jk}} = 0$ und wegen der Exaktheit gibt es ein Element $v_{ijk} \in \mathcal{F}'(U_{jk}) \cong M[\frac{1}{s_j s_k}]$ mit $f'(U_{jk})(v_{ijk}) = u_{ij|U_{jk}} - u_{ik|U_{jk}}$. Auf den Dreifachschnitten $U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k$ gilt in $\mathcal{F}(U_{ijk})$, dass

$$\begin{aligned} u_{ij|U_{ijk}} - u_{ik|U_{ijk}} &= s_i^{m_i}((f'(U_{ijk})(c_{ij|U_{ijk}}) + a_{j|U_{ijk}}) - (f'(U_{ijk})(c_{ik|U_{ijk}}) + a_{k|U_{ijk}})) \\ &= s_i^{m_i}(((a_{i|U_{ijk}} - a_{j|U_{ijk}}) + a_{j|U_{ijk}}) - ((a_{i|U_{ijk}} - a_{k|U_{ijk}}) + a_{k|U_{ijk}})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

und wegen der schnittweisen Injektivität von f' auch $v_{ijk}|_{U_{ijk}} = 0 \in \mathcal{F}'(U_{ijk}) \cong M[\frac{1}{s_i s_j s_k}]$. Wie oben gibt es also für jedes Paar (j,k) ein m'_{ijk} mit $s_i^{m'_{ijk}} v_{ijk} = 0$ in $\mathcal{F}'(U_{jk})$. Da es wieder nur endlich viele solche Paare gibt, wählen wir ein gemeinsames größtes solches m'_i und behaupten, dass wir die Elemente $s_i^{m'_i} u_{ij} \in \mathcal{F}(U_j)$ zu einem Element $\bar{a}_i$ zusammenkleben können, welches unter $f(X)$ auf $s_i^{m'_i+m_i} b$ abgebildet wird (letzteres gilt sicherlich mit der Eindeutigkeitseigenschaft von $\mathcal{F}''$). Wir müssen also die Garbenbedingung testen: Für jedes Paar (j,k) gilt aber nach Konstruktion

$$(s_i^{m'_i} u_{ij})_{|U_{jk}} - (s_i^{m'_i} u_{ik})_{|U_{jk}} = s_i^{m'_i}(\ u_{ij|U_{jk}} - u_{ik|U_{jk}}\ ) = s_i^{m'_i} f'(U_{jk})(v_{ijk}) = 0$$

was uns das Verkleben ermöglicht. Wir setzen schließlich $d_i := m'_i + m_i$ und haben die Behauptung gezeigt. □

Lemma 14.30. *Sei $\varphi\colon A \to B$ eine Ringabbildung und $f\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ die zugehörige Abbildung von affinen Schemata. Sei außerdem M ein A-Modul und N ein B-Modul.*

*(1) Ist $\operatorname{res}_\varphi\colon$ **B-Mod** $\to$ **A-Mod** die Restriktion von Skalaren, die einen B-Modul via φ als A-Modul auffasst, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$f_*(\tilde{N}) \cong \operatorname{res}_\varphi(N)^\sim$$

von $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Das direkte Bild entspricht also der Restriktion von Skalaren.

(2) Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$f^*(\tilde{M})(M \otimes_A B)^\sim$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Das inverse Bild entspricht also dem Tensorprodukt.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Behauptung (1). Für ein Element $s \in A$ gilt $f^{-1}(D(s)) = D(\varphi(s))$ nach Lemma 4.9. Daher gibt es einen mit Einschränkungen verträglichen natürlichen Isomorphismus

$$\begin{aligned} f_*(\tilde{N})(D(s)) &\cong \tilde{N}(D(\varphi(s))) \\ &\cong N[\tfrac{1}{\varphi(s)}] \\ &\cong \operatorname{res}_\varphi(N)[\tfrac{1}{s}] \\ &\cong \operatorname{res}_\varphi(N)^\sim(D(s)). \end{aligned}$$

Dieses zeigt das Gewünschte.

Für die zweite Behauptung betrachten wir für alle quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ den natürlichen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\tilde{M}), \mathcal{F}) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\tilde{M}), \tilde{N}) && \text{(Satz 14.24)} \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\tilde{M}, f_*\tilde{N}) && \text{(Satz 14.10)} \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\tilde{M}, \operatorname{res}_\varphi(N)^\sim) && \text{(Teil (1))} \\ &\cong \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{res}_\varphi(N)) && \text{(Satz 14.16)} \\ &\cong \operatorname{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}((M \otimes_A B)^\sim, \mathcal{F}) && \text{(Satz 14.16)} \end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung mit dem Yoneda-Lemma 13.9 und (1) des folgenden Lemmas 14.31. □

Lemma 14.31. *Sei $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von Schemata.*

(1) *Das inverse Bild f^* bewahrt quasikohärente Moduln und schränkt somit zu einem Funktor*

$$f^*\colon \mathbf{QCoh}(Y) \to \mathbf{QCoh}(X)$$

ein.

(2) *Ist X ein noetherscher topologischer Raum so bewahrt das direkte Bild f_* quasikohärente Moduln und schränkt somit zu einem Funktor*

$$f_*\colon \mathbf{QCoh}(X) \to \mathbf{QCoh}(Y)$$

ein.

Beweis. Für Behautung (1) sei $\mathcal{G} \in \mathbf{QCoh}(Y)$. Dies bedeutet, dass es eine offene Überdeckung $\{V_j \hookrightarrow Y\}$ gibt und

$$\bigoplus \mathcal{O}_{Y|V_j} \to \bigoplus \mathcal{O}_{Y|V_j} \to \mathcal{G}_{|V_j} \to 0 \tag{14.32}$$

jeweils eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_{Y|V_j}$-Moduln ist. Es ist $\{U_j \hookrightarrow X\}$ mit $U_j := f^{-1}(V_j)$ eine offene Überdeckung von X. Wir wollen zeigen, dass es eine exakte Sequenz

$$\bigoplus \mathcal{O}_{X|U_j} \to \bigoplus \mathcal{O}_{X|U_j} \to (f^*\mathcal{G})_{|U_j} \to 0$$

von $\mathcal{O}_{X|U_j}$-Moduln gibt, womit (1) gezeigt wäre. Zunächst gilt $f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_j & \xrightarrow{i'_j} & X \\ {\scriptstyle f'_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ V_j & \xrightarrow{i_j} & Y. \end{array}$$

Es gilt $(-)_{|U_j} = i'^*_j$. Mit $i'^*_j f^* \cong (fi'_j)^* \cong (i_j f'_j)^* = f'^*_j i^*_j$ müssen wir also zeigen, dass es eine exakte Sequenz

$$\bigoplus f'^*_j \mathcal{O}_{Y|V_j} \to \bigoplus f'^*_j \mathcal{O}_{Y|V_j} \to f'^*_j \mathcal{G}_{|V_j} \to 0$$

von $\mathcal{O}_{X|U_j}$-Moduln gibt. Dieses folgt aber aus der Anwendung des rechtsexakten und mit direkten Summen kommutierenden Funktors f'^*_j auf (14.32). Dieses zeigt Behauptung (1).

Für die Behauptung (2) sei $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Wir können annehmen, dass $Y = \operatorname{Spec}(B)$ affin ist, denn Quasikohärenz ist nach Bemerkung 14.22 lokal auf Y zu zeigen. (Wir betrachten dann anstelle von X das offene Unterschema $f^{-1}(\operatorname{Spec}(B)) \hookrightarrow X$, welchem ebenfalls ein noetherscher topologischer Raum unterliegt, und wissen, dass $\mathcal{F}_{|f^{-1}(\operatorname{Spec}(B))}$ quasikohärent ist). Sei $\{U_i \hookrightarrow X\}$ eine nach Lemma 11.33 existente endliche offene affine Überdeckung von X. Bezeichnet $f_i\colon U_i \hookrightarrow X \to Y$ die Komposition, so wissen wir nach Lemma 14.30, dass $f_{i,*}(\mathcal{F}_{|U_i})$ quasikohärent ist. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, gibt es für jedes offene $U \subseteq X$ eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \textstyle\prod_i \mathcal{F}(U \cap U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U \cap U_i \cap U_j)$$

und daher insbesondere für ein offenes $V \subseteq Y$ eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{F}(f_i^{-1}(V)) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \mathcal{F}(f_{ij}^{-1}(V)) \\ & & \| & & \| & & \| \\ & & f_*(\mathcal{F})(V) & \longrightarrow & \bigoplus_i f_{i,*}(\mathcal{F}_{|U_i})(V) & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} f_{ij,*}(\mathcal{F}_{|U_{ij}})(V). \end{array}$$

Man beachte, dass der Schnitt $U_{ij} := U_i \cap U_j$ zweier affiner offener Unterschema U_i und U_j von X nicht unbedingt wieder ein affines Schema sein muss und wir nicht unmittelbar fertig sind mit Lemma 14.26, welches besagte, dass der Kern $f_*(\mathcal{F})$ von einer Abbildung quasikohärenter Moduln wieder quasikohärent ist. Nach Lemma 11.33 ist aber jedes U_{ij} ein quasikompaktes Schema und hat daher eine offene affine Überdeckung durch endlich viele Mengen $\{U_{ijk} \hookrightarrow U_{ij}\}$. Genau wie eben mit $f_{ij,*}$ anstelle von f_* gibt es also eine exakte Sequenz dafür und insbesondere eine injektive Abbildung

$$f_{ij,*}(\mathcal{F}_{|U_{ij}})(V) \hookrightarrow \textstyle\bigoplus_k f_{ijk,*}(\mathcal{F}_{|U_{ijk}})(V).$$

Daher ist auch die Sequenz

$$0 \longrightarrow f_*(\mathcal{F})(V) \longrightarrow \bigoplus_i f_{i,*}(\mathcal{F}_{|U_i})(V) \longrightarrow \bigoplus_{i,j,k} f_{ijk,*}(\mathcal{F}_{|U_{ijk}})(V)$$

exakt und $f_*\mathcal{F}$ als Kern einer Abbildung quasikohärenter Moduln wieder quasikohärent. □

Bemerkung 14.33. Wir haben in Beispiel 14.23 gesehen, dass f_* nicht unbedingt quasikohärente Moduln bewahren muss.

15. Abgeschlossene Immersionen und Separiertheit

Wir haben in Definition 11.6 den Begriff einer offenen Immersion von lokalgeringten Räumen kennengelernt. Es ist leider etwas komplizierter eine abgeschlossene Immersion zu definieren. Dieses liegt daran, dass ein offener Unterraum U eines Schemas $(X, \mathcal{O}_X)$ eine (per Definition 11.6 bis auf Isomorphie) eindeutige Struktur eines offenen Unterschemas $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ trägt. Ist aber beispielsweise $X = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Schema, so sind die abgeschlossenen Unterräume $Z \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ per Definition der Zariskitopologie gerade von der Form $\mathcal{V}(I)$ für ein Ideal $I \subseteq A$, es definieren aber verschiedene Ideale (wie zum Beispiel I und I^2) den gleichen abgeschlossenen Unterraum. Wenn wir also beispielsweise die abgeschlossenen Unterräume $\mathcal{V}(I) \cong \operatorname{Spec}(A/I)$ und $\mathcal{V}(I^2) \cong \operatorname{Spec}(A/I^2)$ mit einer Schemastruktur versehen, muss diese wegen Satz 10.20 verschieden sein, falls $A/I \ncong A/I^2$.

Definition 15.1. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X.

(1) Die Teilmenge
$$\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$$
von X, versehen mit der Unterraumtopologie, heißt der *Träger* von $\mathcal{F}$.

(2) Ist $s \in \mathcal{F}(X)$, so heißt die Teilmenge
$$\operatorname{Supp}(s) := \{x \in X \mid s_x \neq 0\}$$
von X, versehen mit der Unterraumtopologie, der *Träger des Schnitts* s.

Beispiel 15.2. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalgeringter Raum, so ist
$$\operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X) = \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x} \neq 0\} = X,$$
da ein lokaler Ring niemals der Nullring ist. Ebenso ist für $1 \in \mathcal{O}_X(X)$
$$\operatorname{Supp}(1) = \{x \in X \mid 1_x \neq 0\} = X.$$

Bemerkung 15.3. Es ist $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ nicht unbedingt eine abgeschlossene Teilmenge von X (Manchmal wird der Support als der Abschluss von $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ definiert.). Dieses ist allerdings der Fall, wenn man für $\mathcal{F}$ gewisse Endlichkeitseigenschaften (quasikohärent und „von endlichem Typ“) fordert, die wir noch genauer kennenlernen werden.

Bemerkung 15.4. Aus der Kommuativen Algebra sollte der folgende Begriff bekannt sein. Ist A ein Ring, M ein A-Modul und $G \subseteq M$ eine Teilmenge so ist die Teilmenge
$$\operatorname{Ann}_A(G) := \{a \in A \mid ag = 0 \text{ für alle } g \in G\}$$
ein Ideal von A und heißt der Annulator von G. Ist $G = \{s\}$ so setzt man zur Abkürzung $\operatorname{Ann}_A(s) := \operatorname{Ann}_A(\{s\})$. Manchmal wird der Ring A im Index weggelassen. Ist A ein Ring und I ein Ideal, so ist es eine leichte Übung zu sehen, dass gilt $\operatorname{Ann}_A(A/I) = I$.

Lemma 15.5. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, $\mathcal{F}$ eine Garbe von abelschen Gruppen auf X und $s \in \mathcal{F}(X)$ ein globaler Schnitt.*

(1) Es ist $\operatorname{Supp}(s)$ eine abgeschlossene Teilmenge von X. Ist $X = \operatorname{Spec}(A)$ affin und $\mathcal{F} = \tilde{M}$ für einen A-Modul M, so gilt
$$\operatorname{Supp}(s) \;=\; \mathcal{V}(\operatorname{Ann}_A(s)).$$

(2) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe von Ringen, so ist $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ eine abgeschlossene Teilmenge von X. Ist $X = \operatorname{Spec}(A)$ affin und $\mathcal{F} = (A/I)^\sim$ für den A-Modul A/I, so gilt
$$\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \mathcal{V}(\operatorname{Ann}_A(A/I)) = \mathcal{V}(I).$$

Beweis. Es ist $\operatorname{Supp}(s)$ stets abgeschlossen, da das Komplement offen ist, da ein Keim per Definition des Halms gleich Null ist genau dann, wenn dieses schon auf einer offenen Umgebung der Fall ist. Für eine Ringgarbe $\mathcal{F}$ gilt die Gleichheit $\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\} = \{x \in X \mid 1_x \neq 0\} = \operatorname{Supp}(1)$, was nach dem ersten Teil abgeschlossen ist. Wir zeigen nur $\operatorname{Supp}(M^\sim) = \mathcal{V}(\operatorname{Ann}(M))$ mit $M := A/I$, da die Gleichheit in (1) analog zu beweisen ist.

Es ist $\operatorname{Supp}(M^\sim) \subseteq \mathcal{V}(\operatorname{Ann}(M))$, denn ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $M_p \neq 0$ und $m \in M$ ein beliebiges Element, das unter der Lokalisierungsabbildung $M \to M_\mathfrak{p}$ auf ein Element $\neq 0$

abgebildet wird, so gilt $\mathrm{Ann}(m) = \{t \in A \mid tm = 0\} \subseteq \mathfrak{p}$. Da m beliebig war, folgt $\mathrm{Ann}(M) \subseteq \mathfrak{p}$ wie gewünscht.

Für die Inklusion $\mathcal{V}(\mathrm{Ann}(M)) \subseteq \mathrm{Supp}(M^\sim)$ sei $\mathfrak{p} \notin \mathrm{Supp}(M^\sim)$, also

$$0 = M_\mathfrak{p} = \mathrm{colim}_{s \in A \setminus \mathfrak{p}} M[\tfrac{1}{s}] \quad \ni 1 + I$$

und es gibt ein s aus der Indexmenge des Kolimes mit $(1+I)_s = 0$, also $s^d 1 \in I$ in A und damit $s^d M = 0$. Nun ist aber $\mathfrak{p} \notin \mathcal{V}(\mathrm{Ann}(M))$ genau dann, wenn $\mathrm{Ann}(M) \not\subseteq \mathfrak{p}$ und um dieses zu bestätigen, haben wir ja schon ein Element $s^d \in \mathrm{Ann}(M) \setminus \mathfrak{p}$ gefunden. □

Bemerkung 15.6. Im Spezialfall der Strukturgarbe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ eines lokalgeringten Raums $(X, \mathcal{O}_X)$ haben wir in Lemma 10.18 die offene Teilmenge $D(s) \subseteq X$ betrachtet. Es gibt eine Inklusion

$$\begin{aligned} D(s) &:= \{x \in X \mid s(x) \neq 0\} \\ &= \{x \in X \mid s_x \text{ liegt nicht im maximalen Ideal des lokalen Rings } \mathcal{O}_{X,x}\} \\ &= \{x \in X \mid s_x \text{ ist eine Einheit in dem lokalen Ring } \mathcal{O}_{X,x}\} \\ &\subseteq \{x \in U \mid s_x \neq 0\} \\ &= \mathrm{Supp}(s), \end{aligned}$$

die nicht unbedingt eine Gleichheit ist.

Definition 15.7. Ein Morphismus $(f, f^\sharp)\colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ von Schemata heißt eine *abgeschlossene Immersion*, falls $f\colon Z \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung ist und falls es einen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \cong f_*\mathcal{O}_Z$ für eine $\mathcal{O}_X$-Idealgarbe $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ gibt. Eine Isomorphieklasse solcher abgeschlossener Immersionen heißt ein *abgeschlossenes Unterschema* von $(X, \mathcal{O}_X)$ und wird oft mit einem seiner Repräsentanten identifiziert.

Bemerkung 15.8. Es folgt direkt aus dem Fünferlemma angewandt auf die exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \to 0$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln, dass die Idealgarbe $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ in der Definition 15.7 für eine gegebene abgeschlossene Immersion eindeutig ist.

Bemerkung 15.9. Definition 11.6 für eine offene Immersion lässt sich wie folgt umformulieren: Ein Morphismus $(f, f^\sharp)\colon (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$ von Schemata heißt eine *offene Immersion*, falls $f\colon U \hookrightarrow X$ eine offene Einbettung ist und falls es einen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus $\mathcal{O}_{X|U} \cong f_*\mathcal{O}_U$ gibt.

Ist $f\colon Z \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Immersion, so beschreibt das folgende Lemma den topologischen Raum Z und die Idealgarbe $\mathcal{I}$ aus Definition 15.7 auf eine andere Weise.

Lemma 15.10. *Ein Morphismus $(f, f^\sharp)\colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ von Schemata ist eine abgeschlossene Immersion genau dann, wenn f eine abgeschlossene Einbettung ist und $f^\sharp$ halmweise surjektiv. In diesem Fall gilt außerdem*

$$\begin{aligned} Z &\cong \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \qquad \textit{und} \\ \mathcal{I} &\cong \ker(f^\sharp) \end{aligned}$$

und die Koeinheit $f^* f_* \to \mathrm{id}$ aus Satz 14.10 ist ein Isomorphismus.

Beweis. Ist $(f, f^\sharp)$ eine abgeschlossene Immersion, so betrachten wir das kommutative Diagramm von $\mathcal{O}_X$-Moduln mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_X/\mathcal{I} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \vdots & & \| & & \downarrow \cong & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker(f^\sharp) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X & \xrightarrow{f^\sharp} & f_*\mathcal{O}_Z & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Es existiert folglich der gestrichelte Pfeil und ist ein Isomorphismus nach dem Fünferlemma. Insbesondere ist $f^\sharp$ halmweise surjektiv, da $\mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ halmweise surjektiv ist. Ist umgekehrt $f^\sharp$ halmweise surjektiv, und damit die untere Zeile in dem obigen Diagramm exakt, so

folgt $\mathcal{O}_X/\ker(f^\sharp) \cong f_*\mathcal{O}_Z$ nach dem Homomorphiesatz. Für $Z \cong \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ betrachten wir den Halmfunktor $(-)_x$ für $x \in X$. Mit Beispiel 8.4.(3) gilt

$$(f_*\mathcal{O}_Z)_x = \begin{cases} \mathcal{O}_{Z,z} & \text{falls } x = f(z) \\ 0 & \text{falls } x \notin f(Z). \end{cases}$$

Hierraus folgt $Z \cong \mathrm{Supp}(f_*\mathcal{O}_Z) \cong \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$, da ein lokaler Ring nicht der Nullring ist.

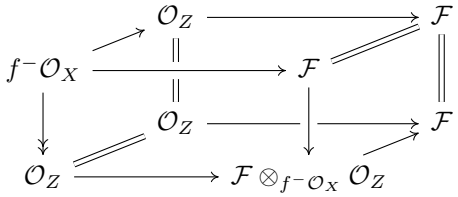
Für die Behauptung über die Koeinheit $f^*f_* \to \mathrm{id}$ argumentieren wir für eine abgeschlossene Immersion $f\colon Z \hookrightarrow X$ zunächst, wie wir es in Satz 14.10 für eine offene Immersion gemacht haben: Es gibt es mit Satz 8.9 eine für $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_Z$-**Mod** natürliche Abbildung

$$f^*f_*(\mathcal{F}) \;=\; f^-f_*(\mathcal{F}) \otimes_{f^-\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \;\cong\; \mathcal{F} \otimes_{f^-\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \;\longrightarrow\; \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Z \;\cong\; \mathcal{F} \tag{15.11}$$

wobei $f^-\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z$ die zu $f^\sharp\colon \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow f_*\mathcal{O}_Z$ adjungierte Abbildung ist. Diese ist ebenfalls surjektiv, da sie durch Anwendung

$$f^-\mathcal{O}_X \twoheadrightarrow f^-f_*\mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_Z$$

des linksexakten Funktors f^- auf $f^\sharp$ und Satz 14.10 entsteht. Nun folgt durch die Betrachtung des Würfels



mit der Eigenschaft, dass die Vorderseite ein Pushout ist, die Surjektivität der sowieso schon injektiven vertikalen rechten Abbildung der Vorderseite und damit die Bijektivität von (15.11), was die Behauptung zeigt. □

Bemerkung 15.12. Es ist nicht richtig, dass durch die Angabe einer $\mathcal{O}_X$-Idealgarbe $\mathcal{I}$ immer ein abgeschlossenes Unterschema $(\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}), \mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ von $(X, \mathcal{O}_X)$ definiert wird, denn der so gegebene geringte Raum muss kein Schema sein. Wir werden in Satz 15.17 unten sehen, dass dieses aber genau dann der Fall ist, wenn $\mathcal{I}$ quasikohärent ist.

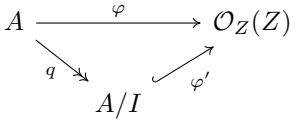
Satz 15.13. *Für ein affines Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$ gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \textit{Ideale von } A \right\} & \rightleftarrows & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Abgeschlossene} \\ \textit{Unterschemata von } X \end{array} \right\} \\ I & \longmapsto & \mathrm{Spec}(A/I) \hookrightarrow X \\ \ker(f^\sharp(X)) & \longmapsfrom & (f, f^\sharp)\colon Z \hookrightarrow X \end{array}$$

Insbesondere ist ein abgeschlossenes Unterschema eines affinen Schemas wieder affin.

Beweis. Die Abbildung $I \mapsto \mathrm{Spec}(A/I)$ ist wohldefiniert, da nach Lemma 4.10 die Abbildung $\mathrm{Spec}(A/I) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ ein abgeschlossener Unterraum ist, $f^\sharp(X)\colon A \twoheadrightarrow A/I$ surjektiv (und da Lokalisierung exakt ist, $f^\sharp$ auch halmweise surjektiv) und daher nach dem obigen Lemma 15.10 also ein abgeschlossenes Unterschema definiert. Außerdem ist die Komposition $I \mapsto \mathrm{Spec}(A/I) \mapsto \ker(f^\sharp(X))$ dann offenbar die Identität.

Sei nun ein abgeschlossenes Unterschema $(f, f^\sharp)\colon Z \hookrightarrow X$ gegeben und sei I der Kern der A-Modulabbildung $\varphi := f^\sharp(X)\colon A \cong \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow (f_*\mathcal{O}_Z)(X) \cong \mathcal{O}_Z(Z)$. Wir möchten zeigen, dass $(f, f^\sharp)$ zu dem abgeschlossenen Unterschema $\mathrm{Spec}(A/I) \hookrightarrow X$ isomorph ist, womit der Satz bewiesen wäre. Es gibt nach dem Homomorphiesatz ein kommutatives Diagramm



von Ringen zu dem nach Satz 10.20 ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\quad f \quad} & Z \\ & {\scriptstyle \tilde{q}} \nwarrow \quad \nearrow {\scriptstyle f'} & \\ & \operatorname{Spec}(A/I) & \end{array} \tag{15.14}$$

von Schemata korrespondiert. Wir zeigen zunächst, dass $(f', f'^\sharp)$ auch eine abgeschlossene Immersion ist. Da f abgeschlossen ist, ist f' eine abgeschlossene Einbettung. Wir müssen noch zeigen, dass $f'^\sharp$ halmweise surjektiv ist. Das obige Diagramm (15.14) liefert das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\quad f^\sharp \quad} & f_*\mathcal{O}_Z \\ & {\scriptstyle \tilde{q}^\sharp} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \tilde{q}_*(f'^\sharp)} & \\ & \tilde{q}_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A/I)} & \end{array}$$

von Ringgarben und $f^\sharp$ ist halmweise surjektiv. Also ist auch $\tilde{q}_*(f'^\sharp)$ halmweise surjektiv. Da der Linksadjungierte $\tilde{q}^*$ halmweise Surjektionen bewahrt, impliziert Lemma 15.10, dass $\tilde{q}^*\tilde{q}_*(f'^\sharp) \cong f'^\sharp$ halmweise surjektiv ist. Damit ist also $(f', f'^\sharp)$ eine abgeschlossene Immersion. Wir möchten zeigen, dass $(f', f'^\sharp)$ tatsächlich ein Isomorphismus von Schemata ist, was den Satz beweisen würde.

Um die Notation zu vereinfachen, nehmen wir an, dass das ursprüngliche $(f, f^\sharp)$ die Eigenschaft hat, dass φ injektiv ist (denn dieses war der Grund, wieso wir $(f', f'^\sharp)$ betrachtet haben), und wir möchten zeigen, dass $(f, f^\sharp)$ ein Schemaisomorphismus ist.

Wir zeigen dafür zunächst, dass f ein Homöomorphismus ist. Nach Voraussetzung ist f stetig, abgeschlossen und injektiv und es genügt die Surjektivität zu zeigen. Nach Definition der abgeschlossenen Mengen in X gilt $f(Z) = \mathcal{V}(J) = \cap_{s\in J}\mathcal{V}(s)$ mit Lemma 4.4. Wir möchten zeigen, dass für $s \in A$ mit $f(Z) \subseteq \mathcal{V}(s)$ schon $\mathcal{V}(s) = X$ folgt, woraus man die Surjektivität abliest. Es gilt $\mathcal{V}(s) = X$ genau dann, wenn $s^d = 0$ für einen Exponenten d nach Satz 5.2. Da φ injektiv ist, genügt es ein d zu finden, sodass $\varphi(s^d) = 0$ gilt. Um Z durch ein affines Schema zu „ersetzen“ und die uns im affinem bekannten Resultate zu benutzen, sei $(j, j^\sharp)\colon (W, \mathcal{O}_{Z|W}) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ ein beliebiges offenes affines Unterschema von Z und betrachte die Komposition

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & \mathcal{O}_Z(Z) & \to & \mathcal{O}_{Z|W}(W) \cong \mathcal{O}_Z(W) \\ s & \mapsto & \varphi(s) & \mapsto & \varphi(s)_{|W}. \end{array} \tag{15.15}$$

Diese Abbildung $\varphi(-)_{|W}$ von Ringen induziert durch Korollar 10.23 gerade die Abbildung $fj\colon W \hookrightarrow Z \to X$ auf Schemata. Daher $j^{-1}f^{-1}(\mathcal{V}(s)) = (fj)^{-1}(\mathcal{V}(s)) = \mathcal{V}(\varphi(s)_{|W}) \subseteq W$ nach Lemma 4.9. Aus der Voraussetzung $f(Z) \subseteq \mathcal{V}(s)$ folgt $Z \subseteq f^{-1}f(Z) \subseteq f^{-1}(\mathcal{V}(s))$. Zusammengenommen gilt $W = j^{-1}(Z) \subseteq j^{-1}f^{-1}(\mathcal{V}(s)) = \mathcal{V}(\varphi(s)_{|W}) \subseteq W$. Daher ist das Element $\varphi(s)_{|W}$ nilpotent nach Satz 5.2, also $\varphi(s)^d_{|W}$. Da X als affines Schema quasikompakt ist mit Satz 4.12, ist auch der abgeschlossene Unterraum Z quasikompakt und wir können Z durch endlich viele offene affine Unterschemata W wie oben überdecken und ein gemeinsames d finden. Damit bekommen wir durch die Eindeutigkeit in der Garbenbedingung von $\mathcal{O}_Z$, dass $\varphi(s)^d = \varphi(s^d) = 0$ und also die gesuchte Homöomorphie.

Wir müssen noch zeigen, dass die $\mathcal{O}_X$-Modulabbildung $f^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Z$ halmweise injektiv ist (und daher ein Isomorphismus nach Lemma 7.16). Wir wissen bisher nur, dass sie auf globalen Schnitten injektiv ist. Sei also $x \in X$. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A \cong \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{\varphi = f^\sharp(X)} & (f_*\mathcal{O}_Z)(X) \cong \mathcal{O}_Z(Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_x \cong \mathcal{O}_{X,x} & \xrightarrow{\quad f_x^\sharp \quad} & (f_*\mathcal{O}_Z)_x = \mathcal{O}_{Z,x} \end{array}$$

gegeben, wobei wir für die Identifikation der unteren rechten Ecke Beispiel 8.4.(3) benutzen und x mit seinem Bild $f(x)$ identifizieren. Wir möchten das Verschwinden von $\ker(f_x^\sharp)$ zeigen.

Sei also $\frac{a}{t} \in A_x$ mit $a \in A$ und $f_x^\sharp(\frac{a}{t}) = 0$. Da der Ringhomomorphismus $f_x^\sharp$ Einheiten auf Einheiten schickt, können wir annehmen, dass $t = 1$. Wir wollen zeigen, dass $\frac{a}{1} = 0 \in A_x$ gilt. Nach der Definition des Halms gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq Z$ von x mit $\varphi(a)_{|W} = 0$.

Dieses können wir affin wählen, da Z ein Schema ist. Da wir schon gezeigt haben, dass f ein Homöomorphismus ist, gibt es darin eine in $\mathrm{Spec}(A)$ basisoffene Umgebung um x, also $x \in D_A(s) \subseteq W$ für ein $s \in A$. Sicherlich ist dann s invertierbar in A_x und es genügt ein d zu finden, sodass $s^d a = 0$ in A gilt. Da φ injektiv ist, genügt es zu zeigen, dass $\varphi(s^d a) = 0$.

Durch die Quasikompaktheit von dem abgeschlossenen Unterraum Z reicht es, wie oben im Beweis der Surjektivität, zu zeigen, dass $\varphi(s^d a)_{|W_i} = 0$ für eine endliche offene affine Überdeckung $\{\mathrm{Spec}(C_i) = W_i \hookrightarrow Z\}$, da wir durch die Endlichkeit der Überdeckung ein gemeinsames d finden und dann die Eindeutigkeit in der Garbenbedingung von $\mathcal{O}_Z$ benutzen können. Anstatt $\varphi(s^d a)_{|W_i} = \varphi(s)^d_{|W_i} \varphi(a)_{|W_i} = 0 \in C_i$ können wir auch zeigen, dass das Element $\varphi(a)_{|W_i}$ zu Null wird in der Lokalisierung $C_i[\frac{1}{\varphi(s)_{|W_i}}]$, also zeigen, dass gilt $\varphi(a)_{|D_{W_i}(\varphi(s)_{|W_i})} = 0$. Dieses ist aber erfüllt, da, wenn $\mathrm{incl}\colon W_i \hookrightarrow Z$ die Inklusion bezeichnet, gilt

$$\begin{aligned}
D_{W_i}(\varphi(s)_{|W_i}) &= \{w \in W_i \mid \varphi(s)_{|W_i}(w) \neq 0\} \\
&= \{w \in W_i \mid \varphi(s)(\mathrm{incl}(w)) \neq 0\} && \text{(Bemerkung 15.16 unten)} \\
&= W_i \cap \{z \in Z \mid \varphi(s)(z) \neq 0\} \\
&= W_i \cap \{z \in Z \mid s(f(z)) \neq 0\} && \text{(Bemerkung 15.16 unten)} \\
&= W_i \cap \{x \in X \mid s(x) \neq 0\} && (f \text{ ist bijektiv}) \\
&= W_i \cap D_A(s) \\
&\subseteq W_i \cap W
\end{aligned}$$

und wir bereits $\varphi(a)_{|W} = 0$ wissen. □

Bemerkung 15.16. Wir erinnern an dieser Stelle noch einmal an die folgende Eigenschaft von Abbildungen in der Kategorie der lokalgeringten Räume, die wir nur aus Gewohnheitsgründen direkt für Schemata formulieren.

Sei $(f, f^\sharp)\colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ eine Morphismus von beliebigen von Schemata (also nicht unbedingt eine abgeschlossene Immersion) und $s \in \mathcal{O}_X(X)$ ein globaler Schnitt. Nach Satz 10.20 können wir diesen auffassen als einen Morphismus $s\colon X \to \mathbb{A}^1$ von Schemata. Wir bezeichnen die Ringabbildung

$$f^\sharp(X) = \mathcal{O}_X(X) \to f_*(\mathcal{O}_Z)(X) = \mathcal{O}_Z(Z)$$

mit φ. Falls $(f, f^\sharp)$ eine offene Immersion ist, so ist $\varphi\colon \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_Z(Z) = \mathcal{O}_X(Z)$ gerade die Restriktionsabbildung $(-)_{|Z}$. Es ist sinnvoll, sich φ auch in anderen Fällen als „Einschränkung“ vorzustellen:

$$z \in \qquad \begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{\ f\ } & X & \xrightarrow{\ s\ } & \mathbb{A}^1 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \varphi(s) & & \end{array}$$

Ist $z \in Z$ so gilt die wichtige Äquivalenz (siehe auch (10.11))

$$\varphi(s)(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad s(f(z)) = 0$$

denn ist $x = f(z)$, so gibt es ein kommutatives Diagramm

$$s \in \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathcal{O}_Z(Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{X,f(z)} & \xrightarrow{\ \varphi'\ } & \mathcal{O}_{Z,z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(f(z)) & \hookrightarrow & k(z) \end{array}$$

und der gestrichelte Ringhomomorphismus existiert, da φ' eine lokale Ringabbildung ist (siehe Bemerkung 10.14 und Definition 10.15) und ist als Ringabbildung zwischen Körpern injektiv, woraus die obige Äquivalenz folgt.

Satz 15.17. *Für ein Schema X gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{Quasikohärente} \\ \text{Idealgarben von } \mathcal{O}_X \end{array} \right\} & \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Abgeschlossene} \\ \text{Unterschemata von } X \end{array} \right\} \\ \mathcal{I} & \longmapsto & (\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}), f^-(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})) \hookrightarrow X \\ \ker(f^\sharp) & \longmapsto & (f, f^\sharp)\colon Z \hookrightarrow X \end{array}$$

wobei $f\colon \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \hookrightarrow X$ die abgeschlossene Einbettung bezeichne.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dasss die Abbildung von links nach rechts wohldefiniert ist. Ersteinmal ist $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ nach Lemma 15.5.(2) eine abgeschlossene Teilmenge von X und damit f eine abgeschlossene Einbettung.

Angenommen, es wäre $(\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}), f^-(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ ein Schema. Die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_X \to f_* f^-(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ ist auf Halmen surjektiv (dieses ist eine leichte Übung mit Beispiel 8.4.(3) und Satz 8.9) und damit ist nach Lemma 15.10 die Abbildung $\mathcal{I} \mapsto (f, f^\sharp)$ wohldefiniert. Dann ist aber auch die Komposition $\mathcal{I} \mapsto (f, f^\sharp) \mapsto \ker(f^\sharp)$ nach Lemma 15.10 die Identität.

Angenommen, es wäre für eine abgeschlossene Immersion $(f, f^\sharp)$ die Idealgarbe $\ker(f^\sharp)$ quasikohärent. Dann wäre auch die Komposition $(f, f^\sharp) \mapsto \ker(f^\sharp) \mapsto (f, f^\sharp)$ nach Lemma 15.10 die Identität.

Für die verbleibenden Behauptungen, dass das Bild von der Abbildung von links nach rechts ein Schema ist und dass das Bild der Abbildung von rechts nach links eine quasikohärente Idealgarbe ist, können wir lokal auf X argumentieren, da diese beiden Bedingungen lokal sind. Wir nehmen also an, dass $X = \mathrm{Spec}(A)$. Ist nun $\mathcal{I}$ quasikohärent, so gilt $\mathcal{I} = \tilde{I}$ für ein Ideal $I \subseteq A$ nach Satz 14.24. Dann gilt $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) = \mathcal{V}(I)$ nach Lemma 15.5 und $f^-(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) = f^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \cong (A/I \otimes_A A/I)^\sim \cong (A/I)^\sim$ nach (15.11) und Lemma 14.30.(2). Daher wird $\mathcal{I}$ auf $\mathrm{Spec}(A/I) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ abgebildet. Ist umgekehrt $Z \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ ein abgeschlossenes Unterschema, so ist dieses nach Satz 15.13 von der Form $\mathrm{Spec}(A/I) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$. Dann ist $\mathcal{I} = \ker(\tilde{A} \to (A/I)^\sim)$ und daher insbesondere quasikohärent nach Lemma 14.26. □

Wir haben in Lemma 12.8 gesehen, dass das Faserprodukt, also das „Zurückziehen" einer offenen Immersion wieder eine solche ist. In Lemma 15.19 unten werden wir zeigen, dass dieses auch für abgeschlossene Immersionen der Fall ist. Dafür benötigen wir jedoch zunächst das folgende Hilfslemma 15.18, das besagt, dass die Eigenschaft eine abgeschlossene Immersion zu sein „affin-lokal auf dem Ziel" ist.

Lemma 15.18. *Sei $f\colon Z \to X$ ein Morphismus von Schemata. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) f ist eine abgeschlossene Immersion.

(2) Für jede Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$ sind die induzierten Morphismen

$$f|_{f^{-1}(U_i)}\colon f^{-1}(U_i) \to U_i$$

jeweils abgeschlossene Immersionen.

(3) Es gibt eine offene affine Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$ sodass alle induzierten Morphismen

$$f|_{f^{-1}(U_i)}\colon f^{-1}(U_i) \to U_i$$

jeweils abgeschlossene Immersionen sind.

Beweis. Dieses ist eine Übung. □

Lemma 15.19. *Sei S ein Schema, X, $Y \in \mathbf{Sch}/S$ und außerdem der Strukturmorphismus $i\colon Y \hookrightarrow S$ eine abgeschlossene Immersion. Betrachtet man das Faserprodukt*

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \xrightarrow{p_X} & X \\ {\scriptstyle p_Y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xhookrightarrow{j} & S, \end{array}$$

so ist sein unterliegender topologischer Raum das Urbild $f^{-1}(Y)$ mit der Unterraumtopologie von X. Außerdem ist p_X ebenfalls eine abgeschlossene Immersion mit zugehöriger quasikohärenter Idealgarbe $\mathcal{I} := \operatorname{im}(f^*\mathcal{J} \to f^*\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_X)$, wenn $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_S$ die zu j gehörige quasikohärente Idealgarbe bezeichne.

Beweis. Wir begründen zunächst, dass p_X eine abgeschlossene Immersion mit zugehöriger quasikohärenter Idealgarbe $\mathcal{I}$ ist. Da die Eigenschaft, eine abgeschlossene Immersion zu sein nach dem vorherigen Lemma 15.18 lokal auf dem Ziel einer Abbildung ist, können wir annehmen, dass $S = \operatorname{Spec}(R)$ und $X = \operatorname{Spec}(A)$ affin sind. Mit Satz 15.13 ist dann auch $Y = \operatorname{Spec}(R/J)$ für ein Ideal $J \subseteq R$ mit $\tilde{J} = \mathcal{J}$. Mit Lemma 12.7 und Korollar A.44 ist $X \times_S Y \cong \operatorname{Spec}(A \otimes_R R/J) = \operatorname{Spec}(A/(\text{Bild von } J \text{ in } A))$ und p_X also induziert durch den surjektiven Ringhomomorphismus $A \twoheadrightarrow A/I$ mit dem Ideal $I :=$ (Bild von J in A). Mit Lemma 14.30.(2) bekommen wir dann die angegebene Beschreibung von $\mathcal{I} = \tilde{I}$.

Nun möchten wir die topologischen Räume identifizieren. Es ist nach Anwenden des rechtsexakten Funktors f^* auf die per Definition exakte Sequenz $\mathcal{J} \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S/\mathcal{J} \to 0$ von $\mathcal{O}_S$-Moduln auch die Sequenz

$$f^*(\mathcal{J}) \to f^*(\mathcal{O}_S) = \mathcal{O}_X \to f^*(\mathcal{O}_S/\mathcal{J}) \to 0$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln exakt. Daher gilt

$$f^*(\mathcal{O}_S/\mathcal{J}) \cong \mathcal{O}_X/\ker \cong \mathcal{O}_X/\operatorname{im} = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$$

nach dem Homomorphiesatz. Nun, behaupten wir, gilt für das topologische Urbild, dass

$$f^{-1}(Y) = f^{-1}(\operatorname{Supp}(\mathcal{O}_S/\mathcal{J})) \overset{*}{=} \operatorname{Supp}(f^*(\mathcal{O}_S/\mathcal{J})) \cong \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}),$$

wobei uns nur die markierte Gleichung unbekannt ist. Für diese Gleichung bleibt noch zu zeigen, dass $\{x \in X \mid \mathcal{G}_{f(x)} \neq 0\} = \{x \in X \mid (f^*\mathcal{G})_x \neq 0\}$ gilt (wobei wir benötigen, dass alle $\mathcal{G}_{f(x)}$ und $(f^*\mathcal{G})_x$ endlich erzeugte Moduln sind, was wir hier für $\mathcal{G} = \mathcal{O}_S/\mathcal{J}$ aber sicherlich gegeben haben).

Sei $\mathcal{G}_{f(x)} = 0$. Dieses ist nach Satz 8.9 äquivalent zu $(f^-\mathcal{G})_x = 0$ und daher ist auch $(f^*\mathcal{G})_x \cong (f^-\mathcal{G} \otimes_{f^-\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X)_x \cong 0 \otimes_{(f^-\mathcal{O}_S)_x} \mathcal{O}_{X,x} \cong 0$.

Ist umgekehrt $\mathcal{G}_{f(x)} \neq 0$, so genügt es für $(f^*\mathcal{G})_x \neq 0$ nach dem Nakayama Lemma A.45 zu zeigen, dass $(f^*\mathcal{G})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \neq 0$ gilt. Wir wissen nach dem gleichen Lemma, dass $\mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,f(x)}} k(f(x)) \neq 0$. Nun folgt die Behauptung aus der Isomorphie

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,f(x)}} k(f(x)) &\cong \mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,f(x)}} k(f(x)) \otimes_{k(f(x))} k(x) \\
&\cong \mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,f(x)}} k(x) \\
&\cong \mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,f(x)}} \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \\
&\cong ((f^-\mathcal{G})_x \otimes_{(f^-\mathcal{O}_S)_x} \mathcal{O}_{X,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \\
&\cong (f^-\mathcal{G} \otimes_{f^-\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X)_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \\
&\cong (f^*\mathcal{G})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im zweiten Schritt, genau wie im Beweis von Lemma 12.18, benutzt, dass für eine Abbildung $f\colon \operatorname{Spec}(k(x)) \to \operatorname{Spec}(R)$ von Schemata, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Spec}(k(x)) & = & \operatorname{Spec}(k(x)) \\
\downarrow & & \downarrow f \\
\operatorname{Spec}(k(f(x))) & \longrightarrow & \operatorname{Spec}(R)
\end{array}$$

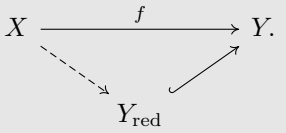
ein Faserprodukt ist, also $k(f(x)) \otimes_R k(x) \cong k(x)$ gilt. □

Lemma 15.20. *Sei X ein Schema. Es gibt ein eindeutiges reduziertes abgeschlossenes Unterschema $i\colon X_{\mathrm{red}} \hookrightarrow X$ von X mit dem gleichen topologischen Raum $|X_{\mathrm{red}}| = |X|$. Diese Zuordnung definiert einen Funktor $(-)_{\mathrm{red}}\colon \mathbf{Sch} \to \mathbf{Sch}$ der rechtsadjungiert ist zur Inklusion der vollen Unterkategorie $\mathbf{Sch}_{\mathrm{red}}$ der reduzierten Schemata, es ist also*

$$i : \mathbf{Sch}_{\mathrm{red}} \leftrightarrows \mathbf{Sch} : (-)_{\mathrm{red}}$$

eine Adjunktion, die sogar eine koreflexive Unterkategorie ist (siehe Bemerkung 7.21). Ist, mit anderen Worten, eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von einem reduzierten Schema X

gegeben, so faktorisiert diese eindeutig und in einer natürlichen Weise als



Beweis. Sei $\mathcal{N}\mathrm{il}$ die Garbifizierung der Prägarbe

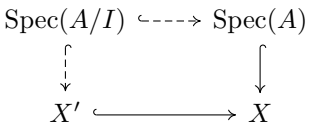
$$\begin{array}{rccc} \mathcal{N}\mathrm{il}^{pre}\colon & \mathbf{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathrm{Nil}(\mathcal{O}_X(U)) \end{array}$$

die das *Nilradikal* des Schemas X genannt wird. Offenbar ist X reduziert genau dann, wenn $\mathcal{N}\mathrm{il} \cong 0$. Ist $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin, so gilt für eine basisoffene Menge $D(s) \subseteq X$, dass

$$\mathcal{N}\mathrm{il}^{pre}(D(s)) = \mathrm{Nil}(A[\tfrac{1}{s}]) = \mathrm{Nil}(A)[\tfrac{1}{s}],$$

da (für ein nicht nilpotentes Element s) $a \in A$ nilpotent ist genau dann, wenn dieses für sein Bild $\frac{a}{1} \in A[\frac{1}{s}]$ gilt. In diesem affinen Fall gilt also $\mathcal{N}\mathrm{il} \cong \mathrm{Nil}(A)^\sim$ und für beliebiges X ist $\mathcal{N}\mathrm{il}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul nach Satz 14.24.. Insbesondere definiert $X/\mathcal{N}\mathrm{il}$ nach Satz 15.17 ein abgeschlossenes Unterschema $X_{\mathrm{red}} \hookrightarrow X$, dass reduziert ist und den gleichen topologischen Raum hat wie X.

Für die Eindeutigkeit, sei $X' \hookrightarrow X$ ein weiteres abgeschlossenes Unterschema mit dem gleichen topologischen Raum $|X'| = |X|$. Nach Definition einer abgeschlossenen Immersion gibt es einen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_{X'}$ für eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ von X. Sei $\mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow X$ ein affines offenes Unterschema. Bilden wir das Faserprodukt



wo wissen wir, dass dieses durch $\mathrm{Spec}(A/I)$ für ein Ideal $I \subseteq A$ (genauer $I \cong \mathcal{I}(\mathrm{Spec}(A))$) gegeben ist (siehe auch Lemma 15.19). Ausserdem ist $|\mathrm{Spec}(A/I)| \cong |\mathrm{Spec}(A)|$ nach Lemma 12.8 und der Voraussetzung $|X'| = |X|$. Es gilt also mit Lemma 4.10, für die topologischen Räume, dass $\mathcal{V}(I) \cong \mathrm{Spec}(A/I) \cong \mathrm{Spec}(A)$ und mit Satz 5.2 folgt $I = \sqrt{I} = \mathrm{Nil}(A)$, wobei die erste Gleichung gilt, da das Schema X' und somit auch das offene Unterschema $\mathrm{Spec}(A/I)$ reduziert sind. Diese Gleichung ist offensichtlich kompatibel mit Einschränkungen und wir bekommen einen Isomorphismus $\mathcal{I} \cong \mathcal{N}\mathrm{il}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln, welcher die Eindeutigkeit liefert.

Für die letzte eindeutige Faktorisierungsaussage überlegt man sich zunächst, dass ein Morphismus, der das abgebildete Dreieck an der gestrichelten Stelle kommutativ macht, eindeutig ist, falls er existiert. Dieses liegt an der Injektivität von $i\colon Y_{\mathrm{red}} \to Y$ auf topologischen Räumen und der halmweisen Surjektivität von $i^\sharp$. Die Existenz eines solchen Morphismus liegt, nachdem man sich mit Korollar 11.16 auf die affine Situation reduziert hat, an der folgenden Eigenschaft für Ringabbildungen. Ist $\varphi\colon A \to B$ eine Ringabbildung, so gilt $\varphi(\mathrm{Nil}(A)) \subseteq \mathrm{Nil}(B)$ für die jeweiligen Nilradikale und es gibt also eine induzierte Ringabbildung $\bar{\varphi}\colon A/\mathrm{Nil}(A) \to B/\mathrm{Nil}(B)$. □

Lemma 15.21. *Sei X ein Schema und $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann gibt es ein eindeutiges reduziertes abgeschlossenes Unterschema $i\colon Z_{\mathrm{red}} \hookrightarrow X$ von X mit unterliegendem topologischen Raum $|Z_{\mathrm{red}}| = Z$.*

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma 15.20 gibt es maximal eine Schemastruktur auf $|Z|$, sodass $Z \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Unterschema ist.

Für die Existenz sei $\{U_i \hookrightarrow X\}$ eine affine offene Überdeckung mit $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. Es ist $Z \cap U_i$ eine abgeschlossene Teilmenge in U_i und ist also von der Form $\mathcal{V}(I_i)$ für ein Ideal $I_i \subseteq A_i$. Es ist (siehe Beispiel 11.38) $Z_{i,\mathrm{red}} := \mathrm{Spec}(A_i/\sqrt{I_i})$ ein reduziertes Schema mit topologischen Raum $Z \cap U_i$. Für alle Paare (i,j) ist $Z_{ij,\mathrm{red}} := (Z \cap U_{ij}, \mathcal{O}_{Z_{i,\mathrm{red}}|Z\cap U_{ij}}) \hookrightarrow Z_{i,\mathrm{red}}$ ein reduziertes offenes Unterschema mit topologischem Raum $Z \cap U_{ij}$. Umgekehrt ist auch $Z_{ji,\mathrm{red}} := (Z \cap U_{ji}, \mathcal{O}_{Z_{j,\mathrm{red}}|Z\cap U_{ji}}) \hookrightarrow Z_{j,\mathrm{red}}$ ein offenes Unterschema mit dem gleichen topologischen Raum. Es gilt $Z_{ij,\mathrm{red}} = Z_{ji,\mathrm{red}}$ (dieses ist eine Übungsaufgabe) und die Kozykelbedingung ist daher erfüllt. Mit Satz 11.14 verkleben die Schemata $Z_{i,\mathrm{red}}$ zu einem Schema

Z_{red} mit topologischem Raum Z. Nun betrachtet man das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z_{i,\mathrm{red}} & \hookrightarrow & U_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_{\mathrm{red}} & \dashrightarrow & X \end{array}$$

Mit Korollar 11.16 existiert der gestrichelte Pfeil (und macht das obige Diagramm zu einem Faserprodukt). Die gestrichelte Abbildung ist ebenfalls eine abgeschlossene Immersion, da man diese Eigenschaft eines Schemamorphismus auf einer offenen Überdeckung des Ziels testen kann. □

Bemerkung 15.22. Es sei daran erinnert, dass ein topologischer Raum *Hausdorff* heißt, wenn zwei verschiedene seiner Punkte disjunkte offene Umgebungen haben. Wir betrachten die (stets injektive) Diagonale

$$\begin{array}{rccc} \Delta\colon & X & \to & X \times X \\ & x & \mapsto & (x,x) \end{array}$$

und beobachten, dass X Hausdorff ist genau dann, wenn $\Delta(X)$ eine abgeschlossene Menge (und mit der Unterraumtopologie also ein abgeschlossener Unterraum) in $X \times X$ ist. Dieses sieht man wie folgt: Sei zunächst X Hausdorff. Wir zeigen, dass jeder Punkt (x,y) im Komplement $X \times X \setminus \Delta(X)$ eine in $X \times X$ offene Umgebung darin hat. Für einen solchen Punkt gilt $x \neq y$. Nach Voraussetzung gibt es offene disjunkte Umgebungen $U_x, U_y \subseteq X$ davon. Per Definition der Produkttopologie ist $U_x \times U_y$ eine offene Menge in $X \times X$, die disjunkt von $\Delta(X)$ ist.

Ist nun umgekehrt $\Delta(X)$ abgeschlossen und sind $x \neq y$ zwei Punkte, so liegt (x,y) in der offenen Teilmenge $X \times X \setminus \Delta(X)$ von $X \times X$. Nach Definition der Produkttopologie, gibt es also offene Mengene $U_x \subseteq X$ und $U_y \subseteq X$ mit $(x,y) \in U_x \times U_y \subseteq X \times X \setminus \Delta(X)$. Dieses sind die gesuchten disjunkten Umgebungen in X.

Wir haben schon gesehen, dass der einem Schema unterliegende topologische Raum fast nie Hausdorff ist. Um ein schematheoretisches Analogon zu diesem Begriff zu definieren, benutzen wir die obige andere Charakterisierung und den zu einer abgeschlossen Einbettung analogen Begriff der abgeschlossenen Immersion.

Definition 15.23. Eine Morphismus $X \to S$ von Schemata heißt *separiert*, falls die durch die universelle Eigenschaft des Faserprodukts (bezüglich $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$) definierte Diagonalabbildung

$$\Delta\colon X \to X \times_S X$$

eine abgeschlossene Immersion ist. Ein Schema heißt X separiert, wenn der eindeutige Schemamorphismus $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ separiert ist.

Bemerkung 15.24. Bezeichnen $p, q\colon |X \times_S X| \to |X|$ die beiden Projektionen, so ist die Inklusion

$$|\Delta(X)| \subseteq \{(x,y) \in |X \times_S X| \mid q(x) = p(y)\}$$

im Gegensatz zu der analogen Situation bei topologischen Räumen nicht unbedingt eine Gleichheit. Ist beispielsweise $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ und $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$, so gilt

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;\cong\; \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \;\cong\; \mathbb{C}[x]/(x^2+1) \;\cong\; \mathbb{C}[x]/(x+1)(x-1) \;\cong\; \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

nach dem Chinesischen Restsatz A.2. Daher besteht der unterliegende topologische Raum von $X \times_S X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ aus zwei Punkten, während $|X|$ und damit auch $|\Delta(X)|$ einpunktig ist.

Lemma 15.25. *Ein Morphismus von affinen Schemata ist separiert und insbesondere ist jedes affine Schema separiert.*

Beweis. Ist $\mathrm{Spec}(A) = X \to S = \mathrm{Spec}(R)$ ein Morphismus affiner Schemata, so ist die Abbildung $\Delta\colon X \to X \times_S X$ per Konstruktion gerade gegeben durch die Multiplikation

$$\begin{array}{rccc} & A \otimes_R A & \to & A \\ & a \otimes a' & \mapsto & aa' \end{array} \tag{15.26}$$

welche offenbar surjektiv ist. Damit ist Δ eine abgeschlossene Immersion. □

Bemerkung 15.27. Es sei daran erinnert, dass ein *Monomorphismus* in einer Kategorie ein Morphismus $f\colon X \to Y$ ist, sodass für alle zwei Morphismen g, $g'\colon T \to X$ die Implikation

$$fg = fg' \quad \Rightarrow \quad g = g'$$

gilt. In der Kategorie der Mengen, der topologischen Räume, der abelschen Gruppen und der Ringe sind die Monomorphismen genau die injektiven Abbildungen. Es ist leicht zu sehen, dass ein Morphismus $f\colon X \to Y$ in einer beliebigen Kategorie ein Monomorphismus ist genau dann, wenn die Diagonale

$$\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$$

ein Isomorphismus ist. Insbesondere ist also ein Monomorphismus von Schemata separiert.

Ein Morphismus in einer Kategorie, der die zu der obigen Bedingung duale Bedingung erfüllt, heißt *Epimorphismus*. In der Kategorie der Mengen und der abelschen Gruppen sind die Epimorphismen genau die surjektiven Abbildungen. In der Kategorie der Ringe ist jede surjektive Abbildung ein Epimorphismus, allerdings ist überraschenderweise auch die (nicht surjektive) Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ein Epimorphismus von Ringen.

Weil ein Epimorphismus in der Kategorie **Ring** mittels Spec einem Monomorphismus in $\mathbf{Aff} \cong \mathbf{Ring}^{op}$ entspricht und die Inklusion $\mathbf{Aff} \subseteq \mathbf{Sch}$ ein Rechtsadjungierter ist, der Limiten und damit auch Monomorphismen bewahrt, wird jeder Epimorphismus von Ringen durch Spec auf einen Monomorphismus von Schemata abgebildet und ist also insbesondere separiert.

Lemma 15.28. *Eine abgeschlossene Immersion $i\colon Z \hookrightarrow X$ von Schemata ist ein Monomorphismus und daher insbesondere separiert.*

Beweis. Seien g, $g'\colon T \to Z$ Schemamorphismen mit $ig = ig'$. Da die i unterliegende Abbildung $|i|$ von topologischen Räumen stetig und injektiv und damit ein Monomorphismus von topologischen Räumen ist, gilt $|g| = |g'|$. Wir wissen nach Lemma 15.10, dass $i^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z$ halmweise surjektiv ist und betrachten $g^\sharp$, $g'^\sharp\colon \mathcal{O}_Z \to g_*(\mathcal{O}_T) = g'_*(\mathcal{O}_T)$ sowie die Komposition

$$\mathcal{O}_X \twoheadrightarrow i_*(\mathcal{O}_Z) \xrightarrow{i_*(g^\sharp) \text{ oder } i_*(g'^\sharp)} i_*g_*(\mathcal{O}_T).$$

Also ist $i_*(g^\sharp) = i_*(g'^\sharp)$. Wir wissen bereits, dass die Koeinheit $i^-i_* \to \mathrm{id}$ ein Isomorphismus ist falls i eine abgeschlossene (oder offene) Immersion ist. Daher folgt $g^\sharp = g'^\sharp$.

Aus der vorherigen Bemerkung 15.27 folgt, dass i separiert ist. □

Lemma 15.29. *Sei X ein Schema. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) X ist separiert.

(2) Für alle affinen offenen Teilmengen U und V von X ist auch der Schnitt $U \cap V$ affin und die kanonische Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(V) & \to & \mathcal{O}_X(U \cap V) \\ s \otimes t & \mapsto & s_{|U\cap V} t_{|U\cap V} \end{array} \tag{15.30}$$

surjektiv.

(3) Es gibt eine affine offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$, sodass auch alle Schnitte $U_i \cap U_j$ affin sind und die analogen kanonischen Abbildungen (15.30) *surjektiv.*

Beweis. Angenommen es gilt (1) und wir möchten (2) zeigen. Wir haben ein Faserprodukt

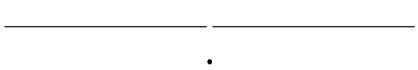
$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xrightarrow{h} & U \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} V \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\Delta} & X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} X \end{array}$$

wobei die beiden vertikalen Pfeile offene Immersionen sind. Es ist $U \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} V$ ein affines Schema. Ist nun X separiert und daher Δ eine abgeschlossene Immersion, so gilt dieses auch für h nach Lemma 15.19. Daher ist nach Satz 15.13 auch $U \cap V$ ein affines Schema und $h^\sharp$ gerade die surjektive Multiplikationsabbildung wie in (15.26).

Es ist klar, dass aus (2) auch (3) folgt.

Angenommen es gilt (3) und wir möchten (1) zeigen. Sei also $\{U_i \hookrightarrow X\}$ eine offene affine Überdeckung von X. Nach Voraussetzung sind alle Schnitte $U_i \cap U_j$ affin und die obige Multiplikationsabbildung $h^\sharp$ surjektiv. Dieses bedeutet, dass die (zu der obigen analoge) Abbldung h eine abgeschlossene Immersion ist nach Satz 15.13. Schließlich ist auch Δ eine abgeschlossene Immersion, da man dieses nach Lemma 15.18 lokal auf dem Ziel testen kann und $\{U_i \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} U_j \hookrightarrow X \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} X\}$ eine offene Überdeckung ist. □

Beispiel 15.31. Mit dem vorherigen Lemma 15.29 kann man zeigen, dass die Doppelpunktgerade X,



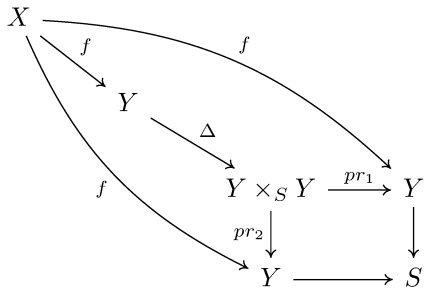
die durch Verkleben von $U_1 := \mathrm{Spec}(k[x])$ und $U_2 := \mathrm{Spec}(k[y])$ entlang

$$\begin{array}{rccc} \phi_{ji}\colon & U_{12} = U_1 \setminus \{0\} \cong \mathrm{Spec}(k[x, x^{-1}]) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Spec}(k[y, y^{-1}]) \cong U_2 \setminus \{0\} = U_{21} \\ & x & \mapsto & y. \end{array}$$

gebildet wird, nicht separiert (und nach Lemma 15.25 insbesondere nicht affin) ist.

Satz 15.32. *Sei S ein Schema und seien $f, g\colon X \to Y$ zwei Morphismen in* $\mathbf{Sch}/S$ *von einem reduzierten Schema X in ein separiertes Schema $Y \to S$. Falls es eine dichte offene Teilmenge $U \subseteq X$ gibt mit $f_{|U} = g_{|U}$, dann folgt schon $f = g$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $f(x) = g(x)$ auf topologischen Räumen gilt für alle $x \in X$. Wir betrachten den durch die universelle Eigenschaft des Faserprodukts gegebenen Morphismus $(f, g)\colon X \to Y \times_S Y$. Das Diagramm



zeigt $\Delta \circ f = (f, f)$. Es gilt $(f, f)_{|U} = (f, g)_{|U}$, also $(f, g)(U) \subseteq \Delta(Y)$ und daher $U \subseteq (f, g)^{-1}(\Delta(Y))$. Nun ist aber (f, g) stetig und $\Delta(Y)$ nach Voraussetzung abgeschlossen. Also ist $X = (f, g)^{-1}(\Delta(Y))$, weil U dicht war und damit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Wir müssen noch zeigen, dass die Abbildungen auf den zugehörigen Ringgarben gleich sind. Dafür können wir $X = \mathrm{Spec}(B)$ und $Y = \mathrm{Spec}(A)$ affin annehmen. Also sind f und g mit Korollar 10.23 durch Ringmorphismen $\varphi, \phi\colon A \to B$ induziert. Wir wollen zeigen, dass $\varphi = \phi$. Sei also $b \in B$ und betrachte $a := \varphi(b) - \phi(b)$. Nach Voraussetzung gilt $a_{|U} = 0$, also $U \subseteq \mathcal{V}(a)$. Es folgt $\mathrm{Spec}(A) = \mathcal{V}(a)$, da U dicht ist. Satz 5.2 impliziert dann $a \in \mathrm{Nil}(A)$. Weil X und damit auch A reduziert sind, folgt $a = 0$ und die Behauptung ist gezeigt. □

16. Endlichkeitsbedingungen

Bevor wir uns einigen Endlichkeitseigenschaften widmen, wollen wir eine allgemeine Beweistechnik kennen lernen, die es erlaubt, Eigenschaften von Schemata auf affinen Unterschemata zu verstehen. Dazu benötigen wir zunächst den folgenden nützlichen Trick.

Lemma 16.1 (**Nikes Lemma**). *Sei X ein Schema und $U = \operatorname{Spec}(A)$, $V = \operatorname{Spec}(B)$ zwei affine offene Unterschemata von X. Dann wird $U \cap V$ von affinen offenen Teilmengen W überdeckt, die sowohl in $\operatorname{Spec}(A)$ als auch in $\operatorname{Spec}(B)$ basisoffen sind.*

Beweis. Falls der Schnitt $U \cap V$ leer ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also $x \in U \cap V$ ein Punkt. Wir zeigen, dass x in einer Teilmenge $W \subseteq U \cap V$ liegt, die sowohl in U als auch in V basisoffen ist. Daraus folgt dann offenbar die Behauptung. Wir dekorieren die Notation $D(s)$ für eine basisoffene Menge mit einem zusätzlichen Index, der auf den Ring hinweist, in dessen Spektrum die jeweilige basisoffene Menge basisoffen ist.

Da die $D_A(s)$ eine Basis der Topologie auf $\operatorname{Spec}(A)$ bilden, gibt es ein Element $s \in A$ mit $x \in D_A(s) \subseteq U \cap V$. Ebenso finden wir ein Element $b \in B$ mit

$$x \in D_B(b) \subseteq D_A(s) \subseteq V = \operatorname{Spec}(B)$$

Wir setzen $W := D_B(b)$ und möchten ein $s' \in A$ finden mit $W = D_A(s')$. Die Restriktionsabbildung der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ induzieren nach Korollar 9.11 einen Ringhomomorphismus $\beta\colon B \to A[\frac{1}{s}]$. Es ist $\beta(b) = \frac{a}{s^d} \in A[\frac{1}{s}]$, und daher also $\beta(b)s^e = s^t a$ in A. Setze $s' := s^t a$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
D_A(s') &= D_A(s^t a) \\
&= D_A(s) \cap D_A(a) && \text{(Korollar 4.5)} \\
&= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A[\tfrac{1}{s}]) \mid a(\mathfrak{p}) \neq 0\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A[\tfrac{1}{s}]) \mid \beta(b)(\mathfrak{p}) \neq 0\} && (\beta(b)s^e = s^t a) \\
&= \{\mathfrak{p} \in D_A(s) \mid b(\tilde{\beta}(\mathfrak{p})) \neq 0\} && \text{(Bemerkung 15.16)} \\
&= D_A(s) \cap \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid b(\mathfrak{q}) \neq 0\} \\
&= D_A(s) \cap D_B(b) \\
&= D_B(b),
\end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. Dies sechste Gleichung gilt, da jedes $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$, das in $D_A(s)$ liegt, im Bild der Abbildung $\tilde{\beta}\colon D_A(s) \hookrightarrow V$ liegt, also von der Form $\tilde{\beta}(\mathfrak{p})$ ist. □

Lemma 16.2 (**Affine Kommunikation**). *Sei X ein Schema und $(\mathcal{E})$ eine Eigenschaft von affinen offenen Unterschemata $U \hookrightarrow X$, sodass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind.*

(**(1)** ***Vererbung auf Basisoffene***) *Ist $\operatorname{Spec}(A) \hookrightarrow X$ eine affines offenes Unterschema, das $(\mathcal{E})$ erfüllt und $s \in A$, so hat $D_A(s) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A) \hookrightarrow X$ auch $(\mathcal{E})$.*

(**(2)** ***Überprüfung auf basisoffener Überdeckung***) *Ein affines offenes Unterschema $\operatorname{Spec}(A) \hookrightarrow X$ erfüllt $(\mathcal{E})$, falls es $s_1, \ldots, s_n \in A$ gibt, die das Einsideal erzeugen, sodass jedes $D_A(s_i) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A) \hookrightarrow X$ die Eigenschaft $(\mathcal{E})$ erfüllt.*

Hat dann X eine offene Überdeckung durch affine Unterschemata $U_i \hookrightarrow X$, die jeweils $(\mathcal{E})$ erfüllen, so erfüllt jedes affine offene Unterschema von X bereits $(\mathcal{E})$.

Beweis. Sei $\{U_i \hookrightarrow X\}$ eine affine offene Überdeckung durch Unterschemata U_i mit der Eigenschaft $(\mathcal{E})$ und sei $U \hookrightarrow X$ ein beliebiges affines offenes Unterschema. Nach dem vorherigen Lemma 16.1 können wir $U_i \cap U$ durch affine Unterschemata W_{ij} überdecken, die sowohl in U_i als auch in U basisoffen sind. Dann haben nach der ersten Voraussetzung die W_{ij} auch die Eigenschaft $(\mathcal{E})$. Da wir mittels der Quasikompaktheit von U nach Satz 4.12 eine endliche Überdeckung von U durch die W_{ij} auswählen können, hat U die Eigenschaft $(\mathcal{E})$ nach der zweiten Voraussetzung. □

In der folgenden Definition schreiben wir mit einer natürlichen Zahl n zur Abkürzung $\mathcal{F}^{(n)}$ anstelle der direkten Summe $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{F}$. Da endliche direkte Summen mit endlichen Produkten übereinstimmen, schreiben wir dafür auch lediglich $\mathcal{F}^n$.

Definition 16.3. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ heißt

(1) *endlich erzeugt*, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$ gibt und für jede Überdeckungsmenge U_i eine natürliche Zahl k_i und eine Surjektion von Garben
$$O_{X|U_i}^{k_i} \to \mathcal{F}_{|U_i} \to 0,$$

(2) *endlich präsentiert*, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$ gibt und für jede Überdeckungsmenge U_i natürliche Zahlen k_i und l_i und eine exakte Sequenz
$$O_{X|U_i}^{l_i} \to O_{X|U_i}^{k_i} \to \mathcal{F}_{|U_i} \to 0,$$

(3) *kohärent*, wenn er endlich erzeugt ist und alle Kerne von (nicht unbedingt surjektiven) Abbildungen $O_{X|U}^{k} \to \mathcal{F}_{|U}$ für ein offenes Unterschema $U \hookrightarrow X$ auch endlich erzeugt sind.

Bemerkung 16.4. Offenbar gelten für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ die Implikationen

$$\mathcal{F} \text{ kohärent} \implies \mathcal{F} \text{ endlich präsentiert} \implies \mathcal{F} \text{ endlich erzeugt und quasikohärent.}$$

Der folgende Satz 16.6 zeigt, dass die drei Begriffe aus Definition 16.3 häufig äquivalent sind. Für den Beweis des Satzes brauchen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 16.5. *Sei $X = \operatorname{Spec}(A)$ ein affines Schema. Ein A-Modul M is endlich erzeugt (bzw. endlich präsentiert) genau dann wenn der assoziierte $\mathcal{O}_X$-Modul $\tilde{M}$ endlich erzeugt (bzw. endlich präsentiert) ist.*

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage über endliche Präsentation, da die endliche Erzeugtheit analog funktioniert. Nach Lemma 14.18 ist der Funktor $\tilde{\cdot}$ exakt und eine endliche Präsentation von M als A-Modul liefert eine endliche Präsentation von $\tilde{M}$ als $\mathcal{O}_X$-Modul.

Nehmen wir andererseits an, dass $\tilde{M}$ endlich präsentiert ist, so finden wir nach Definition eine offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$ und für alle i exakte Sequenzen
$$O_{X|U_i}^{l_i} \to O_{X|U_i}^{k_i} \to \mathcal{F}_{|U_i} \to 0$$
Da Exaktheit halmweise definiert ist, bleibt sie unter weiterer Einschränkung erhalten. Daher können wir annehmen, dass es sich bei der Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$ um eine wegen Satz 4.12 endliche Überdeckung durch basisoffene Teilmengen $U_i = D(s_i)$ handelt. Wir sind also in der Situtation eines A-Moduls M mit Erzeugern $s_1, \ldots, s_n$ des Einsideals von A derart, dass $M[\frac{1}{s_i}]$ ein endlich präsentierter A-Modul ist. Daraus folgt, genau wie im Beweis von Lemma 11.27, dass M bereits endlich präsentiert ist. □

Satz 16.6. *Sei X ein lokal noethersches Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) $\mathcal{F}$ ist endlich erzeugt und quasikohärent.
(2) $\mathcal{F}$ ist endlich präsentiert.
(3) $\mathcal{F}$ ist kohärent.

Beweis. Wegen Bemerkung 16.4 müssen wir nur zeigen, dass aus endlicher Erzeugtheit mit Quasikohärenz bereits Kohärenz folgt. Sei also $\mathcal{F}$ endlich erzeugt. Wir betrachten eine offene Teilmenge $U \hookrightarrow X$ und eine Abbildung $f\colon \mathcal{O}_{X|U}^{k} \to \mathcal{F}_{|U}$ und müssen zeigen, dass dessen Kern endlich erzeugt ist. Dazu können wir uns auf kleinere Teilmengen einschränken und deshalb $U = \operatorname{Spec}(A)$ als affin annehmen. Da X lokal noethersch ist, können wir wegen Lemma 11.27 und Korollar 11.35 annehmen, dass A ein noetherscher Ring ist. Wegen der Quasikohärenz gilt $\mathcal{F} = \tilde{M}$ für einen A-Modul M nach Satz 14.24. Es ist M nach dem vorherigen Lemma 16.5 endlich erzeugt. Die Abbildung f korrespondiert nach Korollar 14.25 zu einem Morphismus $\varphi : A^k \to M$ von A-Moduln. Da A ein noetherscher Ring ist, ist jedoch $\ker(\varphi)$ endlich erzeugt, und damit ist nach dem vorherigen Lemma 16.5 auch
$$\ker(f) = \ker(\tilde{\varphi}) = \ker(\varphi)^{\sim}$$
endlich erzeugt. □

Lemma 16.7. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und sei $\mathcal{F}$ ein endlich präsentierter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann ist für alle $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{G}$ und alle $x \in X$ der kanonische Morphismus*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

bijektiv.

Beweis. Wir fixieren einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$ und betrachten die beiden Funktoren

$$\begin{aligned} F := \quad & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{G})_x \colon \quad \mathcal{O}_X\textbf{-Mod} \quad \to \quad \mathcal{O}_{X,x}\textbf{-Mod} \\ F' := \quad & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}((-)_x, \mathcal{G}_x) \colon \quad \mathcal{O}_X\textbf{-Mod} \quad \to \quad \mathcal{O}_{X,x}\textbf{-Mod}. \end{aligned}$$

Die Einschränkung von Homomorphismen definiert eine natürliche Transformation von Funktoren $\eta \colon F \to F'$. Wir wollen zeigen, dass die Auswertung $\eta(\mathcal{F}) \colon F(\mathcal{F}) \to F'(\mathcal{F})$ für endlich präsentierte $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ ein Isomorphismus ist. Für offenen Umgebungen U von x faktorisieren beide Funktoren über die Einschränkung $\mathcal{O}_X\textbf{-Mod} \to \mathcal{O}_U\textbf{-Mod}$ und wir können von vornherein X durch ein geeignetes solches U ersetzen und annehmen, dass es eine exakte Sequenz

$$O_X^l \to O_X^k \to \mathcal{F} \to 0$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln gibt. Da η eine natürliche Transformation ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(\mathcal{F}) & \longrightarrow & F(\mathcal{O}_X^k) & \longrightarrow & F(\mathcal{O}_X^l) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F'(\mathcal{F}) & \longrightarrow & F'(\mathcal{O}_X^k) & \longrightarrow & F'(\mathcal{O}_X^l) \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Da die beiden Funktoren F und F' linksexakt sind und mit endlichen direkten Summen vertauschen (und diese entsprechen ja endlichen direkten Produkten), ist mit dem Fünferlemma nur zu zeigen, dass

$$\eta(\mathcal{O}_X) \colon F(\mathcal{O}_X) \to F'(\mathcal{O}_X)$$

ein Isomorphismus ist. Dieses ist aber klar nach Definition der beiden Funktoren. □

Korollar 16.8 (Ein Isomorphismus auf einem Halm dehnt sich aus). *Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei endlich präsentierte $\mathcal{O}_X$-Moduln. Sei $x \in X$ und*

$$\varphi \colon \mathcal{F}_x \xrightarrow{\cong} \mathcal{G}_x$$

ein Isomorphismus. Dann gibt es eine offene Umgebung U von x und einen Isomorphismus $f \colon \mathcal{F}_{|U} \to \mathcal{G}_{|U}$ mit $f_x = \varphi$.

Beispiel 16.9. Die Aussage des vorherigen Korollars 16.8 ist ohne die Bedingung der endlichen Präsentiertheit nicht im Allgemeinen richtig. Ist beispielsweise $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ und $\mathcal{F} = \tilde{\mathbb{Z}}$, $\mathcal{G} = \tilde{\mathbb{Q}}$, so gibt es mit $x = (0) \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ einen Isomorphismus

$$\mathcal{F}_x \cong \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cong \mathcal{G}_x$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Andererseits ist jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ von der Form $D(s)$ für $s \in \mathbb{Z}$ und $\mathcal{F}(U) = \mathbb{Z}[\frac{1}{s}]$ ist nie zu $\mathcal{G}(U) = \mathbb{Q}$ isomorph. Natürlich ist $\mathbb{Q}$ kein endlich präsentierter $\mathbb{Z}$-Modul und nach Lemma 16.5 damit auch $\mathcal{G}$ nicht endlich präsentiert.

Definition 16.10. Ein Morphismus $f \colon X \to Y$ von Schemata heißt

(1) *quasikompakt*, wenn die Urbilder von offenen, quasikompakten Teilmengen von Y wieder quasikompakt sind,
(2) *quasiseparierт*, wenn der Diagonalmorphismus

$$\Delta_f \colon X \to X \times_Y X$$

quasikompakt ist,
(3) *qcqs*, wenn er quasikompakt und quasiseparierт ist,
(4) *affin*, wenn die Urbilder affiner offener Unterschemata von Y wieder affin sind.

Ein Schema X heißt *quasiseparierт*, wenn $f \colon X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ quasiseparierт ist.

Beispiel 16.11.

(1) Eine abgeschlossene Immersion ist quasikompakt, da eine abgeschlossene Teilmenge eines quasikompakten topologischen Raums wieder quasikompakt ist (die fehlende weitere kleine Beobachtung ist eine Übung).
(2) Ist X ein noethersches Schema, so ist jeder Morphismus $f\colon X \to Y$ qcqs wegen Lemma 11.33.
(3) Ein separierter Morphismus ist quasiseparierti mit (1).
(4) Eine abgeschlossene Immersion ist qcqs mit (1), Lemma 15.28 und (3).
(5) Morphismen zwischen affinen Schemata sind affin, da ein Faserprodukt von affinen Schemata wieder affin ist mit Lemma 12.7.

Lemma 16.12 (**ALOCT**). *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Die Eigenschaften $(\mathcal{P})$*

quasikompakt, separiert, quasiseparierti, qcqs, affin, offene/abgeschlossene Immmersion

von f sind affin lokal im Ziel*, d.h. es sind sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(1) f ist $(\mathcal{P})$.
(2) Es gibt eine affine offene Überdeckung $\{V_i \hookrightarrow Y\}$ sodass jedes $f^{-1}(V_i)$ $(\mathcal{P})$ ist.

Beweis. Wir zeigen das Lemma nur für die Eigenschaften $(\mathcal{P})$ der Quasikompaktheit und Affinität und lassen den Beweis für die restlichen Eigenschaften als Übung.

Wir starten mit der Eigenschaft $(\mathcal{P})$ der Quasikompaktheit. Da eine beliebige quasikompakte offene Teilmenge $V \hookrightarrow Y$ eine endliche Vereinigung affiner offener Unterschemata ist und sich Quasikompaktheit auf einer endlichen offenen Überdeckung prüfen lässt, ist die Aussage (1) äquivalent zu

(1') Für alle affinen offenen Unterschemata $V \hookrightarrow Y$ ist $f^{-1}(V)$ quasikompakt.

Die Äquivalenz zwischen (1') und (2) folgt nun aus dem Lemma 16.2 über affine Kommunikation: Dafür überlegt man sich mit Hilfe von Satz 4.12 zunächst leicht, dass ein Schema quasikompakt ist genau dann, wenn es eine endliche affine offene Überdeckung hat. Nun sagen wir, dass ein affines Unterschema $V \hookrightarrow Y$ die Eigenschaft $(\mathcal{E})$ hat, falls $f^{-1}(V)$ eine endliche affine offene Überdeckung besitzt. Da mit Lemma 12.7 Faserprodukte affiner Schemata wieder affin sind, vererbt sich diese Eigenschaft mit Lemma 12.6 entlang Inklusionen $D(s) \hookrightarrow V'$ affiner Schemata. Da man weiterhin Quasikompaktheit auf einer endlichen offenen Überdeckung überprüfen kann, ist auch die zweite Voraussetzung der affinen Kommunikation erfüllt.

Nun betrachten wir die Eigenschaft $(\mathcal{P})$ der Affinität und verwenden wieder das Lemma 16.2 über affine Kommunikation. Die erste Voraussetzung ist klar nach Beispiel 16.11.(4). Sei also oBdA $\operatorname{Spec}(A) = Y$ affin und $s_1, \dots, s_n \in A$ Erzeuger des Einsideals mit affinem Urbild $f^{-1}(D(s_i))$. Wir wollen zeigen, dass X affin ist. Nach Satz 10.20 faktorisiert f als

$$X \xrightarrow{\eta} \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X(X)) \xrightarrow{f'} \operatorname{Spec}(A)$$

weshalb wir $A = \mathcal{O}_X(X)$ und $f = \eta$ annehmen können. Wir wollen zeigen, dass η ein Isomorphismus ist. Dieses können wir lokal auf $Y = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X(X))$ nachweisen. Durch Natürlichkeit von η erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ D_X(s_i) & \xrightarrow[\eta_{D_X(s_i)}]{\cong} \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X(D_X(s_i))) \longrightarrow & D_Y(s_i) \end{array}$$

und müssen zeigen, dass der A-Algebrenhomomorphismus

$$A[\tfrac{1}{s_i}] \to \mathcal{O}_X(D_X(s_i))$$

ein Isomorphismus ist. Nach Satz 14.24 genügt es zu zeigen, dass $\eta_*\mathcal{O}_X$ quasikohärent ist. Lemma 16.21 unten garantiert dieses, wenn η qcqs ist. Quasikompaktheit folgt aus dem ersten Teil dieses Beweises, und Quasiseparierthheit leicht daraus, dass die Diagonale Δ_η

über

$$\bigcup_{i=1}^{n} D_X(s_i) \times_X D_X(s_i) \hookrightarrow X \times_Y X$$

faktorisiert. □

Korollar 16.13. *Eine abgeschlossene Immersion ist affin. Ein affiner Morphismus ist quasikompakt und separiert.*

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma 16.12 und Lemma 15.19 ist eine abgeschlossene Immersion affin. Nach dem vorherigen Lemma 16.12 und Satz 4.12 ist ein affiner Morphismus quasikompakt. Die Separiertheit folgt mit Lemma 16.12 und Lemma 15.25. □

Bemerkung 16.14. Durch die Quasikompaktheit eines jeden Morphismus zwischen affinen Schemata, handelt es sich bei der Quasikompaktheit also um eine globale Endlichkeitsbedinung, die man nicht durch Übersetzung einer korrespondierenden Bedingung in Kommutativer Algebra erhält.

Definition 16.15 (**Stabilitätseigenschaften**)**.** Sei $\mathcal{P}$ eine Eigenschaft von Morphismen $f\colon X \to Y$ von Schemata. Wir definieren die folgenden Eigenschaften einer solchen Eigenschaft $\mathcal{P}$ neben der in Lemma 16.12 betrachteten Eigenschaft **ALOCT**.

(**COMP**, Stabilität unter Komposition) Die Komposition zweier Morphismen aus $\mathcal{P}$ ist wieder in $\mathcal{P}$.

(**BC**, Stabilität unter Basiswechsel) Ist $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{P}$ und $Y' \to Y$ ein beliebiger Schemamorphismus, so ist auch der Basiswechsel $X \times_Y Y' \to Y'$ wieder in $\mathcal{P}$.

(**LOCS**, Lokalität auf der Quelle) Ein Schemamorphismus $f\colon X \to Y$ ist in $\mathcal{P}$ genau dann, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$ gibt, sodass jede Einschränkung $U_i \hookrightarrow X \to Y$ in $\mathcal{P}$ ist.

Bemerkung 16.16. Ist $\mathcal{P}$ eine Eigenschaft von Morphismen mit COMP und BC, so hat sie auch die Eigenschaft

(**PROD**, Stabilität unter Produkten) Sind $f\colon X \to Y$ und $f'\colon X' \to Y'$ in $\mathcal{P}$, so ist auch $f \times f'\colon X \times X' \to Y \times Y'$ wieder in $\mathcal{P}$,

denn $f \times f'$ ist die Komposition der oberen horizontalen Morphismen in den folgenden Pullbacks.

$$\begin{array}{ccc} X \times X' & \longrightarrow & Y \times X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Y \times X' & \longrightarrow & Y \times Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

Diese Beobachtung funktioneiert auch relativ über einem Basisschema S.

Lemma 16.17. *Sei $(\mathcal{P})$ eine Eigenschaft von Morphismen von Schemata mit COMP und BC. Sei $(\mathcal{Q})$ die folgende Eigenschaft von Morphismen $f\colon X \to Y$.*

Die Diagonalabbildung $\Delta_f\colon X \to X \times_Y X$ erfüllt $(\mathcal{P})$.

Dann hat auch diese Eigenschaft $(\mathcal{Q})$ COMP und BC.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Eigenschaft BC. Sei

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Pullback von Schemata, sodass f die Eigenschaft $(\mathcal{Q})$ hat. Mit Lemma 12.6 folgt, dass

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle \Delta_{f'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_f} \\ X' \times_{Y'} X' & \xrightarrow{(g',g')} & X \times_Y X \end{array}$$

ein Pullback ist durch Ergänzung mit dem Pullbackdiagramm

$$\begin{array}{ccc} X' \times_{Y'} X' & \xrightarrow{(g',g')} & X \times_Y X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{g'} & X \end{array}$$

nach unten. Da nun die Eigenschaft $(\mathcal{P})$ stabil unter Basiswechsel ist, hat mit Δ_f auch $\Delta_{f'}$ diese Eigenschaft, was genau bedeutet, dass f' die Eigenschaft $(\mathcal{Q})$ besitzt.

Für COMP betrachten wir zwei Morphismen $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ und faktorisieren Δ_{gf} als

$$X \xrightarrow{\Delta_f} X \times_Y X \xrightarrow{(\mathrm{id},\mathrm{id})} X \times_Z X.$$

Dass es sich bei dieser Komposition wirklich um Δ_{gf} handelt, sieht man mit der universellen Eigenschaft von $X \times_Z X$ leicht ein. Mit einem ähnlichen Argument wie oben zeigt man, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle (\mathrm{id},\mathrm{id})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_g} \\ X \times_Z X & \xrightarrow{(f,f)} & Y \times_Z Y \end{array}$$

ein Pullback ist. Haben nun sowohl Δ_f als auch Δ_g die unter Basiswechsel (BC) stabile Eigenschaft $(\mathcal{P})$, so haben beide Morphismen in der Faktorisierung von Δ_{gf} diese Eigenschaft, und wir sind fertig, da $(\mathcal{P})$ COMP hat. □

Lemma 16.18. *Die Eigenschaften $(\mathcal{P})$*
quasikompakt, separiert, quasiseparierte, qcqs, affin, offene/abgeschlossene Immmersion eines Morphismus von Schemata haben jeweils COMP und BC.

Beweis. Es ist klar, dass Quasikompaktheit stabil ist unter Komposition. Sei also

$$\begin{array}{ccc} X \times_S Y & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

ein Pullback von Schemata, wobei f ein quasikompakter Morphismus ist Sei $V \subseteq Y$ eine quasikompakte offene Teilmenge. Wir können Y durch V ersetzen und finden wie folgt eine endliche Überdeckung von $X \times_S Y$ durch quasikompakte Teilmengen: Im ersten Schritt stellen wir fest, dass Y durch die Urbilder von affinen Teilmengen von S überdeckt wird. Durch Quasikompaktheit von Y können wir eine endliche Teilüberdeckung finden. Indem wir zu einer offenen Teilmenge übergehen, können wir also S als affin annehmen. Da der Morphismus f quasikompakt ist, wird dann X von endlich vielen affinen offenen Teilmengen überdeckt, deren Faserprodukte über S mit Y eine endliche affine offene Überdeckung von $X \times_S Y$ liefern. Da affine Schemata quasikompakt sind wir fertig mit Satz 4.12.

Es ist klar, dass offene Immersionen stabil sind unter Komposition. Stabilität unter Basiswechsel haben wir in Lemma 12.8 gezeigt.

Es ist klar, dass abgeschlossene Immersionen stabil sind unter Komposition. Stabilität unter Basiswechsel haben wir in Lemma 15.19 gezeigt.

Aus dem letzten Lemma 16.17 folgt direkt, dass Separiertheit und Quasiseparierheit ebenfalls COMP und BC haben.

Es ist klar, dass affine Morphismen stabil sind unter Komposition. Stabilität unter Basiswechsel zeigt man ähnlich wie oben bei der Quasikompaktheit. Dieses ist eine Übung. □

Der Hauptgrund, warum man sich für qcqs Morphismen interessiert, ist der Folgende.

Lemma 16.19. *Sei $f\colon X \to Y$ ein qcqs Morphismus von Schemata. Ist $V \hookrightarrow Y$ ein offenes affines Unterschema, so hat das Urbild $f^{-1}(V)$ eine endliche offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow f^{-1}(V)\}$ mit der Eigenschaft, dass alle Durchschnitte $U_i \cap U_j$ wiederum eine endliche offene affine Überdeckung besitzen.*

Beweis. Da f quasikompakt ist, hat das Urbild $f^{-1}(V)$ eines offenen affinen Unterschemas $V \hookrightarrow Y$ eine endliche Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow f^{-1}(V)\}_{i\in\mathcal{I}}$ durch affine offene Unterschemata von X. Seien $i, j \in \mathcal{I}$, dann ist

$$U_i \times_V U_j = U_i \times_Y U_j \to Y$$

als Basiswechsel offener Immersionen eine offene Immersion nach Lemma 16.18 . Außerdem ist $U_i \times_V U_j$ als Faserprodukt affiner Schemata affin, sodass

$$U_i \cap U_j = U_i \times_X U_j = \Delta^{-1}(U_i \times_Y U_j)$$

durch die Quasiseparierheit eine quasikompakte Teilmenge von X ist, also eine endliche affine offene Überdeckung besitzt. □

Lemma 16.20. *Ein Schema X ist quasiseparierт genau dann, wenn für alle zwei offenen affinen Unterschemata U und V der Schnitt $U \cap V$ quasikompakt ist.*

Beweis. Dieses ist eine Übung. □

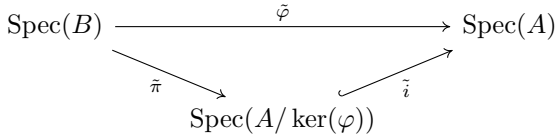
Da der Beweis von Lemma 14.31 genau diese Eigenschaft aus dem vorherigen Lemma 16.20 benötigte, erhalten wir die folgende Verallgemeinerung.

Lemma 16.21. *Sei $f\colon X \to Y$ ein qcqs-Morphismus zwischen Schemata. Dann bewahrt das direkte Bild f_* quasikohärente Moduln und schränkt somit zu einem Funktor*

$$f_*\colon \mathbf{QCoh}(X) \to \mathbf{QCoh}(Y)$$

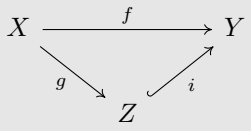
ein.

Da wir nun die globalen Endlichkeitsbegriffe von Quasikompaktheit und Quasiseparierтheit kennen, können wir ein wichtiges Resultat aus der Kommutativen Algebra in die Welt der Schemata übersetzen und damit geometrisch interpretieren: Den Homomorphiesatz, oder genauer die Folgerung, dass jeder Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$ kanonisch über die Projektion $\pi\colon A \twoheadrightarrow A/\ker(\varphi)$ faktorisiert. In affine Schemata übersetzt entspricht dieses einer Faktorisierung

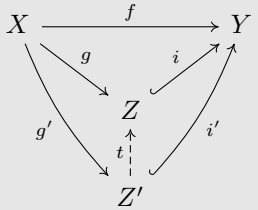


in einen Morphismus $\tilde{\pi}$ mit dichten Bild nach Korollar 5.14 und eine abgeschlossenen Immersion $\tilde{i}$. (Siehe auch die kurze Diskussion vor Lemma 5.13.)

Definition 16.22. Das *schematheoretische Bild* einer Abbildung $f\colon X \to Y$ von Schemata ist ein abgeschlossenes Unterschema $i\colon Z \hookrightarrow Y$ zusammen mit einer Faktorisierung



sodass i initial ist mit dieser Eigenschaft, d.h. sodass es für jede abgeschlossene Immersion $i'\colon Z' \hookrightarrow Y$ und Faktorisierung $f = i'Z'$ es einen eindeutigen Morphismus $t\colon Z \to Z'$ gibt, sodass das Diagramm



kommutiert.

Beispiel 16.23. Ist $\varphi\colon A \to B$ ein Morphismus von Ringen, so ist das schematheoretische Bild nach der vorherigen Diskussion genau durch

$$\tilde{i}\colon \operatorname{Spec}(A/\ker(\varphi)) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(B)$$

gegeben.

Satz 16.24 (**Existenz des Schematheoretischen Bilds**). *Sei $f\colon X \to Y$ quasikompakt. Dann existiert das Schematheoretische Bild $i\colon Z \hookrightarrow Y$ von f und ist in der Korrespondenz von Satz 15.17 durch Die quasikohärente Idealgarbe*

$$\mathcal{I} := \ker(\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y)$$

gegeben. Der unterliegende topologische Raum von Z ist genau der Abschluss des Bildes $|f(X)|$ und insbesondere ist g dominant.

Beweis. Ein abgeschlossenes Unterschema $i'\colon Z' \hookrightarrow X$ liefert eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \to \mathcal{I}' \to \mathcal{O}_Y \to i'_*\mathcal{O}_{Z'} \to 0.$$

Eine Faktorisierung $f = i'g'$ induziert eine Faktorisierung $\mathcal{O}_Y \to i'_*\mathcal{O}_{Z'} \to f_*\mathcal{O}_X$, also einen induzierten Morphismus von Kernen $\mathcal{I}' \to \mathcal{I}$. Ist nun $\mathcal{I}$ quasikohärent, so erhalten wir ein zugehöriges abgeschlossenes Unterschema $i\colon Z \hookrightarrow Y$ und der Morphismus $\mathcal{I}' \to \mathcal{I}$ übersetzt sich gerade in den gesuchten Morphismus $t : Z \to Z'$.

Wir müssen also noch die Quasikohärenz von $\mathcal{I}$ zeigen. Da es sich dabei um eine lokale Eigenschaft handelt, können wir Y als affin annehmen und mit der Quasikompaktheit von f das Schema X durch endlich viele affine offene Unterschema $U_1, \dots, U_n \hookrightarrow X$ überdecken. Wir definieren

$$f'\colon X' := \coprod_{i=1}^{n} U_i \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Y$$

und bemerken, dass f' als Morphismus zwischen affinen Schemata qcqs ist. Daher ist $f'_*\mathcal{O}_{X'}$ nach Lemma 16.21 quasikohärent. Durch einen Blick auf die Halme sieht man sofort, dass $\mathcal{O}_X \hookrightarrow h_*\mathcal{O}_{X'}$ injektiv ist. Da f_* nach Satz 14.10 ein Rechtsadjungierter ist und damit Injektivität erhält, ist auch

$$f_*\mathcal{O}_X \to f_*h_*\mathcal{O}_{X'} = f'_*\mathcal{O}_{X'}$$

ein injektiver Morphismus, weshalb

$$\mathcal{I} = \ker(\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y) = \ker(\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Y \to f'_*\mathcal{O}_{X'})$$

als Kern eines Morphismus quasikohärenter Garben nach Lemma 14.26 selbst wieder quasikohärent ist.

Nun wollen wir noch zeigen, dass $|f(X)|$ dicht in $|Z|$ liegt. Dies können wir auf einer affinen Überdeckung von Y überprüfen und daher Y als affin annehmen. Da dann jedes abgeschlossene Unterschema von Y affin ist, faktorisieren alle Morphismen von X in solche abgeschlossenen Unterschemata nach Bemerkung 7.21 und Satz 10.20 eindeutig über den kanonischen Morphismus

$$X \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X(X)),$$

sodass $X \to Y$ und die Faktorisierung $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_X(X)) \to Y$ dasselbe schematheoretische Bild in Y haben. Wir können also nur den zweiten Morphismus betrachten und X als affin annehmen. Nach Definition entspricht dann g einem injektiven Ringhomomorphismus und ist also dominant nach Korollar 5.14. □

Definition 16.25. Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ von Schemata heißt *lokal von endlichem Typ* falls für alle affinen offenen Unterschemata $V \hookrightarrow Y$ und $U \hookrightarrow f^{-1}V$ der induzierte Morphismus

$$\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{f^{\#}(V)} \mathcal{O}_X(f^{-1}V) \xrightarrow{(-)_{|U}} \mathcal{O}_X(U)$$

von endlichem Typ ist.

Ein Morphismus $f\colon X \to Y$ von Schemata heißt *von endlichem Typ* falls er lokal von endlichem Typ und quasikompakt ist.

Die Eigenschaft lokal von endlichem Typ zu sein, lässt sich auch auf festen Überdeckungen prüfen, wie das folgende Lemma zeigt, welches eine zu ALOCT ähnliche Eigenschaft zeigt.

Lemma 16.26. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von Schemata. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(1) Der Morphismus f is lokal von endlichem Typ.

(2) Es existiert eine affine offene Überdeckung $\{V_i \hookrightarrow Y\}_{i\in\mathcal{I}}$ und für jedes $i \in I$ eine affine offene Überdeckung $\{U_{ij} \hookrightarrow f^{-1}V_i\}_{j\in\mathcal{J}_i}$, sodass

$$\mathcal{O}_Y(V_i) \xrightarrow{f^\#(V_i)} \mathcal{O}_X(f^{-1}V_i) \xrightarrow{(-)_{|U_{ij}}} \mathcal{O}_X(U_{ij})$$

für alle $i \in \mathcal{I}$ und $j \in \mathcal{J}_i$ von endlichem Typ ist.

Beweis. Wir betrachten die folgende zusätzliche Aussage.

(1') Für alle affinen offenen Unterschemata $V \hookrightarrow Y$ existiert eine affine offene Überdeckung $\{U_j \hookrightarrow f^{-1}V\}_{j\in\mathcal{J}}$, sodass

$$\mathcal{O}_Y(V) \xrightarrow{f^\#(V)} \mathcal{O}_X(f^{-1}V) \xrightarrow{\rho} \mathcal{O}_X(U_j)$$

für alle $j \in \mathcal{J}$ von endlichem Typ ist.

Die Implikationen (1) $\Rightarrow$ (1') $\Rightarrow$ (2) sind klar.

Um (2) $\Rightarrow$ (1') zu zeigen, bezeichnen wir die in (1') gennante Eigenschaft von V mit $(\mathcal{E})$ und zeigen, dass sie die Bedingungen der affinen Kommunikation (Lemma 16.2) erfüllt. Sei dazu $V = \operatorname{Spec}(A) \hookrightarrow Y$ eine ein affines offenes Unterschema mit Eigenschaft $(\mathcal{E})$. Wir haben also eine affine offene Überdeckung von $f^{-1}(V)$ mit $U_j = \operatorname{Spec}(B_j)$ gegeben, sodass der Ringhomomorphismus $\varphi_j\colon A \to B_j$ von endlichem Typ ist. Dann wissen wir für $s \in A$, dass $f^{-1}(\operatorname{Spec}(A[\frac{1}{s}]))$ nach Lemma 4.9 durch $\operatorname{Spec}(B_j[\frac{1}{\varphi_j(s)}])$ überdeckt wird und die Ringabbildungen $A[\frac{1}{s}] \to B_j[\frac{1}{\varphi_j(s)}]$ ebenfalls von endlichem Typ sind. Dieses zeigt den Vererbungsteil der affinen Kommunikation. Sei für den Überprüfungsteil $V = \operatorname{Spec}(A) \hookrightarrow Y$ ein affines offenes Unterschema überdeckt durch $V_i = \operatorname{Spec}(A[\frac{1}{s_i}])$, sodass $f^{-1}V_i = \bigcup_{j\in J_i} \operatorname{Spec}(B_{ij})$ eine Überdeckung durch affine offene Unterschemata ist und $A[\frac{1}{s_i}] \to B_{ij}$ endlichem Typ. Dann ist auch $A \to B_{ij}$ von endlichem Typ, und die Gleichheit

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J_i} \operatorname{Spec}(B_{ij})$$

zeigt, dass V die Eigenschaft $(\mathcal{E})$ hat. Damit zeigt das Lemma über affine Kommunikation 16.2, dass überhaupt jedes affine offene Unterschema $V \hookrightarrow Y$ die Eigenschaft $(\mathcal{E})$ hat, also (1') gilt.

Um (1') $\Rightarrow$ (1) zu zeigen, fixieren wir nun ein solches $V \hookrightarrow Y$ und ersetzen Y durch V und X durch $f^{-1}V$. Wir müssen also zeigen, dass jedes affine offene Unterschema U von X die Eigenschaft hat, dass

$$\mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(U)$$

von endlichem Typ ist und nennen diese Eigenschaft $(\mathcal{E})$. Wir sind mit dem Lemma 16.2 der affinen Kommunikation fertig, wenn wir den Vererbungs- und den Überprüfungsteil davon zeigen. Der Vererbungsteil ist klar, da sich die Eigenschaft $(\mathcal{E})$ auf basisoffene Teilmengen von U vererbt, weil die Komposition von Ringhomomorphismen von endlichen Typ wieder von endlichem Typ ist. Es bleibt noch der Überprüfungsteil für $(\mathcal{E})$ zu zeigen. Sei dazu $U = \operatorname{Spec}(B)$ eine affine offene Teilmenge von X und $t_1, \ldots, t_m \in B$ Erzeuger des Einsideals, sodass der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}_Y(Y) \to B[\frac{1}{t_j}]$ jeweils von endlichem Typ ist. Wir können durch Eliminierung der Nenner für jedes j eine endliche Familie $g_{j1}, \ldots, g_{jK_j}$ von Elementen aus $g_{jk} \in B$ finden, deren Bilder den Ring $B[\frac{1}{t_j}]$ als $\mathcal{O}_Y(Y)$-Algebra erzeugen. Nach Voraussetzung gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_m \in B$ mit

$$1 = \mu_1 t_1 + \ldots + \mu_m t_m.$$

Sei nun $B' \subseteq B$ die $\mathcal{O}_Y(Y)$-Unteralgebra von B, die von den $\mu_1, \ldots, \mu_m$, den $t_1, \ldots, t_m$ und allen (endlich vielen) g_{jk} erzeugt wird. Wir wollen $B' = B$ zeigen und wählen dazu ein Element $b \in B$. Nach Konstruktion finden wir für alle j ein gemeinsamen Exponenten d mit $t_j^d b \in B'$. Da auch $\mu_j \in B'$ gilt, erzeugen die $t_1, \ldots, t_m \in B'$ auch das Einsideal von B'. Mit

Korollar 4.5 erzeugen dann auch die $t_1^d, \dots t_m^d$ das Einsideal von B' und es gibt $\nu_1, \dots, \nu_m$ mit $1 = \nu_1 t_1^d + \dots + \nu_m t_m^d$. Dann folgt

$$b = b \cdot 1 = \nu_1(t_1^d b) + \dots + \nu_m(t_m^d b) \in B'$$

was die Behauptung zeigt. □

Korollar 16.27. *Sei $f\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ ein Morphismus affiner Schemata mit zugehörigem Ringhomomorphismus $\varphi\colon A \to B$. Dann ist f genau dann von endlichem Typ, wenn φ (lokal) von endlichem Typ ist.*

Korollar 16.28. *Die Eigenschaft lokal von endlichem Typ zu sein erfüllt ALOCT, COMP und BC.*

Beweis. Dieses ist eine Übung. □

Beispiel 16.29. Eine abgeschlossene Immersion ist von endlichem Typ. Eine offene Immersion ist lokal von endlichem Typ, aber nicht undbedingt von endlichem Typ.

Lemma 16.30. *Eine offene Immersion $f\colon U \hookrightarrow X$ in ein lokal noethersches Schema X ist von endlichem Typ.*

Beweis. Nach dem vorherigen Beispiel 16.29 genügt es zu zeigen, dass f quasikompakt ist. Nach Lemma 16.12 können wir annehmen, dass X affin ist und damit insbesondere ein noethersches Schema nach Satz 4.12. Mit Korollar 11.31 hat X einen noetherschen unterliegenden topologischen Raum. Es ist aber jede (und insbesondere jede offene) Teilmenge eines noetherschen topologischen Raums nach Lemma 11.33 wieder ein noetherscher topologischer Raum und damit insbesondere quasikompakt. Also ist f quasikompakt. □

Lemma 16.31. *Sei $f\colon X \to Y$ ein Morphismus von endlichem Typ und Y ein noethersches Schema. Dann ist auch X ein noethersches Schema.*

Beweis. Nach Lemma 11.30 können wir die Noetherschheit auf einer endlichen offenen Überdeckung von X überprüfen. Es ist die Quelle einer quasikompakten Abbildung mit quasikompaktem Ziel wieder quasikompakt. Nun folgt die Aussage aus Lemma 16.26 und dem aus der Kommutativen Algebra bekannten Resultat, dass eine endlich erzeugte Algebra über einem noetherschen Ring wieder noethersch ist. □

Satz 16.32. *Sei k ein Körper und X ein Schema, das lokal von endlichem Typ über $\operatorname{Spec}(k)$ ist. Dann gilt für einen Punkt $x \in X$:*

$$x \text{ ist ein abgeschlossener Punkt} \iff k \hookrightarrow k(x) \text{ ist eine endliche Körpererweiterung}$$

Beweis. Für die Implikation „⇒“ können wir $X = \operatorname{Spec}(A)$ affin annehmen, da die rechte Seite der Äquivalenz sicherlich unabhängig von einem offenen Unterschema U um $x \in X$ ist und mit Bemerkung 4.2 für die Unabhängigkeit der linken Seite gilt, dass

$$\{x\} = \{x\} \cap U = \overline{\{x\}}^X \cap U = \overline{\{x\}}^U$$

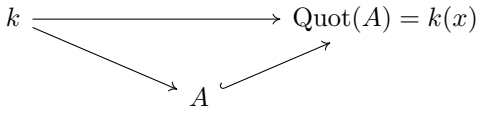
womit x auch ein abgeschlossener Punkt von U ist. Im affinen Fall $X = \operatorname{Spec}(A)$ ist x nach Lemma 4.7 ein Maximalideal von A. Dann ist $k \hookrightarrow k(x)$ nach Lemma 3.9 endlich weil nach Korollar 16.27 die Ringabbildung $k \to A$ von endlichem Typ ist.

Für die Implikation „⇐“ möchten wir X zunächst mit Hilfe von Lemma 15.21 durch das reduzierte Schema $\overline{\{x\}}$ ersetzen. Tatsächlich ändert sich der Restklassenkörper $k(x)$ eines Punktes nicht unter einer abgeschlossenen Immersion. Ist nämlich $i\colon Z \hookrightarrow X$ eine solche und $z \in Z$, so gibt es ein kommutatives Diagramm (vgl. Bemerkung 15.16)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X,i(z)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z,z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ k(i(z)) & \hookrightarrow & k(z) \end{array}$$

wobei die obere Abbildung gerade der Halm von $i^*(i^\sharp)\colon i^*(\mathcal{O}_X) \to i^* i_*(\mathcal{O}_Z) = \mathcal{O}_Z$ an $z \in Z$ ist und damit surjektiv, da $i^\sharp$ surjektiv ist nach Lemma 15.10 und der Voraussetzung. Folglich ist auch die untere horizontale Abbildung surjektiv und damit ein Isomorphismus.

Sei also X das reduzierte Schema $\overline{\{x\}}$. Wir möchten $\overline{\{x\}} = \{x\}$ zeigen. Sei $y \in \overline{\{x\}}$. Dann wählen wir eine affine offene Umgebung $y \in \operatorname{Spec}(A) \hookrightarrow \overline{\{x\}}$. Nach Satz 11.22 ist $x \in \operatorname{Spec}(A)$ auch der generische Punkt der offenen und nichtleeren Teilmenge $\operatorname{Spec}(A)$, da es der generische Punkt von $\overline{\{x\}}$ ist. Nach Lemma 11.37 ist A ein Integritätsbereich und x also das Nullideal (0) in A. Wir betrachten



und nach Lemma 3.17 ist der Kern der injektiven Abbildung $A \hookrightarrow \operatorname{Quot}(A)$ ein Maximalideal. Damit ist $(0) \subseteq A$ ein Maximalideal und also A ein Körper. Weil $x, y \in \operatorname{Spec}(A)$ folgt damit also $x = y$, was die Behauptung zeigt. □

Korollar 16.33. *Sei k ein Körper und X ein Schema, das lokal von endlichem Typ über* $\operatorname{Spec}(k)$ *ist. Dann ist die Menge $X_{cl} \subseteq X$ der abgeschlossenen Punkte dicht.*

Beweis. Angenommen, die offene Menge $X \setminus \overline{X_{cl}}$ wäre nichtleer. Dann finden wir ein affines offenes Unterschema $\operatorname{Spec}(A) \subseteq X$, das in $X \setminus \overline{X_{cl}}$ enthalten ist, sodass A nicht der Nullring ist. Also hat $\operatorname{Spec}(A)$ nach Lemma 4.7 einen (in $\operatorname{Spec}(A)$ und ohne Weiteres nicht in X) abgeschlossenen Punkt x.

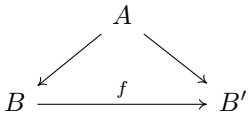
Da nach Beispiel 16.29 eine offene Immersion lokal von endlichem Typ ist, ist auch die Komposition $\operatorname{Spec}(A) \to X \to \operatorname{Spec}(k)$ lokal von endlichem Typ. Damit ist nach dem vorherigen Satz 16.32 die Körpererweiterung $k \hookrightarrow k(x)$ endlich und daher nach dem gleichen Satz der Punkt x abgeschlossen in X, also $x \in X_{cl}$. Dieses ist ein Widerspruch. □

Anhang A. Kommmutaive Algebra

A.1. Ringe und Ideale.

Unsere Standardreferenz für kommutative Algebra ist das Buch [1]. Begriffe wie zum Beispiel *Ring* oder *Modul* werden wir nicht explizit definieren sondern die Definitionen aus [1] benutzen. Es sei aber daran erinnert, dass ein *Ring* A bei uns immer kommutativ ist und ein Einselement besitzt, also ein (folglich eindeutiges) Element $1 \in A$ mit $1a = a$ für alle $a \in A$. Es ist also insbesondere der *Nullring* (0) ein Ring, und zwar der einzige mit $1 = 0$. Ein Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$ hat per Definition die Eigenschaft, dass er die Eins von A auf die Eins von B abbildet, also $f(1_A) = 1_B$ gilt. Es ist das Bild eines Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$ ein Unterring von B, der Kern von f ist aber nicht unbedingt ein Unterring von A.

Eine A-Algebra ist ein Ring B mit einem Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$. (Man kann also Elemente aus B mit Elementen aus A „skalarmultiplizieren“ durch $a{\cdot}b := f(a)b$ und B ist insbesondere ein A-Modul). Jeder Ring ist eine $\mathbb{Z}$-Algebra. Ein A-Algebrenhomomorphismus $f\colon B \to B'$ ist ein Ringhomomorphismus, sodass das Dreieck



kommutiert. Ein A-Algebrenhomomorphismus $A[x_1, \ldots, x_n] \to B$ ist festgelegt durch die Bilder $x_j \to g_j$ und man schreibt $A[g_1, \ldots, g_j] \subseteq B$ für dessen Bild (welches auch eine A-Algebra ist).

Ein *Ideal* I in einem Ring A ist eine additive Untergruppe, sodass gilt

$$a \in A \text{ und } x \in I \Rightarrow ax \in I.$$

Für ein Ideal $I \subseteq A$ gilt $I = A$ genau dann, wenn $1 \in I$. Ein Ideal $I \subseteq A$ ist insbesondere ein A-Modul und alle Untermoduln des A-Moduls A sind genau die Ideale von A. Ist M ein A-Modul und $G \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist

$$AG := \{a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n \in M \mid a_j \in A \text{ und } g_j \in G\}$$

der *von G erzeugte Untermodul von M*. Man setzt $A\emptyset = 0$. Ein A-Modul M heißt *endlich erzeugt (als Modul)*, falls $g_1, \ldots, g_n \in M$ existieren mit $M = A\{g_1, \ldots, g_n\}$. Eine A-Algebra B heißt *von endlichem Typ* (oder *endlich erzeugt als Algebra*), falls $g_1, \ldots, g_n \in B$ existieren mit $B = A[g_1, \ldots, g_n]$ und *endlich*, wenn B endlich erzeugt ist als A-Modul. Natürlich gilt hier die Implikation

$$\text{endlich} \implies \text{von endlichem Typ}.$$

Beispiel A.1. Es ist $A[x]$ eine A-Algebra von endlichem Typ aber sie ist nicht endlich, da $A[x] = A \oplus A \oplus \ldots$ als A-Modul.

Ein beliebiger Durchschnitt von Untermodul eines A-Moduls M ist wieder ein Untermodul und es gilt

$$AG = \bigcap_{\substack{N \subseteq M \text{ Untermodul} \\ G \subseteq N}} N,$$

also ist AG der kleinste Untermodul von M, der G enthält. In dem Spezialfall $M = A$ heißt $(G) := AG$ das *von G erzeugte Ideal*. Ein Ideal I heißt also *endlich erzeugt*, falls es Elemente $x_1, \ldots, x_n \in I$ gibt mit $I = (x_1, \ldots, x_n) := A\{x_1, \ldots, x_n\}$. Ein Ring A heißt *noethersch*, wenn jede aufsteigende Idealkette stationär wird. Dieses ist genau dann der Fall, wenn jedes Ideal endlich erzeugt ist.

In Gegensatz zum Durchschnitt ist eine Vereinigung von Untermoduln nicht unbedingt ein Untermodul und deren Summe ist der kleinste Untermodul, der die Vereinigung enthält: Ist $\{N_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Untermoduln von M, so definiert man deren *Summe* als

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i \in I} N_i &:= A(\cup_{i \in I} N_i) \\
&= \{a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n \in M \mid a_j \in A \text{ und } g_j \in (\cup_{i \in I} N_i)\} \\
&= \{a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n \in M \mid a_j \in A \text{ und } g_j \in N_i\} \\
&= \{m_1 + \ldots + m_n \in M \mid m_j \in N_i\} \\
&= \text{„alle endlichen Summen von Elementen aus den } N_i\text{“}.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist auf diese Weise eine Summe von Idealen definiert und es gilt im Spezialfall

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Für eine endliche Menge $I_1, I_2, \ldots, I_n$ von Idealen definiert man außerdem deren *Produkt* als

$$I_1 \cdot \cdots \cdot I_n := A\{x_1 x_2 \cdots x_n \in A \mid x_j \in I_j\}.$$

Es folgt im Speziellen, dass $I^n = \{x_1 \cdots x_n \in A \mid x_j \in I\}$ und

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m) = (x_1 y_1, x_1 y_2, \ldots, x_n y_m).$$

Die beiden betrachteten Operationen für Ideale sind assoziativ und kommutativ und es gilt $I(\sum_j J_j) = \sum_j I J_j$ sowie $I_1 \cdot \cdots \cdot I_n \subseteq I_1 \cap \ldots \cap I_n$. Ideale $I, J \subseteq A$ heißen *koprim*, falls $I + J = A$.

Ist $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Ringen, so definiert man deren *direktes Produkt* als die Produktmenge $\prod_{i \in I} A_i$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation. Das direkte Produkt mit Nullringen ist (bis auf Isomorphie von Ringen) irrelevant. Sind jeweils Ideale $I_i \subseteq A_i$ gegeben, so ist deren Produkt ein Ideal in $\prod A_i$ und ist I endlich, so sind diese genau die Ideale im Produkt.

Satz A.2 (Chinesischer Restsatz)**.** *Sind $I_1 \ldots, I_n$ paarweise koprime Ideale in A, so gilt $I_1 \cdot \cdots \cdot I_n = I_1 \cap \ldots \cap I_n$. Außerdem ist der injektive Ringhomomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} A \Big/ \bigcap_i I & \longrightarrow & A/I_1 \times \ldots \times A/I_n \\ a + \cap_i I & \mapsto & (a + I_1, \ldots, a + I_n) \end{array}$$

in diesem Fall auch surjektiv, also ein Isomorphismus.

Beispiel A.3. Die Ideale $I_1 = (x)$ und $I_2 = (y)$ im Polynomiring $A = k[x, y]$ sind nicht koprim und der injektive Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{ccccccc} k[x,y] \Big/ ((x) \cap (y)) & \cong & k[x,y] & \longrightarrow & k[x,y]/(x) \times k[x,y]/(y) & \cong & k[y] \times k[x] \\ & & f(-,-) & & \mapsto & & (f(0,-), f(-,0)) \end{array}$$

ist nicht surjektiv, denn er trifft nur Paare (g, h) von Polynomen mit gleichem konstanten Term, also mit $g(0) = h(0)$.

Ein Element $a \in A$ heißt *Einheit*, wenn es ein (folglich eindeutiges) $b \in A$ gibt mit $ab = 1$. Es bezeichnet $A^\times$ die multiplikative abelsche Gruppe der Einheiten von A. Eine Ringabbildung $A \to B$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $A^\times \to B^\times$. Ein Ring $\neq 0$ in dem jedes Element $\neq 0$ eine Einheit ist, heißt *Körper*. Für ein Ideal $I \subseteq A$ gilt

$$\begin{array}{rcl} I \text{ ist } \textit{Maximalideal} & \iff & A/I \text{ ist ein Körper} \\ & \iff & (0) \text{ ist Maximalideal in } A/I \\ & \iff & I \neq A \text{ und kein Ideal liegt echt zwischen } I \text{ und } A. \end{array}$$

Ein Element $a \in A$ heißt *Nullteiler*, wenn es ein $b \neq 0$ in A gibt mit $ab = 0$. Ein Ring $\neq 0$ in dem es keine Nullteiler $\neq 0$ gibt, heißt *Integritätsbereich*. Für ein Ideal $I \subseteq A$ gilt

$$\begin{array}{rcl} I \text{ ist } \textit{Primideal} & \iff & A/I \text{ ist ein Integritätsbereich} \\ & \iff & (0) \text{ ist Primideal in } A/I \\ & \iff & I \neq A \text{ und } ab \in I \Rightarrow a \in I \vee b \in I \\ & \iff & I \neq A \text{ und } JK \subseteq I \Rightarrow J \subseteq I \vee K \subseteq I. \end{array}$$

Ein Element $a \in A$ heißt *nilpotent*, wenn es $n > 0$ gibt mit $a^n = 0$. Ein Ring in dem es keine Nilpotenten $\neq 0$ gibt, heißt *reduzierter Ring*. Für ein Ideal $I \subseteq A$ definiert man das zugehörige *Radikalideal* als $\sqrt{I} := \{a \in A \mid a^n \in I \text{ für } n > 0\}$, es heißt $\mathrm{Nil}(A) := \sqrt{(0)}$ das *Nilradikal* von A und $A_{\mathrm{red}} := A/\mathrm{Nil}(A)$ der zu A gehörige *reduzierte Ring*. Ein Ring A ist genau dann reduziert, wenn $A \cong A_{\mathrm{red}}$. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} I \text{ ist } \textit{Radikalideal} & \iff & A/I \text{ ist ein reduzierter Ring} \\ & \iff & (0) \text{ ist Radikalideal in } A/I \\ & \iff & \text{Die Inklusion } I \subseteq \sqrt{I} \text{ ist eine Gleichheit} \\ & \iff & a^n \in I \text{ für ein } n > 0 \Rightarrow a \in I. \end{array}$$

Für ein Element $a \in A \neq 0$ gelten die Implikationen

$$\text{Einheit} \implies \text{kein Nullteiler} \implies \text{nicht nilpotent},$$

für einen Ring A die Implikationen

$$\text{Körper} \implies \text{Integritätsbereich} \implies \text{reduzierter Ring}$$

und für ein Ideal $I \subseteq A$ die Implikationen

$$\text{Maximalideal} \implies \text{Primideal} \implies \text{Radikalideal}.$$

Beispiel A.4. Sei A ein Ring und $f = a_n x^n + \cdots + a_0 \in A[x]$ ein Polynom, dann gilt

$$\begin{array}{lcl} f \text{ ist Einheit} & \Leftrightarrow & a_0 \text{ ist Einheit und } a_1, \ldots, a_n \text{ nilpotent}, \\ f \text{ ist Nullteiler} & \Leftrightarrow & \text{es gibt ein } b \neq 0 \text{ in } A \text{ mit } fb = 0, \\ f \text{ ist Nilpotent} & \Leftrightarrow & \text{alle } a_0, \ldots, a_n \text{ sind nilpotent} \end{array}$$

und folglich gilt beispielsweise $\mathrm{Nil}(A[x]) = \mathrm{Nil}(A)[x]$.

Summen und Produkte von radikalen, primen oder maximalen Idealen haben jeweils nicht unbedingt die gleiche Eigenschaft. Ebenso sind Durchschnitte von maximalen und primen Idealen nicht unbedingt wieder von dieser Form. Es gilt allerdings für Ideale $I_1, \ldots, I_n$ die Formel

$$\sqrt{I_1} \cap \ldots \cap \sqrt{I_n} = \sqrt{I_1 \cap \ldots \cap I_n} = \sqrt{I_1 \cdot \cdots \cdot I_n}. \tag{A.5}$$

Für positive Exponenten α_i gilt $\sqrt{(g_1^{\alpha_1}, \ldots, g_n^{\alpha_n})} = \sqrt{(g_1, \ldots, g_n)}$ und $\sqrt{\mathfrak{p}^\alpha} = \mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$. Außerdem ist ein beliebiger Durchschnitt von Radikalidealen ein Radikalideal. Unterringe von Körpern sind nicht unbedingt wieder Körper, wie das Beispiel $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ zeigt. Hingegen sind Unterringe (ungleich Null) von Integritätsbereichen wieder solche und Unterrige reduzierter Ringe wieder reduziert.

Die maximalen Ideale in einem endlichen direkten Produkt $A_1 \times \ldots \times A_n$ von Ringen sind von der Form $A_1 \times \ldots \times \mathfrak{m}_j \times \ldots \times A_n$ wobei $\mathfrak{m}_j \subseteq A_j$ Maximalideal ist. Die analoge Aussage gilt auch für Primideale und Radikalideale.

Ringhomomorphismen schicken Einheiten auf Einheiten und es können Nichteinheiten zu Einheiten werden, wie das Beispiel $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ zeigt. Ringhomomorphismen müssen nicht unbedingt Nullteiler auf Nullteiler schicken wie das Beispiel $3 \in \mathbb{Z}/6 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$ zeigt und nicht unbedingt Nichtnullteiler auf Nichtnullteiler wie das Beispiel $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$ zeigt. Ringhomomorphismen schicken Nilpotente auf Nilpotente und es können Nichtnilpotente zu Nilpotenten werden. Urbilder von Idealen unter Ringhomomorphismen sind wieder Ideale. Das Gleiche gilt für Radikalideale und Primideale, jedoch nicht für Maximalideale, wie das Beispiel $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \supseteq (0)$ zeigt. Bilder von Idealen unter Ringhomomorphismen sind nicht unbedingt wieder Ideale. Dieses ist aber beispielsweise richtig, wenn der Ringhomomorphismus surjektiv ist. Surjektive Ringhomomorphismen $f\colon A \twoheadrightarrow B$ sind (bis auf Isomorphie von Ringen) genau die Quotientenabbildungen mit $B \cong A/I$ und $f(a) = a + I$ für ein Ideal $I \subseteq A$. Die Quotientenabbildung f kommutiert mit Summen von Idealen und es gilt im Speziellen $(a_1, \ldots, a_n) + I = (a_1 + I, \ldots, a_n + I)$.

Satz A.6 (Idealkorrespondenz für Quotienten)**.** *Ist $f\colon A \twoheadrightarrow A/I$ mit $a \mapsto a + I$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, so gibt es eine inklusionserhaltende Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Ideale } J \subseteq A, \\ \text{die } I \text{ enthalten} \end{array} \right\} \underset{f^{-1}(K) \hookleftarrow K}{\overset{J \mapsto f(J)}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \text{Ideale von} \\ A/I \end{array} \right\}$$

die auf maximale, prime und radikale Ideale einschränkt.

Man definiert für ein gegebenes Ideal $I \subseteq A$ und ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$

$\mathfrak{p}$ ist *minimales Primideal über* $I \iff I \subseteq \mathfrak{p}$ und kein Primideal liegt echt dazwischen.

Ein *minimales Primideal von* A ist ein minimales Primideal über dem Ideal (0).

Satz A.7. *Jeder Ring $A \neq 0$ hat mindestens ein maximales Ideal. Für ein Ideal $I \neq A$ in einem Ring A gibt es mindestens ein minimales Primideal über I.*

Bemerkung A.8. Es ist vielleicht lohnenswert sich einmal eine Anwendung des Lemmas von Zorn genauer anzuschauen, also zum Beispiel dessen Anwendung im Beweis des ersten Teils des vorherigen Satzes:

- Es sei ein (nichtleeres) *Poset* P gegeben, also zum Beispiel eine Teilmenge der Potenzmenge. In dem hiesigen Fall ist dieses die Menge der echten Ideale.
- Eine total geordnete Teilmenge T von P heißt eine *Kette* und alle diese in P sollen eine obere Schranke in P besitzen. Im hiesigen Fall ist dieses eine Kette von Idealen $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots$ und deren Vereinigung $\cup I_j$ ist, wie man leicht sieht, ein echtes Ideal.
- Also hat P nach dem Lemma von Zorn (mindestens) ein maximales Element, es gibt also kein größeres Element in P. Im hiesigen Fall ist dieses ein maximales Ideal.

Korollar A.9. *Ein Element eines Ringes A ist eine Einheit genau dann, wenn es in keinem Primideal (d.h. in keinem Maximalideal) enthalten ist.*

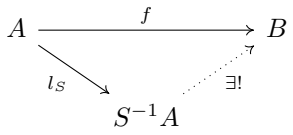
Ein Ring A mit genau einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ heißt *lokaler Ring* und man schreibt dafür auch $(A, \mathfrak{m})$. Insbesondere ist ein Körper ein lokaler Ring mit maximalem Ideal (0). Ein Ring A mit genau einem minimalen Primideal $\mathfrak{p}$ heißt *irreduzibel*. Insbesondere ist ein Integritätsbereich irreduzibel mit minimalem Primideal (0).

Lemma A.10 (Primvermeidung)**.** *Wenn ein Ideal $I \subseteq A$ in einer Vereinigung*

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$$

von endlich vielen Primidealen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \subseteq A$ enthalten ist, so ist I schon in einem der $\mathfrak{p}_j$ enthalten.

Eine *multiplikative Teilmenge* eines Ringes A ist eine Teilmenge $S \subseteq A$ mit $1 \in S$ und $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$. Die *Lokalisierung von A an S* ist der Ring $S^{-1}A$ zusammen mit dem Ringhomomorphismus $l_S : A \to S^{-1}A$ gegeben durch die Eigenschaft, dass jeder Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$ sodass alle Elemente von $f(S)$ invertierbar sind, eindeutig über l_S faktorisiert, also das Diagramm



kommutiert. Diese Lokalisierung existiert und ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} l_S\colon A & \to & A \times S/\!\sim \\ a & \mapsto & \frac{a}{1}, \end{array}$$

wobei $[(a,s)] =: \frac{a}{s} \sim \frac{a'}{s'} := [(a',s')]$ genau dann, wenn $\exists t \in S$ mit $t(as' - ax') = 0$. Die Lokalisierungsabbildung l_S ist injektiv genau dann, wenn S keine Nullteiler enthält. Außerdem gilt

$$S^{-1}A = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in S \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Nil}(A) \cap S \neq \emptyset.$$

Die Einheiten von $S^{-1}A$ sind genau die Elemente $\frac{a}{s}$, sodass es ein $b \in A$ gibt mit $ab \in S$. Sind $S \subseteq S'$ zwei multiplikative Teilmengen von A, so gibt es nach der obigen universellen Eigenschaft einen Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} S^{-1}A & \to & S'^{-1}A \\ \frac{a}{s} & \mapsto & \frac{a}{s} \end{array}$$

der mit den Lokalisierungsabbildungen l_S und $l_{S'}$ ein kommutatives Dreieck bildet.

Bemerkung A.11. Für einen Ring A gibt es einen A-Algebrenisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} S^{-1}A & \to & A[x_s \mid s \in S] \Big/ (x_s s - 1 \mid s \in S) \\ \frac{a}{s} & \mapsto & a x_s. \end{array}$$

Analog zu der obigen Situation für Ringe, definiert man für einen A-Modul M die *Lokalisierung von M an S* als den $S^{-1}A$-Modul $S^{-1}M$ zusammen mit dem A-Modulhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} l_S\colon M & \to & M \times S/\!\sim \\ m & \mapsto & \frac{m}{1}. \end{array}$$

Ist insbesondere $I \subseteq A$ ein Ideal, so ist $S^{-1}I \subseteq S^{-1}A$ ein Ideal und gegeben durch

$$S^{-1}I = \{\tfrac{a}{s} \in S^{-1}A \mid a \in I \text{ und } s \in S\} = (S^{-1}A)l_S(I).$$

Es kommutiert $S^{-1}(-)$ mit endlichen Summen, Produkten, endlichen Durchschnitten und Radikalen von Idealen. Insbesondere gilt $\operatorname{Nil}(S^{-1}A) = S^{-1}\operatorname{Nil}(A)$.

Lemma A.12 (Quotient und Lokalisierung)**.** *Ist $S \subseteq A$ multiplikativ und $A \twoheadrightarrow A/I$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, dann ist die Teilmenge $\bar{S} := S + I$ von A/I multiplikativ und der kanonische Ringhomomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} \bar{S}^{-1}(A/I) & \xrightarrow{\cong} & S^{-1}A \big/ S^{-1}I \\ \frac{a+I}{s+I} & \mapsto & \frac{a}{s} + S^{-1}I \end{array}$$

ist ein Isomorphismus.

Es gibt die beiden folgenden wichtigen Spezialfälle einer Lokalisierung:
Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so heißt

$$A_{\mathfrak{p}} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A = \{\tfrac{a}{s} \mid a \in A \text{ und } s \in A \setminus \mathfrak{p}\}$$

die *Lokalisierung von A an $\mathfrak{p}$*. Der Ring $A_{\mathfrak{p}}$ ist ein lokaler Ring mit dem maximalem Ideal $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{p} = \{\frac{a}{s} \mid a \in \mathfrak{p}, s \in A \setminus p\}$. Die Lokalisierungsabbildung $A \to A_{\mathfrak{p}}$ ist injektiv, wenn beispielsweise A ein Integritätsbereich ist. Es gilt immer $A_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Sind $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$ zwei Primideale so gilt $A \setminus \mathfrak{p} \subseteq A \setminus \mathfrak{p}'$ und es gibt nach obiger Betrachtung einen Ringhomomorphismus $A_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}'}$. Ist A ein Integritätsbereich (und also (0) ein Primideal) so heißt die Lokalisierung $\operatorname{Quot}(A) := A_{(0)}$ der *Quotientenkörper von A*. In diesem Fall sind alle Lokalisierungen nach Primidealen Unterringe von $\operatorname{Quot}(A)$.

Ist $f \in A$ ein Element, so heißt

$$A[\tfrac{1}{s}] := \{1, s, s^2, \ldots\}^{-1}A = \{\tfrac{a}{s^n} \mid a \in A \text{ und } n \geq 0\}$$

die *Lokalisierung von A weg von s* und ist nicht unbedingt ein lokaler Ring. Es ist die Lokalisierungsabbildung $A \to A[\frac{1}{s}]$ injektiv genau dann, wenn s kein Nullteiler ist. Es gilt außerdem

$$A[\tfrac{1}{s}] = 0 \iff s \text{ ist nilpotent.}$$

Für zwei Elemente $s, s' \in A$ liefert die universelle Eigenschaft einen Ringhomomorphismus $A[\frac{1}{s}] \to A[\frac{1}{ss'}]$ mit $\frac{a}{s^n} \mapsto \frac{as'^n}{(ss')^n}$. Dieser stimmt (bis auf Isomorphie von Ringen) mit der Lokalisierungsabbildung $A[\frac{1}{s}] \to A[\frac{1}{s}][\frac{1}{s'}] \cong A[\frac{1}{ss'}]$ überein, d.h. eine Lokalisierung weg von einem Produkt von Elementen kann man „sukzessive“ durchführen.

Bemerkung A.13. Für eine multiplikative Teilmenge $S \subseteq A$ eines Rings A induzieren die kanonischen A-Algebrenhomomorphismen $A[\frac{1}{s}] \to S^{-1}A$ für $s \in S$ einen A-Algebrenisomorphismus

$$\operatorname{colim}_{s \in S} A[\tfrac{1}{s}] \xrightarrow{\cong} S^{-1}A,$$

mit Strukturabbildungen $A[\frac{1}{s}] \to A[\frac{1}{s'}]$ falls $s|s'$ (also $s' = sr$) für den Kolimes wie oben.

Satz A.14 (Idealkorrespondenz für Lokalisierungen)**.** *Ist $l_S\colon A \to S^{-1}A$ eine Lokalisierung, so gibt es eine inklusionserhaltende (aber nicht unbedingt bijektive) Zuordnung*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideale } J \subseteq A \end{array} \right\} \underset{l_S^{-1}(K) \hookleftarrow K}{\overset{J \mapsto S^{-1}J}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideale} \\ \textit{von } S^{-1}A \end{array} \right\}$$

mit $S^{-1}(-)l_S^{-1} = \mathrm{id}$ *und* $(J \cap S \neq \emptyset) \Leftrightarrow (S^{-1}J = S^{-1}A)$ *die einschränkt auf eine Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideale } J \subseteq A \\ \textit{mit } J = J^s \end{array} \right\} \longrightarrow\!\!\!

Satz A.16 (Satz über das Nilradikal)**.** *Für jeden Ring A gilt*

$$\mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p}\subseteq A\\ \text{Primideal}}} \mathfrak{p}.$$

Beweis. Ist $A = 0$ so ist die Aussage klar, denn ein Durchschnitt von Idealen über eine leere Indexmenge ist der ganze Ring. Ist $a \in \mathrm{Nil}(A)$, also $a^n = 0$ für ein $n > 0$, und $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so gilt $a^n = 0 \in \mathfrak{p}$, also auch $a \in \mathfrak{p}$. Für die andere Inklusion sei $a \in \cap\mathfrak{p}$. Angenommen, a ist nicht nilpotent. Dann ist die Lokalisierung $l_S \colon A \to A[\frac{1}{a}] \neq 0$ nicht Null und nach Satz A.7 gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq A[\frac{1}{a}]$ darin. Durch die Idealkorrespondenz für Lokalisierungen ist $l_S^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq A$ ein Primideal welches a nicht enthält. Dieses ist ein Widerspruch und daher ist a nilpotent. □

Korollar A.17. *In einem Ring A gilt für ein Element*

$$\textit{enthalten in minimalem Primideal} \implies \textit{Nullteiler}$$

und die Umkehrung, falls A reduziert ist.

Beweis. Sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal und $a \in \mathfrak{p}$. Wir wollen zeigen, dass a ein Nullteiler ist. Durch die Idealkorrespondenz für Lokalisierungen ist $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ das einzige Primideal in der Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$. Da $\frac{a}{1} \in \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ ist es nach dem Satz über das Nilradikal nilpotent, also $(\frac{a}{1})^n = 0$ für ein $n > 0$. Dieses bedeutet, dass ein $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ existiert mit $ta^n = 0$. Da $t \neq 0$ folgt, dass a ein Nullteiler ist.

Sei nun A reduziert und a ein Nullteiler, also $ab = 0$ für $b \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass a in einem minimalen Primideal enthalten ist. Es gilt nach dem Satz über das Nilradikal

$$b \notin 0 = \mathrm{Nil}(A) = \cap_{\mathfrak{p}\text{ Primideal}}\ \mathfrak{p} = \cap_{\mathfrak{p}\text{ minimales Primideal}}\ \mathfrak{p},$$

es gibt also ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ mit $b \notin \mathfrak{p}$. Da $0 = ab \in \mathfrak{p}$ folgt $a \in \mathfrak{p}$. □

Beispiel A.18. In dem nicht-reduzierten Ring $k[x,y]/(x^2,xy)$ ist (x) das einzige minimale Primideal, denn $(x^2,xy) = (x) \cap (x^2,xy,y^2) = (x) \cap (x,y)^2$. Allerdigs ist $y \notin (x)$ und es ist y ein Nullteiler.

Korollar A.19. *Für einen Ring A gilt*

$$\begin{aligned} A \textit{ ist irreduzibel} &\iff A \textit{ hat genau das minimale Primideal } \mathrm{Nil}(A)\\ &\iff \mathrm{Nil}(A) \textit{ ist Primideal.}\end{aligned}$$

Beweis. Ist A irreduzibel und hat also genau ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$, so ist nach dem Satz über das Nilradikal $\mathrm{Nil}(A) = \mathfrak{p}$ und insbesondere ist $\mathrm{Nil}(A)$ ein (minimales) Primideal.

Sei umgekehrt $\mathrm{Nil}(A)$ ein Primideal. Nach dem Satz über das Nilradikal wäre $\mathrm{Nil}(A)$ in jedem anderen möglichen minimalen Primideal enthalten und daher kann es keine anderen minimalen Primideale geben. Also ist $\mathrm{Nil}(A)$ das einzige minimale Primideal und insbesondere A irreduzibel. □

Korollar A.20. *Für einen Ring A gilt*

$$A \textit{ ist Integritätsbereich} \iff A \textit{ ist irreduzibel und reduziert.}$$

Ein Quotient und eine Lokalisierung eines noetherschen Rings ist wieder ein noetherscher Ring.

Lemma A.21. *In einem noetherschen Ring A gibt es nur endlich viele minimale Primideale über einem gegebenen Ideal $I \neq A$.*

Beweis. Der Satz A.7 zeigt, dass es mindestens ein Primideal über einem gegebenen Ideal $I \neq A$ gibt. Angenommen es gibt ein Ideal $I \neq A$ mit unendlich vielen minimalen Primidealen darüber. Dann ist die Menge solcher Ideale nichtleer und ist

$$I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots$$

eine Kette von Idealen (mit jeweils unendlich vielen minimalen Primidealen über jedem I_j), so stabilisiert sich diese, da A noethersch ist, und hat somit eine obere Schranke. Mit dem

Lemma von Zorn gibt es also ein maximales Element I der Menge von Idealen $\neq A$ mit unendlich vielen minimalen Primidealen darüber. Es kann I kein Primideal sein, sonst wäre es sein einziges minimales Primideal über I. Also gibt es $a, b \in A$ mit $ab \in I$, aber $a \notin I$ und $b \notin I$. Setze $I_a := I + (a)$ und $I_b := I + (b)$. Ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal über I, so gilt $ab \in \mathfrak{p}$, also $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$, also $I \subsetneq I_a \subseteq \mathfrak{p}$ oder $I \subsetneq I_b \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ ist auch ein minimales Primideal über I_a oder I_b. Es müssen also unendlich viele der unendlich vielen minimalen Primideale $\mathfrak{p}$ über I auch minimale Primideale über I_a oder über I_b sein. Dieses ist ein Widerspruch zur Maximalität von I. □

Satz A.22 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Ist A ein noetherscher Ring, so ist auch jeder Polynomring $A[x_1, \ldots, x_n]$ in endlich vielen Variablen noethersch.*

Da Bilder noetherscher Ringe unter Ringhomomorphismen wieder noethersch sind folgt aus dem Hilbertschen Basissatz:

$$A \text{ ist noethersch } \implies \text{ Jede } A\text{-Algebra von endlichem Typ ist noethersch.}$$

Beispiel A.23. Unterringe noetherscher Ringe sind nicht unbedingt wieder noethersch wie das Beispiel $k[x, xy, xy^2, \ldots] \subseteq k[x, y]$ zeigt, denn hier wird die aufsteigende Idealkette $(x) \subsetneq (x, xy) \subsetneq (x, xy, xy^2) \subsetneq \ldots$ nicht stationär.

Die *(Krull-)Dimension* $\dim(A)$ eines Ringes A ist definiert als das Supremum über die Länge $d \geq 0$ von aufsteigenden Primidealketten

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d.$$

Insbesondere gilt $\dim(0) = -\infty$ und ein Körper hat die Dimension Null. Ist $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein gewähltes Primideal und betrachtet man nur aufsteigende Primidealketten die mit $\mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$ enden, so heißt das Supremum über deren Länge die *Höhe von* $\mathfrak{p}$. Die Dimension von A ist gleich dem Supremum über die Höhen der maximalen Ideale von A (eine kleinere Kette kann man durch ein maximales Ideal verlängern). Die Höhe eines Primideals $\mathfrak{p} \subseteq A$ ist genau die Krull-Dimension $\dim(A_\mathfrak{p})$ des lokalen Rings $A_\mathfrak{p}$, wie man mit der Idealkorrespondenz für Lokalisierungen sieht. Die Höhe $\mathrm{ht}(I)$ eines beliebigen echten Ideals $I \subseteq A$ ist definiert als das Infimum über die Höhen der (minimalen) Primideale darüber. Es gilt zusammen mit der Idealkorrespondenz für Quotienten die Ungleichung

$$\mathrm{ht}(I) + \dim(A/I) \leq \dim(A),$$

die nicht unbedingt eine Gleichheit ist, noch nicht einmal für Primideale I. Ein lokaler noetherscher Ring hat endliche Krulldimension, was für einen beliebigen noetherschen Ring aber nicht unbedingt gilt.

Satz A.24 (Krullscher Hauptidealsatz/Krullscher Höhensatz)**.** *In einem noetherschen Ring A hat jedes minimale Primideal über $(a_1, \ldots, a_n)$ maximal die Höhe n. Umgekehrt ist jedes Primideal der Höhe n ein minimales Primideal über einem Ideal $(a_1, \ldots, a_n)$.*

Für einen Ring $A \neq 0$ gilt

$$A \text{ ist artinsch } \iff A \text{ ist noethersch und } \dim(A) = 0.$$

Satz A.25. *Ist A ein noetherscher Ring, so gilt*

$$\dim(A[x_1, \ldots, x_n]) = \dim(A) + n.$$

In einem noetherschen Ring ist jede Nichteinheit $\neq 0$ ein Produkt von irreduziblen Elementen. Hierraus folgt, dass es in einem noetherschen Ring für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ irreduzible Elemente a_j gibt mit $\mathfrak{p} = (a_1, \ldots, a_n)$, wobei n die minimale Anzahl von Erzeugern des Ideals $\mathfrak{p}$ ist.

Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring, so heißt die minimale Anzahl $r = \dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ von Erzeugern des maximalen Ideals die *Einbettungsdimension* und es gilt

$$r \leq \dim(A)$$

nach dem Krullschen Höhensatz. Ein solcher Ring heißt *regulär*, wenn diese Ungleichung eine Gleichung ist.

Lemma A.26. *Ein regulärer lokaler Ring ist ein Integritätsbereich.*

Eine Lokalisierung eines regulären lokalen Rings nach einem Primideal ist wieder ein regulärer lokaler Ring. Ein beliebiger noetherscher Ring heißt *regulär*, wenn die Lokalisierung an jedem seiner Primideale ein regulärer lokaler Ring ist. Allgemeiner heißt eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ von (einer geeigneten Teilmenge von) Ringen eine *lokale Eigenschaft*, falls für alle Ringe A (dieser Teilmenge) gilt

$$A \text{ hat } \mathcal{E} \iff \text{Jede Lokalisierung } A_{\mathfrak{p}} \text{ an einem Primideal hat } \mathcal{E}.$$

Es ist also Regularität eine lokale Eigenschaft noetherscher Ringe. Ist $\mathcal{E}$ eine lokale Eigenschaft, so gilt sogar: A hat $\mathcal{E} \iff$ Jede Lokalisierung $A_{\mathfrak{m}}$ an einem Maximalideal hat $\mathcal{E}$.

Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Ein Element $b \in B$ heißt *ganz über* A, wenn es Nullstelle eines normierten Polynoms

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

aus $f(A)[x]$ ist. Es gibt eine Faktorisierung von f als

$$A \xrightarrow{\text{ganz}} \tilde{A} \xhookrightarrow{\text{ganz abgeschlossen}} B$$

durch Ringhomomorphismen, wobei $\tilde{A} := \{b \in B \mid b \text{ ist ganz über } A\}$ der *ganze Abschluss (von A in B)* heißt (Dieses ist eine idempotente Konstruktion, d.h. der ganze Abschluss von $\tilde{A}$ in B ist wieder $\tilde{A}$). Diese Faktorisierung wird respektiert von einer beliebigen Lokalisierung nach einer multiplikativen Teilmenge $S \subseteq A$. Ist $A = \tilde{A}$ so heißt f *ganz abgeschlossen* und ist $\tilde{A} = B$ so heißt f *ganz*. Für einen Integritätsbereich A und den Ringhomomorphismus $A \hookrightarrow \mathrm{Quot}(A)$ heißt $\tilde{A}$ die *Normalisierung von* A und A heißt *normal*, falls $A = \tilde{A}$. Jeder faktorielle und jeder reguläre Ring ist normal.

Lemma A.27 (Lying over)**.** *Ist $f\colon A \hookrightarrow B$ ganz und injektiv, so ist jedes Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ Urbild $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$ eines Primideals $\mathfrak{q} \subseteq B$.*

Der nächste Satz wird mit dem sogenannten *Going up Theorem* bewiesen, welches wiederum mit dem Lemma A.27 gezeigt wird.

Satz A.28. *Ist $f\colon A \hookrightarrow B$ ganz und injektiv, so gilt* $\dim(A) = \dim(B)$.

Lemma A.29. *Für einen Ringhomomorphismus gilt*

$$\textit{endlich} \iff \textit{von endlichem Typ und ganz.}$$

Satz A.30 (Noether-Normalisierung)**.** *Sei k ein Körper und $B \neq 0$ eine k-Algebra von endlichem Typ. Dann gibt es eine Faktorisierung*

$$k \hookrightarrow k[x_1, \ldots, x_d] \xhookrightarrow[\text{injektiv}]{\text{endlich}} B$$

des Strukturmorphismus von B.

Beweis. Weil $B \neq 0$ ist $k \hookrightarrow B$ injektiv. Da B von endlichem Typ ist, gibt es Erzeuger $g_1, \ldots, g_n \in B$ mit $B = k[g_1, \ldots, g_n]$. Wir machen eine Induktion über die Anzahl n der Erzeuger. Für $n = 0$ ist offenbar $k = B$ und wir sind fertig.

Im Induktionsschritt möchten wir die Aussage für n Erzeuger zeigen. Falls $g_1, \ldots, g_n$ algebraisch unabhängig über k sind, also die k-Algebraabbildung $k[x_1, \ldots, x_n] \to B$ mit $x_j \mapsto g_j$ injektiv, so ist $k[x_1, \ldots, x_n] \cong B$ und wir sind fertig. Andernfalls gibt es ein $0 \neq f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ mit $f(g_1, \ldots, g_n) = 0$. Setze $h_j := g_j - g_n^{N^j}$ für ein geeignetes $N \gg 0$, was wir noch genauer festlegen werden. Es gilt offenbar

$$0 \neq B' := k[h_1, \ldots, h_{n-1}] \xhookrightarrow{(*)} k[h_1, \ldots, h_{n-1}, g_n] = k[g_1, \ldots, g_n] = B.$$

und wir wollen zeigen, dass g_n ganz über B' ist. Dann sind wir mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung fertig. Das Polynom f ist von der Form

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha \; x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

für $a_\alpha \in k$. Der α-te Summand von $f(g_1, \ldots, g_n) = f(h_1 + g_n^{N^1}, \ldots, h_{n-1} + g_n^{N^{n-1}}, g_n)$ ist

$$\begin{aligned} & a_\alpha \ (h_1 + g_n^{N^1})^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot (h_{n-1} + g_n^{N^{n-1}})^{\alpha_{n-1}} \cdot g_n^{\alpha_n} \\ = \quad & a_\alpha \ g_n^{k_\alpha} \ + \ (\text{ Terme von kleinerem Grad in } g_n \ ) \end{aligned}$$

mit $k_\alpha := N^1\alpha_1 + \ldots + N^{n-1}\alpha_{n-1} + \alpha_n$. Wir möchten nun N so wählen, dass es unter allen Indizes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $a_\alpha \neq 0$ genau einen gibt, sodass die Zahl k_α am größten ist. Dann gilt

$$0 = f(g_1, \ldots, g_n) = a_\alpha \ g_n^{k_\alpha} \ + \ (\text{ Terme von kleinerem Grad in } g_n \ )$$

womit wir nach Teilen durch a_α eine Ganzheitsgleichung für g_n in $k[h_1, \ldots, h_{n-1}] = B'$ gefunden hätten. Ein solche Zahl N gibt es aber insbesondere, wenn es eine Zahl N gibt, sodass alle k_α mit $a_\alpha \neq 0$ verschieden sind. Dafür wählen wir $N > \max\{\alpha_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}, a_\alpha \neq 0\}$, denn dann sind die $\alpha_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ genau die Koeffizienten von

$$k_\alpha := \alpha_n + N^1\alpha_1 + \ldots + N^{n-1}\alpha_{n-1}$$

in der N-adischen Entwicklung und somit k_α durch $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eindeutig festgelegt. □

Bemerkung A.31. Falls der Körper k in der Noether Normalisierung A.30 mindestens unendlich viele Elemente hat, so kann man im obigen Beweis die Definition von h_j durch die „lineare“ Definition $h_j := g_j - \lambda_j g_n$ ersetzen, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in k$ so gewählt sind, dass

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 1) \neq 0,$$

was bei einem unendlichen Körper möglich ist.

Eine Körpererweiterung $f\colon k \hookrightarrow B$ (also ein Ringhomomorphismus zwischen Körpern) heißt *algebraisch*, wenn f ganz ist und andernfalls *transzendent*. Der *Transzendenzgrad* $\mathrm{trdeg}_k(B)$ einer Körpererweiterung ist das größte $n \geq 0$, sodass es einen injektiven Ringhomomorphismus

$$f\colon k[x_1, \ldots, x_n] \hookrightarrow B$$

gibt. Durch die universelle Eigenschaft der Lokalisierung faktorisiert dieser natürlich über $k(x_1, \ldots, x_n) := \mathrm{Quot}(k[x_1, \ldots, x_n]) \hookrightarrow B$. Eine Körpererweiterung heißt *rein transzendent*, falls $k(x_1, \ldots, x_n) \cong B$ ein Isomorphismus ist. Für jede Körpererweiterung $k \hookrightarrow B$ gibt es eine Faktorisierung

$$k \longrightarrow k(x_1, \ldots, x_n) \xhookrightarrow[\text{injektiv}]{\text{ganz}} B$$

in eine rein transzendente und eine (nicht unbedingt endliche) algebraische Körpererweiterung. Durch die Noether Normalisierung sieht man, dass eine Körpererweiterung von endlichem Typ (als Algebra) schon algebraisch ist. Insbesondere ist der Ringhomomorphismus $k[x_1, \ldots, x_n] \hookrightarrow k(x_1, \ldots, x_n)$ nicht von endlichem Typ.

Der Durchschnitt aller maximalen Ideale eines Rings heißt das *Jacobson-Radikal* $\mathrm{Jac}(A)$. Nach dem Satz über das Nilradikal gilt $\mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathrm{Jac}(A)$. Außerdem gilt $1 + \mathrm{Jac}(A) \subseteq A^\times$.

Bemerkung A.32. Für einen Ring A gilt $\mathrm{Nil}(A[x]) = \mathrm{Jac}(A[x])$.

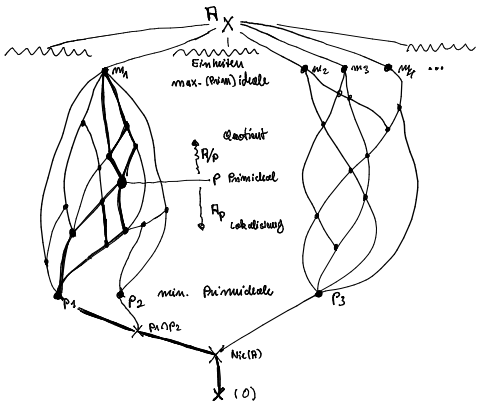


Abbildung 2: Skizze der Ideale (×) und Primideale (•) eines Rings A

A.2. Moduln und Tensorprodukte.

Sei A ein Ring. Eine (über eine Teilmenge I von $\mathbb{Z}$ indizierte) Sequenz

$$\cdots \to M_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+2} \to \cdots$$

von A-Moduln M_i und A-linearen Abbildungen heißt *Komplex*, falls die Komposition zweier aufeinanderfolgender Abbildungen stets die Nullabbildung ist, also falls $\operatorname{im}(f_{i-1}) \subseteq \ker(f_i)$ für alle möglichen $i \in I$ gilt. Ein Komplex heißt *exakt an der Stelle i* falls sogar die Gleichheit $\operatorname{im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$ gilt und *exakt*, wenn er an allen möglichen Stellen $i \in I$ exakt ist.

Eine A-lineare Abbildung $\varphi\colon M \to N$ von A-Moduln passt in eine exakte Sequenz

$$0 \to \ker(\varphi) \to M \xrightarrow{\varphi} N \to \operatorname{coker}(\varphi) \to 0$$

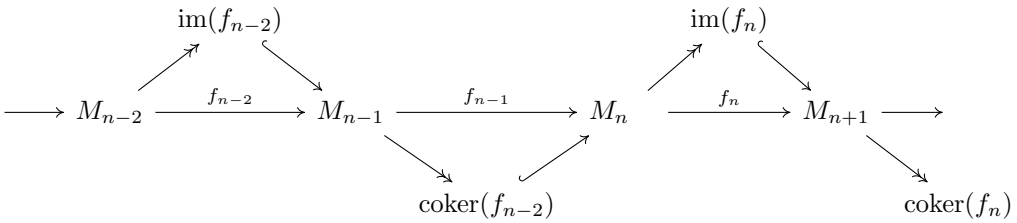
von A-Moduln, wobei $\operatorname{coker}(\varphi) := N/\operatorname{im}(\varphi)$. Die Abbildung φ ist ein *Monomorphismus* genau dann, wenn $\ker(\varphi) = 0$ (also hier genau dann, wenn φ injektiv ist) und ein *Epimorphismus* genau dann, wenn $\operatorname{coker}(\varphi) = 0$ (also hier genau dann, wenn φ surjektiv ist). Ein *Isomorphismus* ist eine A-lineare Abbildung, die ein Monomorphismus und ein Epimorphismus ist. Eine exakte Sequenz

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

ist genau dann isomorph zu der trivialen exakten Sequenz

$$0 \to M' \to M' \oplus M'' \to M'' \to 0$$

wenn die Abbildung g einen *Schnitt* hat, also eine A-lineare Abbildung $i\colon M'' \to M$ existiert mit $g \circ i = \mathrm{id}_{M''}$. Dieses ist genau dann der Fall, wenn die Abbildung f eine *Retraktion* hat, also eine A-lineare Abbildung $p\colon M \to M'$ existiert mit $p \circ f = \mathrm{id}_{M'}$. Eine lange exakte Sequenz kann wie folgt in kurze exakte Sequenzen aufgeteilt werden.



Ein A-Modul heißt *frei*, wenn er isomorph zu einer direkten Summe $\bigoplus_{i\in\mathcal{I}} A^i$ ist. Ist der Ring $A = k$ ein Körper, so ist ein A-Modul genau ein k-Vektorraum und daher frei.

Lemma A.33 (Schlangenlemma)**.** *Sei A ein Ring und*

$$\begin{array}{ccccccc} & & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi''} \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' \end{array}$$

ein Diagramm von A-Moduln und A-linearen Abbildungen mit exakten Zeilen, so gibt es eine exakte Sequenz

$$\ker(\varphi') \to \ker(\varphi) \to \ker(\varphi'') \to \operatorname{coker}(\varphi') \to \operatorname{coker}(\varphi) \to \operatorname{coker}(\varphi'')$$

die links mit einer Null ergänzt werden kann, falls $M' \to M$ ein Monomorphismus ist und rechts mit einer Null ergänzt werden kann, falls $N \to N''$ ein Epimorphismus ist.

Lemma A.34 (5er-Lemma)**.** *Sei A ein Ring und*

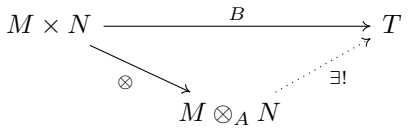
$$\begin{array}{ccccccccc} K & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & C \\ \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi''} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ L & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & D \end{array}$$

ein Diagramm von A-Moduln und A-linearen Abbildungen mit exakten Zeilen, dann gilt

(1) φ' und φ'' sind Epimorphismen und c ist ein Monomorphismus $\Longrightarrow$ φ ein Epimorphismus,

(2) φ' und φ'' sind Monomorphismen und k ist ein Epimorphismus $\Longrightarrow$ φ ein Monomorphismus.

Sind M und N zwei A-Moduln, so ist das *Tensorprodukt* $M \otimes_A N$ von M und N (über A) ein A-Modul zusammen mit einer A-bilinearen Abbildung $\otimes\colon M \times N \to M \otimes_A N$ mit der universellen Eigenschaft, dass jede A-bilineare Abbildung $B\colon M \times N \to T$ eindeutig über $M \otimes_A N$ durch eine eindeutige A-lineare Abbildung $M \otimes_A N \to T$ faktorisiert, also das Diagramm



kommutiert. Grob gesprochen ist das Tensorprodukt also ein „Linear-Macher“ für bilineare Abbildungen. Die Abbildung $\otimes\colon M \times N \to M \otimes_A N$ ist nicht im Allgemeinen surjektiv und Elemente $m \otimes n := \otimes(m, n)$ im Bild werden *Elementartensoren* genannt. Jedes Element von $M \otimes_A N$ ist eine endliche Summe von Elementartensoren. Oft wird die Strukturabbildung ignoriert und der A-Modul $M \otimes_A N$ als *das Tensorprodukt* von M und N bezeichnet. Für die Konstruktion teilt man die Relationen

$$\begin{aligned} (m+m')\otimes n &= (m\otimes n)+(m'\otimes n) \\ m\otimes(n+n') &= (m\otimes n)+(m\otimes n') \\ (am)\otimes n &= a(m\otimes n) = m\otimes(an) \end{aligned}$$

aus dem freien A-Modul auf der Menge $M \times N$ heraus. Insbesondere kann man also wegen der letzten Relation „Elemente aus dem Ring A nach vorne und hinten schieben“ und wegen der ersten Relation gilt $0 \otimes n = 0$.

Beispiel A.35. Es gilt $\mathbb{Z}/m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/\mathrm{ggT}(m, n)$.

Beispiel A.36. Ist $A = k$ ein Körper, M ein k-Vektorraum mit einer Basis $(v_1, \ldots, v_p)$ und N ein k-Vektorraum mit einer Basis $(w_1, \ldots, w_q)$, so hat der k-Vektorraum $M \otimes_k N$ die Basis $(v_1 \otimes w_1, \ldots, v_p \otimes w_q)$.

Ist $f\colon M \to M'$ eine A-lineare Abbildung, so ist auch $f \otimes N\colon M \otimes_A N \to M' \otimes_A N$ durch $m \otimes n \mapsto f(m) \otimes n$ eine A-lineare Abbildung. Die Zuordnung $(-) \otimes_A N$ ist ein Funktor von der Kategorie der A-Moduln in die Kategorie der A-Moduln und erfüllt die folgenden Eigenschaften.

$$\begin{aligned} M \otimes_A N &\cong N \otimes_A M && \text{(Symmetrie)} \\ (L \otimes_A M) \otimes_A N &\cong L \otimes_A (M \otimes_A N) && \text{(Assoziativität)} \\ M \otimes_A A &\cong M && \text{(Neutralität des Grundrings)} \\ M \otimes_A 0 &\cong 0 && \text{(Nullmodul)} \\ \textstyle\bigoplus_{i\in\mathcal{I}}(M_i \otimes_A N) &\cong \big(\textstyle\bigoplus_{i\in I} M_i\big) \otimes_A N && \text{(Direkte Summen/Distributivität)} \end{aligned}$$

Lemma A.37 (Rechtsexaktheit des Tensorprodukts)**.** *Der Funktor $(-)\otimes_A N$ ist rechtsexakt, d.h. ist*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln, so ist auch

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f\otimes N} M \otimes_A N \xrightarrow{g\otimes N} M'' \otimes_A N \to 0$$

eine exakte Sequenz. Es gilt

$$\ker(g \otimes N) = \{A\text{-}\textit{Untermodul von } M \otimes_A N \textit{ erzeugt von } m \otimes n \textit{ mit } g(m) = 0\}.$$

In der Situation des vorherigen Lemmas ist die induzierte gestrichelte surjektive Abbildung

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M'\otimes_A N & \longrightarrow & M\otimes_A N & \xrightarrow{g\otimes N} & M''\otimes_A N & \longrightarrow & 0 \\ & & \vdots & & \| & & \| & & \| \\ 0 & \longrightarrow & \ker(g\otimes N) & \longrightarrow & M\otimes_A N & \xrightarrow{g\otimes N} & M''\otimes_A N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

nicht im Allgemeinen injektiv, das Tensorprodukt also nicht im Allgemeinen linksexakt. Ein A-Modul N heißt *flach*, falls der Funktor $(-) \otimes_A N$ tatsächlich exakt ist, also falls für jeden Komplex $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ gilt

$$\begin{array}{rll} 0 \to M' \to M \to M'' \to 0 & \text{exakt} & \Longrightarrow \\ 0 \to M' \otimes_A N \to M \otimes_A N \to M'' \otimes_A N \to 0 & \text{exakt.} & \end{array}$$

Ein A-Modul N heißt *treuflach*, falls diese Implikation eine Äquivalenz ist.

Für einen A-Modul gelten die Implikationen

$$\text{frei} \implies \text{projektiv} \implies \text{flach.}$$

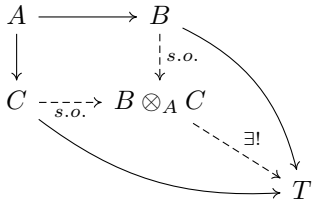
Ist A noethersch, so ist jeder endlich erzeugte flache Modul auch projektiv. Ist A lokal, so ist jeder endlich erzeugte flache Modul auch frei.

Sind B und C zwei A-Algebren, so hat das oben betrachtete Tensorprodukt $B \otimes_A C$ der unterliegenden A-Moduln durch die innere Multiplikation $(b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') := bb' \otimes cc'$ die Struktur einer A-Algebra und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle b \mapsto b \otimes 1} \\ C & \xrightarrow[c \mapsto 1 \otimes c]{} & B \otimes_A C \end{array}$$

von Ringen kommutiert.

Bemerkung A.38. Das obige Diagramm ist sogar ein *Pushout-Diagramm* in der Kategorie der (kommutativen) Ringe (mit Eins), d.h. $B \otimes_A C$ ist charakterisiert durch die folgende universelle Eigenschaft. Für jedes kommutative ungestrichelte Diagramm von Ringen und Ringabbildungen



gibt es eine eindeutige Ringabbildung wie angedeutet, sodass alles kommutiert.

Ist $A \to B$ eine Ringabbildung und N ein B-Modul, so ist N auch ein A-Modul, was man *Einschränkung von Skalaren* nennt. Ist umgekehrt M ein A-Modul, so ist $B \otimes_A M$ ein B-Modul, was man *Erweiterung von Skalaren* nennt. Diese beiden Konstruktionen sind nicht im Allgemeinen invers zueinander.

Lemma A.39 (Kürzungsregel)**.** *Ist $A \to B$ eine Ringabbildung, M ein A-Modul und N ein B-Modul, so gibt es einen B-Modulisomorphismus*

$$N \otimes_B (B \otimes_A M) \cong N \otimes_A M$$

wobei die B-Modulstruktur auf $N \otimes_A M$ durch $b \cdot (n \otimes m) := bn \otimes m$ gegeben ist.

Man sagt, dass die Ringabbildung $A \to B$ flach (bzw. treuflach) ist, falls B ein flacher (bzw. treuflacher) A-Modul ist. Eine Komposition flacher (bzw. treuflacher) Ringabbildungen ist wieder flach (bzw. treuflach). Erweiterung von Skalaren erhält die Eigenschaften endlich erzeugt, flach oder treuflach zu sein. Dieses ist für Einschränkung von Skalaren nicht im Allgemeinen richtig.

Lemma A.40. *Eine Lokalisierung $l_S \colon A \to S^{-1}A$ ist flach.*

Beispiel A.41. Die Projektion $A := k[x]/(x^2) \to k$ mit $x \mapsto 0$ ist nicht flach, denn es ist $0 \to (\bar{x}) \to A \to k \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln (es ist $(\bar{x})$ das maximale Ideal des lokalen Rings A), aber Anwenden von $(-) \otimes_A A/(\bar{x})$ ergibt die Nullabbildung $k \cong (\bar{x}) \otimes_A A/(\bar{x}) \to A \otimes_A A/(\bar{x}) \cong k$, denn $\bar{x} \otimes 1 \mapsto \bar{x} \otimes 1 = 1 \otimes \bar{x} = 0$.

Beispiel A.42. Eine Körpererweiterung $k \to K$ ist treuflach.

Eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ von Moduln heißt eine *lokale Eigenschaft*, falls für alle Ringe A und alle A-Moduln M gilt

$$M \text{ hat } \mathcal{E} \iff \text{Jede Lokalisierung } M_{\mathfrak{p}} \text{ (als } A_{\mathfrak{p}}\text{-Modul) hat } \mathcal{E}$$

Ist $\mathcal{E}$ eine solche lokale Eigenschaft, so gilt sogar: M hat $\mathcal{E} \iff$ Jede Lokalisierung $M_{\mathfrak{m}}$ (als $A_{\mathfrak{m}}$-Modul) an einem Maximalideal von A hat $\mathcal{E}$. Flachheit und Nullheit sind lokale Eigenschaften. Es ist sogar jede Lokalisierung eines flachen (bzw. treuflachen) A-Moduls an einer multiplikativen Teilmenge $S \subseteq A$ ein flacher (bzw. treuflacher) $S^{-1}A$-Modul.

Satz A.43 (Tensorprodukt und Quotienten/Lokalisierungen)**.** *Sei A ein Ring und M ein A-Modul.*

(1) Ist $I \subseteq A$ ein Ideal, so ist

$$\begin{array}{ccc} A/I \otimes_A M & \xrightarrow{\simeq} & M/IM \\ (a+I) \otimes m & \mapsto & am+I \end{array}$$

ein Isomorphismus von A/I-Moduln (und somit auch von A-Moduln).

(2) Ist $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, so ist

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}A \otimes_A M & \xrightarrow{\simeq} & S^{-1}M \\ \frac{a}{s} \otimes m & \mapsto & \frac{am}{s} \end{array}$$

ein Isomorphismus von $S^{-1}A$-Moduln (und somit auch von A-Moduln).

Korollar A.44. *Sei $f\colon A \to B$ eine Ringabbildung und $I \subseteq A$ ein Ideal, so gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \hookrightarrow & A & \longrightarrow & A/I & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & (f(I)) & \hookrightarrow & A \otimes_A B \cong B & \longrightarrow & A/I \otimes_A B \cong B/(f(I)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

von A-Moduln mit exakten Zeilen, wobei $(f(I)) = B/IB$ das von $f(I)$ in B erzeugte Ideal bezeichne.

Lemma A.45 (Nakayama)**.** *Für ein Ideal $I \subseteq A$ und einen endlich erzeugten A-Modul M gilt*

$$\begin{array}{rcl} IM = M & \Longrightarrow & \text{Es gibt ein } a \in I \text{ mit } (1+a)M = 0 \\ & \overset{I \subseteq \operatorname{Jac}(A)}{\Longrightarrow} & M = 0 \end{array}$$

Beispiel A.46. Sei p eine Primzahl. Es ist $\mathbb{Q}$ ein nicht endlich erzeugter $A = \mathbb{Z}_{(p)}$-Modul und es gilt für das maximale Ideal $\mathfrak{m} = (p) = \operatorname{Jac}(A)$, dass $\mathfrak{m}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$, aber offenbar $\mathbb{Q} \neq 0$.

Korollar A.47. *Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter A-Modul. Dann gilt:*

$$g_1, \ldots, g_n \text{ erzeugen } M \iff \bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_n \text{ erzeugen den } k(\mathfrak{m})\text{-Vektorraum } M/\mathfrak{m}M,$$

wobei $\bar{\cdot}$ die A-lineare Abbildung $M \twoheadrightarrow M/\mathfrak{m}M \cong k(\mathfrak{m}) \otimes_A M$ bezeichne.

Korollar A.48. *Ist M ein endlich erzeugter A-Modul, so ist eine surjektive A-lineare Abbildung $M \to M$ auch injektiv.*

Aufgaben.

Aufgabe A.49. Sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}''$ eine Kette von Primidealen. Man zeige, dass es *unendlich viele verschiedene* Primideale $\mathfrak{p}$ mit dieser Eigenschaft gibt.
(Hinweis: Man benutze die Primvermeidung und den Krullschen Höhensatz.)

Aufgabe A.50. Man zeige, dass Reduziertheit eine lokale Eigenschaft von Ringen ist. Außerdem zeige man, dass Irreduzibilität *keine* lokale Eigenschaft von Ringen ist.

Aufgabe A.51. Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring und r die minimale Anzahl von Erzeugern des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$. Man zeige mit Hilfe des Nakayama Lemmas und dem Krullschen Höhensatz, dass $r = \dim_{k(\mathfrak{m})} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$.

Aufgabe A.52. Sei $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M, N endlich erzeugte A-Moduln. Man zeige mit Hilfe des Nakayama Lemmas die Implikation $M \otimes_A N \cong 0 \Rightarrow M \cong 0 \vee N \cong 0$.

Aufgabe A.53. Man zeige Korollar A.48.

Anhang B. Lösungen zu den Aufgaben

Literatur

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London Don Mills, Ont., 1969.

[2] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra: Volume 1, Basic Category Theory* Cambridge University Press 1994.

[3] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic geometry I*, Advanced Lectures in Mathematic, Vieweg + Teubner, Wiesbaden 2010.

[4] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[5] G. Kemper, *A course in commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 256, Springer, Heidelberg, 2011.

[6] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002.

[7] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Mathematics Lecture Note Series, vol. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.

[8] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, Online (version dated June 31, 2021) available at the URL stacks.math.columbia.edu, 2021.

Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg, Germany
Email address: florian.strunk@ur.de