Algebraische Geometrie I
Wintersemester 2017/2018

Florian Strunk

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Dies ist ein Skript zur Vorlesung *Algebraische Geometrie I* an der Universität Regensburg im Wintersemester 2017/2018. Diese Einleitung ist stark beeinflusst von dem Buch [3].

Algebraische Geometrie hat ihren Ursprung in der Untersuchung von Systemen

$$\begin{array}{rcl} f_1(a_1,\dots,a_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_m(a_1,\dots,a_n) & = & 0 \end{array}$$

von Polynomgleichungen. Hier sind $f_1,\dots,f_m$ Polynome in n Variablen mit Koeffizienten in einem Körper k. Sei $\mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_m) \subseteq k^n$ die Lösungsmenge des obigen Systems, also

$$\mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_m) = \{(a_1,\dots,a_n) \in k^n \mid f_i(a_1,\dots,a_n) = 0 \text{ für alle } i \in \{1,\dots,m\}\}.$$

Sind die Polynome $f_1,\dots,f_m$ linear (und haben jeweils keinen konstanten Term), so ist $\mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_m)$ ein Untervektorraum von k^n, mit dessen Untersuchung sich die *Lineare Algebra* beschäftigt. Für beliebige Polynome ist diese Lösungsmenge sicherlich nicht unbedingt ein Untervektorraum, wie das folgende Bild illustriert.

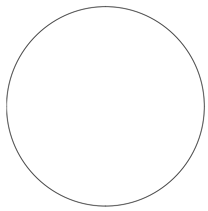

Abbildung 1: Die Lösungsmenge $\mathcal{V}_k(X_1^2 + X_2^2 - 1)$ in $\mathbb{R}^2$

Die Algebraische Geometrie untersucht den Zusammenhang zwischen der Geometrie der Lösungsmenge $\mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_m)$ und den algebraischen Eigenschaften der Polynome $f_1,\dots,f_m$. Um den Begriff dieser *algebraischen Eigenschaften* zu präzisieren, macht man zunächst die folgende Beobachtung: Für eine Linearkombination $f := g_1 f_1 + \dots, g_n f_n$ mit Koeffizienten $g_j \in k[X_1,\dots,X_n]$ gilt $\mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_n) = \mathcal{V}_k(f_1,\dots,f_n,f)$. Dies bedeutet, dass die Lösungsmenge nur von dem durch die Polynome erzeugten Ideal $(f_1,\dots,f_n) \subseteq k[X_1,\dots,X_n]$ abhängt. Des Weiteren gilt, dass wenn[1]

$$f^k(a_1,\dots,a_n) = f(a_1,\dots,a_n) \cdot \dots \cdot f(a_1,\dots,a_n) = 0,$$

auch folgt, dass $f(a_1,\dots,a_n) = 0$. Dieses bedeutet, dass die betrachtete Lösungsmenge nur von dem Radikalideal $I := \sqrt{(f_1,\dots,f_n)} \subseteq k[X_1,\dots,X_n]$ abhängt. Wir haben also eine per Konstruktion surjektive Zuordnung

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Radikalideale von} \\ k[X_1,\dots,X_n] \end{array} \right\} \xrightarrow{\quad \mathcal{V}_k \quad} \left\{ \begin{array}{c} \text{„Algebraische“} \\ \text{Lösungsmengen in } k^n \end{array} \right\}$$

wobei

$$\mathcal{V}_k(I) = \{\underline{a} \in k^n \mid f(\underline{a}) = 0 \text{ für alle } f \in I\}.$$

Man könnte nun versuchen durch die Untersuchung der Radikalideale I von $k[X_1,\dots,X_n]$ (oder des reduzierten Rings $k[X_1,\dots,X_n]/I$) etwas über die Geometrie der zugehörigen Lösungsmenge herauszufinden.

Umgekehrt kann man einer Teilmenge M des k^n die Menge von Polynomen

$$\mathcal{I}_k(M) = \{f \in k[X_1,\dots,X_n] \mid f(\underline{a}) = 0 \text{ für alle } \underline{a} \in M\}$$

zuordnen. Man sieht wie oben, dass $\mathcal{I}_k(M)$ ein Radikalideal ist und bekommt eine Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Radikalideale von} \\ k[X_1,\dots,X_n] \end{array} \right\} \xleftarrow{\quad \mathcal{I}_k \quad} \left\{ \begin{array}{c} \text{„Algebraische“} \\ \text{Lösungsmengen in } k^n \end{array} \right\}.$$

[1] An dieser Stelle muss man sich überlegen, wieso die Multiplikation im Polynomring $k[X_1,\dots,X_n]$ verträglich ist mit der Multiplikation von Abbildungen $k^n \to k$.

Nun stellt sich natürlich die Frage, ob die Abbildungen $\mathcal{V}_k$ und $\mathcal{I}_k$ invers zueinander sind. Dies ist nicht unbedingt der Fall: Ist $k = \mathbb{R}$ und $f = X^2 + 1$ ein Polynom, so ist das Hauptideal $(f) \subseteq \mathbb{R}[X]$ ein Radikalideal. Es gilt allerdings $\mathcal{V}_k((f)) = \emptyset = \mathcal{V}_k(\mathbb{R})$ und daher ist $\mathcal{V}_k$ für den Fall $k = \mathbb{R}$ nicht injektiv. Ein positives Ergebnis ist das folgende:

Satz 1.1 (Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so sind die Abbildungen $\mathcal{V}_k$ und $\mathcal{I}_k$ zueinander inverse Bijektionen.*

Dieser Satz ist der Grund, wieso sich die Entwicklung der Algebraischen Geometrie lange Zeit hauptsächlich auf algebraisch abgeschlossene Körper konzentriert hat. Die Frage nach der ganzzahligen Lösbarkeit von Gleichungen ist allerdings wesentlich älter. Schon seit der Antike interessiert man sich für solche Lösungen von Polynomgleichungen, den sogenannten *Diophantischen Gleichungen*. Besonders prominent ist für ein $n \geq 3$ die Frage nach der ganzzahligen Lösbarkeit der Fermatschen Gleichung

$$f := X_1^n + X_2^n - X_3^n = 0.$$

Eine wesentliche Idee der modernen Algebraischen Geometrie ist, die Korrespondenz von $\mathcal{V}_k$ und $\mathcal{I}_k$ auf den Fall eines beliebigen Basisrings A statt des (algebraisch abgeschlossenen) Körpers k auszudehnen, die geometrische Anschauung vom Körperfall zu benutzen und sogar eine strikte geometrische Sichtweise für einen beliebigen Basisring zu entwickeln.

Es sind allerdings noch zwei weitere Verallgemeinerungen sinnvoll: Die obige Sichtweise beschränkt sich nur auf die geometrische Analyse von *reduzierten* Ringen und es ist erstrebenswert auch nicht reduzierte Ringe geeignet in die Theorie zu integrieren. Des Weiteren ist es nützlich und natürlich „algebraische Mannigfaltigkeiten" anstatt nur der obigen affinen Situation zu betrachten. Eine Motivation hierfür ist leicht zu bekommen, wenn man beispielsweise die Nützlichkeit von Riemannschen Mannigfaltigkeiten (anstatt nur des affinen Raums $\mathbb{R}^n$) anerkennt. Dies führt zu dem Begriff des *Schemas* mit dem wir uns in dieser Vorlesung beschäftigen werden.

2. Grundlagen und Notation

In dieser Vorlesung werden einige Ergebnisse der Kommutativen Algebra vorausgesetzt. Im Anhang A findet sich eine Übersicht über die benötigten Begriffe und eine Festlegung der Notation.

3. Das Spektrum eines Rings

Es sei A ein Ring und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Ist $\underline{a} := (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ ein Tupel von Elementen, so bezeichnen wir mit

$$I_{\underline{a}} := (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

das zugehörige Ideal im Polynomring $A[X_1, \dots, X_n]$. Sei $A \to K$ eine A-Algebra. Wir betrachten die Bijektion

$$(3.1)\qquad \begin{array}{rcc} \Psi\colon K^n & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[X_1, \dots, X_n], K) \\ \underline{a} & \mapsto & (\ f \mapsto f(\underline{a})\ ) \\ (\psi(X_1), \dots, \psi(X_n)) & \leftarrow\!\shortmid & \psi \end{array}$$

deren Bilder $\psi_{\underline{a}} := \Psi(\underline{a}, -)$ *Einsetzhomomorphismen* genannt werden. Um nachzuprüfen, dass es sich bei Ψ tatsächlich um eine Bijektion handelt, kann man die universelle Eigenschaft des Polynomrings $A[X_1, \dots, X_n]$ zusammen mit $K^n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\{X_1, \dots, X_n\}, K)$ benutzen.

Bemerkung 3.1. Man siehe Aufgabe 3.27 für Eigenschaften des A-Algebrenhomomorphismus $\Psi'\colon A[X_1, \dots, X_n] \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(K^n, K)$, der durch $f \mapsto (\ \underline{a} \mapsto f(\underline{a})\ )$ gegeben ist.

Lemma 3.2. *Sei $\underline{a} := (a_1 \dots, a_n) \in A^n$ ein Element. Es ist der Kern des surjektiven A-Algebrenhomomorphismus*

$$\begin{array}{rccc} \psi_{\underline{a}}\colon & A[X_1, \dots, X_n] & \twoheadrightarrow & A \\ & f & \mapsto & f(a_1 \dots, a_n) \end{array}$$

genau das Ideal $I_{\underline{a}}$. Mit anderen Worten gilt also für ein Polynom $f \in A[X_1, \dots, X_n]$, dass

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0 \iff f \in (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n).$$

Beweis. Es gilt $I_{\underline{a}} \subseteq \mathrm{Ker}(\psi_{\underline{a}})$, da für jedes j gilt $X_j - a_j \in \mathrm{Ker}(\psi_{\underline{a}})$. Man betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & I_{\underline{a}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & A[X_1,\ldots,X_n] \arrow[r, two heads, "\alpha"] \arrow[d, equal] & A[X_1,\ldots,X_n]/I_{\underline{a}} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "t"] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\psi) \arrow[r] & A[X_1,\ldots,X_n] \arrow[r, two heads, "\psi_{\underline{a}}"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit induzierter Ringabbildung t. Es ist natürlich t surjektiv, da $\psi_{\underline{a}}$ surjektiv ist. Wir wollen zeigen, dass t auch injektiv ist. Sei also $\alpha(f) \in \mathrm{Ker}(t)$. Wir wollen zeigen, dass $\alpha(f) = 0$. Da $\alpha(X_j) = \alpha(a_j)$ für alle j und α ein A-Algebrenhomomorphismus ist, gilt folglich auch $\alpha(f) = \alpha(f(a_1,\ldots,a_n))$. Es genügt also zu zeigen, dass $f(a_1,\ldots,a_n) = 0$. Nun ist aber

$$0 = t\alpha(f) = t\alpha(f(a_1,\ldots,a_n)) = \psi_{\underline{a}}(f(a_1,\ldots,a_n)),$$

$f(a_1,\ldots,a_n) \in A$ und $\psi_{\underline{a}}$ eingeschränkt auf A ein Isomorphismus. Also gilt $f(a_1,\ldots,a_n) = 0$. Daher ist t ein Isomorphismus und $\mathrm{Ker}(\psi_{\underline{a}}) = I_{\underline{a}}$. □

Beispiel 3.3. In einem Ring A gilt nach dem vorherigen Lemma 3.2 also insbesondere, dass für jedes $f \in A[X]$ und $a \in A$

$$f(a) = 0 \iff f \in (X-a) \iff X - a \mid f.$$

In diesem Fall gibt es also ein $g \in A[X]$ mit $f = g(X-a)$. Hat f den Grad $n \geq 1$, so hat g den Grad $n-1$. Hat g wieder eine Nullstelle und so weiter, so bekommt man eine Zerlegung $f = (X-a_1)\cdot\cdots\cdot(X-a_n)$. Es kann aber trotzdem f mehr als n-viele Nullstellen haben, denn diese Zerlegung ist nicht unbedingt eindeutig. Es gilt für $A = \mathbb{Z}/8$ zum Beispiel

$$(X-3)(X-5) = X^2 - 1 = (X-1)(X-7).$$

Definition 3.4. Für einen Ring A, bezeichne $\mathrm{mSpec}(A)$ die Menge seiner Maximalideale.

Ist $A = k$ ein Körper, so folgt aus dem vorherigen Lemma 3.2, dass jedes Ideal der Form $I_{\underline{a}}$ ein Maximalideal ist. Es ist also die Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} k^n & \underset{\Psi}{\xrightarrow{\cong}} & \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1,\ldots,X_n],k) & \underset{\mathrm{Ker}}{\hookrightarrow} & \mathrm{mSpec}(k[X_1,\ldots,X_n]) \\ \underline{a} & \mapsto & \psi_{\underline{a}} & \mapsto & I_{\underline{a}} \end{array} \tag{3.2}$$

wohldefiniert und sicherlich injektiv. Umgekehrt ist aber die Abbildung Ker nicht unbedingt surjektiv: Ist $k = \mathbb{R}$, so ist das Ideal (X^2+1) ein Maximalideal, da $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}$ ein Körper ist und nicht von der Form $I_{\underline{a}}$.

Satz 3.5 (Schwacher Nullstellensatz)**.** *Für einen algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1,\ldots,X_n],k) & \xrightarrow{\mathrm{Ker}} & \mathrm{mSpec}(k[X_1,\ldots,X_n]) \\ \psi & \mapsto & \mathrm{Ker}(\psi) \end{array}$$

auch surjektiv und also bijektiv.

Dieser Satz sagt also, dass wir für einen algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ die Punkte $\underline{a}$ von k^n identifizieren können mit den Maximalidealen von $k[X_1,\ldots,X_n]$, denn diese sind genau von der Form $I_{\underline{a}}$. Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.6. *Sei k ein Körper und A eine k-Algebra von endlichem Typ. Ist $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal von A, so ist die Körpererweiterung $k \to A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m}$ endlich.*

Beweis. Wir wenden auf die Komposition $k \to A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{m} =: K$ die Noether-Normalisierung

$$k \hookrightarrow k[X_1,\ldots,X_d] \xhookrightarrow{\text{endlich}} K$$

an. Da K ein Körper ist, folgt aus der Invarianz der Krull-Dimension unter injektiven endlichen Homomorphismen, dass $d = 0$. Also ist $k \hookrightarrow K$ eine endliche Körpererweiterung. □

Beweis des schwachen Nullstellensatzes 3.5. Sei $\mathfrak{m} \in \mathrm{mSpec}(k[X_1, \ldots, X_n])$ ein maximales Ideal. Wir wollen ein ψ aus $\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1, \ldots, X_n], k)$ finden mit $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathfrak{m}$. Mit der algebraischen Abgeschlossenheit von k und dem vorherigen Lemma ist aber

$$\psi\colon k[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{m} = K \xleftarrow{\cong} k$$

ein solches Element. □

Definition 3.7. Für einen Ring A, bezeichne $\mathrm{Spec}(A)$ die Menge seiner Primideale.

Beispiel 3.8.

(1) Der Nullring 0 hat kein Primideale und daher $\mathrm{Spec}(0) = \emptyset$. Da jeder Ring $\neq 0$ ein Primideal hat, ist der Nullring der einzige Ring mit einem leeren Spektrum.
(2) Ist k ein Körper, so ist (0) das einzige Primideal und daher $\mathrm{Spec}(k) = \{(0)\}$.
(3) $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring. Das Ideal (0) ist ein Primideal, da $\mathbb{Z}/(0) \cong \mathbb{Z}$ ein Integritätsbereich ist. Es ist $\mathbb{Z}/(n)$ ein Integritätsbereich genau dann, wenn n eine Primzahl ist, also $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(0), (2), (3), (5), \ldots\}$.
(4) Es ist $\mathbb{C}[X]$ ein Hauptidealring und daher sind die Primideale (0) oder von einem irreduziblen Element f erzeugt. Da jedes nichtkonstante Polynom nach dem Fundamentalsatz eine Nullstelle hat, sind diese f also genau die Linearfaktoren, also

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]) = \{(0)\} \cup \{(X-a)\}_{a \in \mathbb{C}}.$$

(5) Es ist $\mathbb{R}[X]$ ebenefalls ein Hauptidealring und jedes irreduzible Element entweder ein Linearfaktor oder ein (bis auf Multiplikation mit einer Einheit normiertes) quadratisches Polynom ohne Nullstelle, also

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X]) &= \{(0)\} \cup \{(X-a)\}_{a \in \mathbb{R}} \cup \{(X^2 + aX + b)\}_{a^2 - 4b < 0} \\ &= \{(0)\} \cup \{(X-a)\}_{a \in \mathbb{R}} \cup \{((X-a)(X-\bar{a}))\}_{a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Es korrespondieren also die maximalen Ideale von $\mathbb{R}[X]$ entweder zu einer reellen Zahl oder zu einem Paar konjugierter komplexer Zahlen.
(6) Es ist

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y]) = \{(0)\} \cup \{(f)\}_{f \text{ irreduzibel}} \cup \{(X-a, Y-b)\}_{a,b \in \mathbb{C}}.$$

Da $\dim(\mathbb{C}[X,Y]) = 2$ hat jedes Primideal in $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X,Y])$ die Höhe 0, 1 oder 2. Es ist (0) das einzige Primideal der Höhe 0, da $\mathbb{C}[X,Y]$ irreduzibel ist. Ein Primideal der Höhe 2 ist automatisch maximal und der schwache Nullstellensatz beschreibt genau die maximalen Ideale von $\mathbb{C}[X,Y]$. Diese haben offensichtlich die Höhe 2 und damit sind dies genau die Primideale der Höhe 2. Da $\mathbb{C}[X,Y]$ faktoriell ist, sind die irreduziblen Elemente genau die Primelemente und erzeugen ein Primideal. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Höhe 1. Ist $0 \neq f \in \mathfrak{p}$ ein Element, so können wir dieses in irreduzible Elemente zerlegen und da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist liegt eines dieser Elemente f schon in $\mathfrak{p}$. Damit $(f) \subseteq \mathfrak{p}$ und da beide Primideale die Höhe 1 haben folgt Gleichheit. Damit folgt die Beschreibung. Es gilt natürlich $(f) = (g)$ genau dann, wenn sich f und g um eine Einheit unterscheiden und daher ist die Indizierung über die irreduziblen Polynome f nur bis auf Assoziiertheit disjunkt.

Definition 3.9. Ist nun $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A und $f \in A$ ein Element, so sei die *Auswertung* $f(\mathfrak{p})$ *von* f *an* $\mathfrak{p}$ definiert als das Bild von f unter der Ringabbildung

$$\begin{array}{cccc}\psi_{\mathfrak{p}}\colon & A & \twoheadrightarrow A/\mathfrak{p} \hookrightarrow & \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p}) = k(\mathfrak{p}) \\ & f & \mapsto & f(\mathfrak{p})\end{array}$$

in den Restklassenkörper $k(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$.

Beispiel 3.10.

(3) Es ist $\psi_{(p)}\colon \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_p$ durch $f \mapsto f + (p)$ gegeben und $\psi_{(0)}\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.
(4) Es ist $\psi_{(0)}\colon \mathbb{C}[X] \hookrightarrow \mathbb{C}(X)$ und $\psi_{(X-a)}\colon \mathbb{C}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[X]/(X-a) \cong \mathbb{C}$ gegeben durch $f \mapsto (f + (X-a)) \cong f(a)$.

(5) Es ist $\psi_{(0)}\colon \mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{R}(X)$. Für $a \in \mathbb{R}$ ist $\psi_{(X-a)}\colon \mathbb{R}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{R}[X]/(X-a) \cong \mathbb{R}$ gegeben durch $f \mapsto (f + (X-a)) \cong f(a)$. Für $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ bekommt man die Abbildung

$$\psi_{((X-a)(X-\bar{a}))}\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]/((X-a)(X-\bar{a})) \xrightarrow[\alpha]{\cong} \mathbb{C}.$$

die ebenfalls durch $f \mapsto f(a)$ gegeben ist. An dieser Stelle merkt man besonders deutlich, dass die Schreibweise $f(a)$ von dem Isomorphismus α abhängig ist. Anstatt einen Isomorphismus α durch $X \mapsto a$ zu definieren, hätte man auch $X \mapsto \bar{a}$ wählen können.

Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so funktioniert der Beweis des schwachen Nullstellensatzes natürlich etwas allgemeiner für jede k-Algebra A von endlichem Typ, d.h. die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,k) & \xrightarrow{\mathrm{Ker}} & \mathrm{mSpec}(A) \\ \psi & \mapsto & \mathrm{Ker}(\psi) \end{array}$$

ist bijektiv. Die vorherige Definition 3.9 liefert im Spezialfall für maximale Ideale die Umkehrabbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,k) & \leftarrow & \mathrm{mSpec}(A) \\ \psi_{\mathfrak{m}} & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{m} \end{array} \tag{3.3}$$

zu der Abbildung Ker aus dem schwachen Nullstellensatz. Wir wollen nun versuchen, eine hierzu analoge Korrespondenz für beliebige Körper k (und später sogar für beliebige Ringe) zu finden. Sei also k ein Körper und A eine k-Algebra von endlichem Typ. Die Abbildung $\psi_{\mathfrak{m}}\colon A \twoheadrightarrow K$ hat das Ziel in einer endlichen Körpererweiterung K von k. Es ist aus funktoriellen Gründen (siehe unten) nicht günstig, die linke Seite von (3.3) auf nur *surjektive* k-Algebrenhomomorphismen zu beschränken. Eine beliebige k-Algebrenabbildung $\psi\colon A \to K$, wobei $k \hookrightarrow K$ eine endliche Körpererweiterung ist muss aber nicht unbedingt surjektiv sein und es ist daher nicht unmittelbar klar, dass $\mathrm{Ker}(\psi)$ ein maximales Ideal ist.

Lemma 3.11. *Sei $k \hookrightarrow K$ eine endliche Körpererweiterung, A eine k-Algebra und sei $\psi\colon A \to K$ eine k-Algebrenabbildung. Dann ist* $\mathrm{Ker}(\psi)$ *ein Maximalideal.*

Beweis. Wir faktorisieren Ψ als Komposition $A \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(\psi) \hookrightarrow K$ von k-Algebrenabbildungen. Es genügt zu zeigen, dass $\mathrm{Im}(\psi)$ ein Körper ist. Für jede Ringabbildung $f\colon R \to S$ gilt dass $S = 0$ genau dann, wenn $f = 0$. Da $K \neq 0$ ist also $\psi \neq 0$ und damit auch $\mathrm{Im}(\psi) \neq 0$. Sei $0 \neq x \in \mathrm{Im}(\psi)$ ein Element. Wir wollen zeigen, dass x eine Einheit ist. Die Multiplikationsabbildung $\cdot x\colon \mathrm{Im}(\psi) \to \mathrm{Im}(\psi)$ ist injektiv, denn $\mathrm{Im}(\psi)$ ist als Unterring eines Integritätsbereichs K auch ein Integritätsbereich. Nun ist aber $\mathrm{Im}(\psi)$ ein k-Untervektorraum des endlichdimensionalen k-Vektorraums K und damit selbst endlichdimensional. Also ist die injektive und k-lineare Multiplikationsabbildung $\cdot x$ auch surjektiv und es gibt insbesondere ein y mit $xy = 1$. Also ist $\mathrm{Im}(\psi)$ ein Körper. $\square$

Für eine spätere Anwendung notieren wir noch das folgende Korollar.

Korollar 3.12. *Sei k ein Körper und $f\colon A \to B$ ein k-Algebrahomomorphismus, wobei B eine k-Algebra von endlichem Typ ist. Dann sind die Urbilder maximaler Ideale unter f wieder maximale Ideale.*

Beweis. Die Aussage ist klar falls $B = 0$ und wir können also $B \neq 0$ annehmen. Es sei $\mathfrak{m} \subseteq B$ ein Maximalideal und wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & B \arrow[d, two heads, "p"] \\ & B/\mathfrak{m} =: K \end{tikzcd}$$

von k-Algebren. Nach Lemma 3.6 ist $k \hookrightarrow K$ eine endliche Körpererweiterung und nach dem vorherigen Lemma 3.11 ist $\mathrm{Ker}(\psi)$ ein Maximalideal. Es gilt aber $\mathrm{Ker}(\psi) = f^{-1}(\mathfrak{m})$. $\square$

Beispiel 3.13. Das vorherige Korollar ist nicht richtig, falls B nicht von endlichem Typ ist, wie das Beispiel $k[X] \hookrightarrow k(X)$ zeigt. Hier ist $f^{-1}((0)) = (0) \subseteq k[X]$ kein Maximalideal.

Wir bekommen also Dank des Lemmas 3.11 für jede endliche Körpererweiterung $k \hookrightarrow K$ eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,K) & \xrightarrow{\mathrm{Ker}} & \mathrm{mSpec}(A) \\ \psi & \mapsto & \mathrm{Ker}(\psi). \end{array}$$

und im Spezialfall $A = k[X_1, \dots, X_n]$ eine Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} K^n & \underset{\Psi}{\xrightarrow{\cong}} & \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1,\dots,X_n],K) & \xrightarrow{\mathrm{Ker}} & \mathrm{mSpec}(k[X_1,\dots,X_n]) \\ \underline{a} & \mapsto & \psi_{\underline{a}} & \mapsto & \mathrm{Ker}(\psi_{\underline{a}}) \end{array} \tag{3.4}$$

Umgekehrt liefert ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ von A eine k-Algebrenabbildung $\psi_{\mathfrak{m}} : A \twoheadrightarrow K$ in einen Körper K, der nach Lemma 3.6 eine endliche Körpererweiterung von k ist. Diese beiden Zuordnungen sind aber nicht ohne Weiteres zueinander invers: Passen nämlich zwei k-Algebrenabbildungen $\psi : A \to K$ und $\psi' : A \to K'$ für Körper K und K' in ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & K' \\ A \arrow[ur, "\psi'"] \arrow[r, "\psi"'] & K, \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

so ist $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathrm{Ker}(\psi')$, da jede Ringabbildung $K \to K'$ zwischen Körpern injektiv ist.

Definition 3.14. Sei k ein Körper. Für eine k-Algebra A von endlichem Typ definieren wir

$$\underset{\substack{K \in \mathrm{Fld} \\ k \hookrightarrow K \text{ endlich}}}{\mathrm{colim}} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,K) := \left\{ A \xrightarrow{\psi} K \ k\text{-Algebrenhom.} \mid k \hookrightarrow K \text{ endl. Körpererw.} \right\} /_{\sim}$$

wobei $\psi \sim \psi'$, wenn es ein kommutatives Diagramm (3.5) gibt.

Satz 3.15 (Erste Analogie zum schwachen Nullstellensatz)**.** *Für eine k-Algebra A von endlichem Typ gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \underset{\substack{K \in \mathrm{Fld} \\ k \hookrightarrow K \text{ endlich}}}{\mathrm{colim}} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,K) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{mSpec}(A) \\ [\ \psi\ ] & \mapsto & \mathrm{Ker}(\psi) \\ [\ \psi_{\mathfrak{m}}\ ] & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{m}. \end{array}$$

Beweis. Es wurde schon begründet, dass die Abbildung $[\psi] \mapsto \mathrm{Ker}(\psi)$ wohldefiniert ist. Die Abbildung $[\psi_{\mathfrak{m}}] \leftarrow\!\shortmid \mathfrak{m}$ (siehe Definition 3.9) ist ein Rechtsinverses dazu. Es genügt zu zeigen, dass für alle Elemente $[\psi]$ der linken Seite gilt $[\psi] = [\psi_{\mathfrak{m}}]$, wobei $\mathfrak{m} := \mathrm{Ker}(\psi)$. Dies folgt durch Betrachten des Diagramms

$$\begin{tikzcd} & K \\ A \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, two heads] & A/\mathfrak{m}. \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

□

Nun möchten wir versuchen, eine Korrespondenz für beliebige Ringe zu konstruieren. Betrachten wir eine beliebige Ringabbildung $\psi : A \to K$ in einen Körper K, so ist $\mathrm{Ker}(\psi)$ nicht unbedingt ein maximales Ideal. Ein Beispiel hierfür ist die Inklusion $\psi : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Allerdings ist $\mathrm{Ker}(\psi)$ nach dem Argument im ersten Teil des Beweises von Lemma 3.11 immer ein Primideal. Umgekehrt bekommen wir für ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A einen Ringhomomorphismus $\psi_{\mathfrak{p}} : A \to K$ in einen Körper K.

Definition 3.16. Für einen Ring A definieren wir

$$\underset{K \in \mathrm{Fld}}{\mathrm{colim}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,K) := \left\{ A \xrightarrow{\psi} K \text{ Ringhomomorphismus} \mid K \text{ ist ein Körper} \right\} /_{\sim}$$

wobei $\psi \sim \psi'$, wenn es ein kommutatives Diagramm (3.5) gibt.

Satz 3.17 (Zweite Analogie zum schwachen Nullstellensatz)**.** *Für einen Ring A gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname*{colim}_{K\in\mathrm{Fld}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,K) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Spec}(A) \\ [\,\psi\,] & \mapsto & \mathrm{Ker}(\psi) \\ [\,\psi_{\mathfrak{p}}\,] & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{p}. \end{array}$$

Beweis. Dies kann man genau so wie Satz 3.15 beweisen. Am Ende betrachtet man das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & K \\ A \arrow[r, two heads] \arrow[urr, bend left, "\psi"] & A/\mathfrak{p} \arrow[r, hook] \arrow[ur, dashed] & k(\mathfrak{p}). \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

□

Korollar 3.18. *Sei k ein Körper. Für eine k-Algebra A von endlichem Typ ist das Diagramm mit horizontalen Abbildungen aus der ersten und zweiten Analogie zum schwachen Nullstellensatz*

$$\begin{tikzcd} \operatorname*{colim}_{K\in\mathrm{Fld}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,K) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Spec}(A) \\ \operatorname*{colim}_{\substack{K\in\mathrm{Fld} \\ k\hookrightarrow K \text{ endlich}}} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,K) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, hook] & \mathrm{mSpec}(A) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

kommutativ. Ist außerdem $k = \bar{k}$ algebraisch abgeschlossen, so ist

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,k) \;\cong\; \operatorname*{colim}_{\substack{K\in\mathrm{Fld} \\ k\hookrightarrow K \text{ endlich}}} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(A,K).$$

Es sei nun k wieder ein Körper und $k \hookrightarrow K$ eine endliche Körpererweiterung. Wir möchten untersuchen, wie sich die Zuordnung (3.4) zu „algebraischen“ Abbildungen $K^n \to K^m$ verhält. Die folgende Definition einer solchen Abbildung ist naheliegend.

Definition 3.19. Sei $k \hookrightarrow K$ eine Körpererweiterung. Eine Abbildung $F\colon K^n \to K^m$ heisst *algebraisch über k*, wenn es Polynome $f_1, \dots, f_m \in k[X_1, \dots, X_n]$ gibt mit

$$\begin{array}{rccl} F\colon & K^n & \to & K^m \\ & \underline{a} := (a_1, \dots, a_n) & \mapsto & (f_1(\underline{a}), \dots, f_m(\underline{a})). \end{array}$$

In diesem Fall heißt der k-Algebrenhomomorphismus

$$\begin{array}{rccl} f\colon & k[Y_1, \dots, Y_m] & \to & k[X_1, \dots, X_n] \\ & Y_j & \mapsto & f_j \end{array}$$

eine *zu F gehörige Abbildung auf Polynomringen über k*.

Bemerkung 3.20. Es zeigt Aufgabe 3.27, dass es für eine gegebene algebraische Abbildung F über k mehrere zugehörige Abbildung auf Polynomringen über k geben kann.

Lemma 3.21. *Sei $k \hookrightarrow K$ eine endliche Körpererweiterung und $F\colon K^n \to K^m$ eine algebraische Abbildung mit einer zugehörigen Abblidung $f\colon k[Y_1, \dots, Y_m] \longrightarrow k[X_1, \dots, X_n]$ auf Polynomringen über k. Dann ist das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\cong", "\Psi"'] \arrow[d, "F"'] & \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[X_1, \dots, X_n], K) \arrow[r, "\ker"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathrm{mSpec}(k[X_1, \dots, X_n]) \arrow[d, "f^{-1}"] \\ K^m \arrow[r, "\cong", "\Psi"'] & \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[Y_1, \dots, Y_m], K) \arrow[r, "\ker"] & \mathrm{mSpec}(k[Y_1, \dots, Y_m]) \end{tikzcd}$$

kommutativ, wobei $f^*\colon (k[X_1, \dots, X_n] \to K) \mapsto (k[Y_1, \dots, Y_m] \xrightarrow{f} k[X_1, \dots, X_n] \to K)$.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, dass die rechte vertikale Abbildung f^{-1} wegen Korollar 3.12 wohldefiniert ist. Für die Kommutativität des linken Quadrats sei $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in K^n$.

Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} (f^*\Psi(\underline{a}))(Y_j) & = & (f^*\psi_{\underline{a}})(Y_j) \\ & = & \psi_{\underline{a}}(f(Y_j)) \\ & = & \psi_{\underline{a}}(f_j) \\ & = & f_j(\underline{a}) \\ & = & \Psi(F(\underline{a}))(Y_j). \end{array}$$

Die Kommutativität des rechten Quadrats folgt aus der Gleichung $\mathrm{Ker}(\psi f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}(\psi))$. □

Das vorherige Lemma motiviert die folgende Definition, für die es notwendig ist Spec anstatt mSpec zu betrachten.

Definition 3.22. Für eine Ringabbildung $f\colon A \to B$ definieren wir die Mengenabbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(B) & \to & \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{p} & \mapsto & f^{-1}(\mathfrak{p}). \end{array}$$

Beispiel 3.23. Für den Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$ betrachten wir die Abbildung $\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]) \twoheadrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X])$. Diese ist gegeben durch $\mathrm{Spec}(f)(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{R}[X]$ und es gilt

$$\begin{array}{rclc} \mathrm{Spec}(f)((0)) & = & (0) & \\ \mathrm{Spec}(f)((X-a)) & = & (X-a) & \text{falls } a \in \mathbb{R} \\ \mathrm{Spec}(f)((X-a)) & = & ((X-a)(X-\bar{a})) & \text{falls } a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \end{array}$$

Dieses sieht man wie folgt. Setze $\mathfrak{p} := (X-a) \subseteq \mathbb{C}[X]$ und betrachte die $\mathbb{R}$-Algebrenabbildung $pf\colon \mathbb{R}[X] \hookrightarrow \mathbb{C}[X] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[X]/(X-a) \cong \mathbb{C}$ mit $X \mapsto a$. Deren Kern ist gegeben durch $\mathrm{Ker}(pf) = f^{-1}(\mathrm{Ker}(p)) = f^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cap \mathbb{R}[X]$ und erzeugt von dem Minimalpolynom von a. Dieses ist $(X-a)$, falls $a \in \mathbb{R}$ und $(X-a)(X-\bar{a})$ sonst.

Lemma 3.24. *Die Zuordnung aus Satz 3.17 ist auf die kanonische Weise verträglich mit Ringabbildungen. Genauer gibt es also für eine Ringabbildung $f\colon A \to B$ ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{colim}_{K \in \mathrm{Fld}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(B,K) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "{[B\to K]\mapsto[A\xrightarrow{f}B\to K]}"'] & \mathrm{Spec}(B) \arrow[d, "\mathrm{Spec}(f)"] \\ \mathrm{colim}_{K \in \mathrm{Fld}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A,K) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Spec}(A). \end{tikzcd}$$

Beweis. Der Beweis ist gleich zum zweiten Teil des Beweises von Lemma 3.21. □

Definition 3.25. Für einen Ring R und $n \geq 1$ setzt man $\mathbb{A}^n_R := \mathrm{Spec}(R[X_1, \dots, X_n])$. Ist $R = \mathbb{Z}$ oder keine Verwechselung möglich, so wird das R im Index manchmal weggelassen.

Beispiel 3.26. Es wird manchmal für einen beliebigen Ring R eine „algebraische" Abbildung $F\colon \mathbb{A}^n_R \to \mathbb{A}^m_R$ definiert durch Angabe von m-vielen Polynomen $f_1, \dots, f_m \in R[X_1, \dots, X_n]$, beispielsweise

$$\begin{array}{rccl} F\colon & \mathbb{A}^1 & \to & \mathbb{A}^2 \\ & a & \mapsto & (a, a^2+1). \end{array}$$

Hiermit ist, inspiriert durch Lemma 3.21, die durch

$$\begin{array}{rccl} f\colon & R[X,Y] & \to & R[Z] \\ & X & \mapsto & Z \\ & Y & \mapsto & Z^2+1 \end{array}$$

induzierte Abbildung $\mathrm{Spec}(f)\colon \mathbb{A}^1_R \to \mathbb{A}^2_R$ gemeint.

Aufgabe 3.27. Sei A ein Ring. Wir betrachten den A-Algebrenhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \Psi'\colon A[X_1, \dots, X_n] & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A^n, A) \\ f & \mapsto & (\ \underline{a} \mapsto f(\underline{a})\ )\,, \end{array}$$

wobei die A-Algebrenstruktur auf der Menge $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A^n, A)$ „punktweise" durch die auf A gegeben ist. Man zeige, dass Ψ' nicht unbedingt injektiv sein muss. Man zeige, dass Ψ' injektiv ist, falls A ein unendlicher Integritätsbereich ist.

Aufgabe 3.28. Sei k ein Körper. Man betrachte die k-Unteralgebra

$$A := \{f \in k[X] \mid f(0) = f(1)\}$$

von $k[X]$ und finde eine Darstellung $A \cong k[Y, Z]/I$ für ein Ideal I. (Es ist also insbesondere A eine k-Algebra von endlichem Typ.)

4. Die Zariski Topologie auf dem Spektrum eines Rings

Im vorherigen Kapitel haben wir für einen Ring A die Menge $\operatorname{Spec}(A)$ definiert. Dies soll (anstatt zum Beispiel k^n) die Menge der „Punkte“ sein auf denen wir eine zu dem Ring A assoziierte „Geometrie“ studieren möchten. In diesem Kapitel definieren wir eine Topologie auf der Menge $\operatorname{Spec}(A)$ und untersuchen einige ihrer Eigenschaften.

Bemerkung 4.1. Es sei daran erinnert, dass eine *Topologie* auf einer Menge X eine Teilmenge $\mathfrak{T} \subseteq \operatorname{Pot}(X)$ der Potenzmenge von X ist mit den Eigenschaften

(1) $\emptyset \in \mathfrak{T}$ und $X \in \mathfrak{T}$,
(2) endliche Durchschnitte von Elementen aus $\mathfrak{T}$ sind wieder in $\mathfrak{T}$,
(3) beliebige Vereinigungen von Elementen aus $\mathfrak{T}$ sind wieder in $\mathfrak{T}$.

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen die *offenen Mengen* der Topologie. Eine *Basis* einer Topologie $\mathfrak{T}$ ist eine Teilmenge $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$, sodass jede offene Menge $O \in \mathfrak{T}$ eine (beliebige) Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen zwei Mengen mit jeweils einer Topologie ist *stetig*, falls Urbilder offener Mengen wieder offen sind und *offen* (bzw. *abgeschlossen*), wenn Bilder offener Mengen wieder offen (bzw. abgeschlossen) sind. Es heisst $f\colon X \to Y$ *dominant*, wenn der Abschluss des Bildes in Y das ganze Y ist, also $\overline{f(X)} = Y$.

Definition 4.2. Seien A ein Ring und $I \subseteq A$ eine Teilenge. Dann heisst die Teilmenge

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(I) &:= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \forall f \in I : f(\mathfrak{p}) = 0\} \end{aligned}$$

von $\operatorname{Spec}(A)$ die *Verschwindungsmenge* von I. Es gilt sicherlich $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}((I))$. Für $f \in A$ schreibt man $\mathcal{V}(f) := \mathcal{V}((f))$ und setzt

$$\begin{aligned} D(f) &:= \operatorname{Spec}(A) \setminus \mathcal{V}(f) \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid f(\mathfrak{p}) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Lemma 4.3. *Seien A ein Ring, I und J Ideale von A und $\{I_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Idealen von A. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(0) = \operatorname{Spec}(A) \quad &\textit{und} \quad \mathcal{V}(A) = \emptyset \\ I \subseteq J \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(I) \\ \mathcal{V}(\sqrt{I}) \quad &= \quad \mathcal{V}(I) \\ \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) \quad &= \quad \mathcal{V}(I \cap J) \quad = \quad \mathcal{V}(IJ) \\ \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{V}(I_i) \quad &= \quad \mathcal{V}(\textstyle\sum_{i \in \mathcal{I}} I_i) \\ \bigcap_{f \in I} \mathcal{V}(f) \quad &= \quad \mathcal{V}(I). \end{aligned}$$

Beweis. Die ersten beiden Behauptungen sind direkt klar.

Für die zweite Behauptung sei $\mathfrak{p} \in V(\sqrt{I})$, also $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p}$. Da $I \subseteq \sqrt{I}$ folgt $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I)$. Umgekehrt sei $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I)$ und $f \in \sqrt{I}$. Dann $f^n \in I \subseteq \mathfrak{p}$, also $f \in \mathfrak{p}$ und damit $\sqrt{I} \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(\sqrt{I})$ und damit $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(\sqrt{I})$.

Für die erste Gleichheit der dritten Behauptung sei zunächst $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$, also $I \subseteq \mathfrak{p}$ oder $J \subseteq \mathfrak{p}$. In beiden Fällen gilt aber $I \cap J \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I \cap J)$. Für die andere Richtung sei $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I \cap J)$. Also $IJ \subseteq I \cap J \subseteq \mathfrak{p}$. Da aber $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, folgt $I \subseteq \mathfrak{p}$ oder $J \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J)$. Die zweite Gleichheit gilt, da $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{IJ}$.

Für die vorletzte Behauptung sei zunächst $\mathfrak{p} \in \cap_i \mathcal{V}(I_i)$, also $I_i \subseteq \mathfrak{p}$ für alle i. Da $\mathfrak{p}$ ein Ideal ist, ist aber auch das von $\cup_i I_i$ erzeugte Ideal $\sum_i I_i$ in $\mathfrak{p}$, also $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(\sum_i I_i)$. Für die andere Richtung sei $\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(\sum_i I_i)$, also $I_i \subseteq \sum_i I_i \subseteq \mathfrak{p}$, also $I_i \subseteq \mathfrak{p}$ für alle i, also $\mathfrak{p} \in \cap_i \mathcal{V}(I_i)$.

Die letzte Behauptung ist ein Spezialfall der vorletzten, da $I = \sum_{f \in I}(f)$. $\square$

Korollar 4.4. *Seien A ein Ring, $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, f und g Elemente und I ein Ideal von A. Dann gilt*

$$\begin{array}{rcl} D(0) = \emptyset & \textit{und} & D(1) = \operatorname{Spec}(A) \\ D(f) \cap D(g) & = & D(fg) \\ D(f) & = & D(f^n) \\ \bigcup_{f \in I} D(f) & = & \operatorname{Spec}(A) \setminus \mathcal{V}(I). \end{array}$$

Insbesondere bilden die Mengen $D(f)$ für $f \in A$ die Basis einer Topologie auf $\operatorname{Spec}(A)$. *Die abgeschlossenen Mengen dieser Topologie sind genau die Mengen $\mathcal{V}(I)$ für ein Ideal $I \subseteq A$.*

Beweis. Die erste Behauptung ist klar.

Für die zweite Behauptung beobachtet man, dass

$$(fg)(\mathfrak{p}) = \psi_{\mathfrak{p}}(fg) = \psi_{\mathfrak{p}}(f)\psi_{\mathfrak{p}}(g) = f(\mathfrak{p})g(\mathfrak{p})$$

im Körper $k(p)$ und daher $fg(\mathfrak{p}) \neq 0$ genau dann, wenn $f(\mathfrak{p}) \neq 0$ und $g(\mathfrak{p}) \neq 0$.

Die dritte Behauptung ist ein Spezialfall der zweiten.

Für die letzte Behauptung benutzt man die letzte Behauptung von Lemma 4.3. □

Definition 4.5. Die Topologie auf $\operatorname{Spec}(A)$ aus Korollar 4.4 heisst *Zariski Topologie.*

Lemma 4.6. *Für eine einelementige Teilmenge $\{\mathfrak{q}\} \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ gilt*

$$\overline{\{\mathfrak{q}\}} = \mathcal{V}(\mathfrak{q}).$$

Insbesondere ist $\{\mathfrak{q}\} \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $\mathfrak{q} \subseteq A$ ein Maximalideal ist. (In diesem Fall sagen wir, dass $\mathfrak{p}$ ein abgeschlossener Punkt *von* $\operatorname{Spec}(A)$ *ist. Insbesondere hat jeder Ring $A \neq 0$ (mindestens) einen abgeschlossenen Punkt.)*

Beweis. Es ist $\mathcal{V}(\mathfrak{q})$ eine abgeschlossene Menge, die $\mathfrak{q}$ enthält, also $\overline{\{\mathfrak{q}\}} \subseteq \mathcal{V}(\mathfrak{q})$. Umgekehrt sei $\overline{\{\mathfrak{q}\}} = \mathcal{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$. Da $\mathfrak{q}$ eine Element dieser Menge ist, gilt $I \subseteq \mathfrak{q}$ und damit $\mathcal{V}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathcal{V}(I)$, also $\mathcal{V}(\mathfrak{q}) \subseteq \overline{\{\mathfrak{q}\}}$. Die zweite Behauptung ist klar. □

Bemerkung 4.7. Eine (lokal kleine) *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus einer Klasse von Objekten, Mengen $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ von *Morphismen* zwischen zwei Objekten X und Y und Kompositionsabbildungen

$$\circ\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z),$$

die assoziativ sind und für die es Identitäten $\mathrm{id}_X \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ gibt. Zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ gibt es die *Opposite Kategorie* $\mathcal{C}^{op}$ mit den gleichen Objekten und Morphismen $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$. Für die genaue Definition einer Kategorie verweisen wir auf [2]. ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen zwei Kategorien ist eine Abbildung der Objekte von $\mathcal{C}$ in die Objekte von $\mathcal{D}$ und Abbildungen

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)),$$

die mit der Komposition und den Identitäten verträglich sind, also mit $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ und $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$. Für die genaue Definition einer Kategorie verweisen wir wieder auf [2].

Lemma 4.8. *Ist $f\colon A \to B$ eine Ringabbildung, so ist* $\operatorname{Spec}(f)\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ *stetig bezüglich der Zariski Topologie. Es ist die Zuordnung*

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{Spec}\colon & \mathbf{Ring}^{op} & \to & \mathbf{Top} \\ & A & \mapsto & \operatorname{Spec}(A) \\ & f & \mapsto & \operatorname{Spec}(f) \end{array}$$

von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der topologischen Räume ein Funktor.

Beweis. Wir zeigen nur, dass $\operatorname{Spec}(f)$ eine stetige Abbildung ist, also Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Sei $\mathcal{V}(I) \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ abgeschlossen, dann gilt

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Spec}(f)^{-1}(\mathcal{V}(I)) & = & \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid \operatorname{Spec}(f)(\mathfrak{q}) \in \mathcal{V}(I)\} \\ & = & \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid I \subseteq f^{-1}(\mathfrak{q})\} \\ & = & \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B) \mid f(I) \subseteq \mathfrak{q}\} \\ & = & \mathcal{V}(f(I)). \end{array}$$

Die vorletzte Gleichheit benötigt vielleicht eine Erklärung: Ist $I \subseteq f^{-1}(\mathfrak{q})$, so folgt $f(I) \subseteq ff^{-1}(\mathfrak{q})$ und es gilt immer $ff^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{q}$ (mit Gleichheit für surjektives f). Ist umgekehrt $f(I) \subseteq \mathfrak{q}$, so folgt $f^{-1}f(I) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{q})$ und es gilt immer $I \subseteq f^{-1}f(I)$ (mit Gleichheit für injektives f). □

Lemma 4.9. *Sei A ein Ring.*

(1) Ist $f\colon A \twoheadrightarrow A/I$ mit $a \mapsto a + I$ surjektiv, so ist die Abbildung $\mathrm{Spec}(f)$ *injektiv, es gibt eine Faktorisierung*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(A/I) \arrow[r, hook, "\mathrm{Spec}(f)"] \arrow[dr, dashed, "\cong", "t"'] & \mathrm{Spec}(A) \\ & \mathcal{V}(I) \arrow[u, hook, "\textit{mit Unterraumtopologie}"'] \end{tikzcd}$$

und t ist ein Homöomorphismus.

(2) Ist $l_S\colon A \to S^{-1}A$ eine Lokalisierung von A an einer multiplikativen Teilmenge S, so ist die Abbildung $\mathrm{Spec}(l_S)$ *injektiv, es gibt eine Faktorisierung*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(S^{-1}A) \arrow[r, hook, "\mathrm{Spec}(l_S)"] \arrow[dr, dashed, "\cong", "t"'] & \mathrm{Spec}(A) \\ & \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\} \arrow[u, hook, "\textit{mit Unterraumtopologie}"'] \end{tikzcd}$$

und t ist ein Homöomorphismus. Im Spezialfall der Lokalisierung $A_\mathfrak{q}$ an einem Primideal $\mathfrak{q} \subseteq A$ ist dieser Unterraum genau $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$ und im Fall der Lokalisierung $A[\frac{1}{f}]$ weg von einem Element $f \in A$ ist dieser Unterraum genau $D(f)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst (1). Nach der Idealkorrespondenz für Quotienten A.4, bildet $\mathrm{Spec}(f)$ bijektiv auf den Unterraum $\mathcal{V}(I)$ ab.

Um zu zeigen, dass t stetig ist, benutzen wir eine generelle Aussage: Ist $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, die über eine Teilmenge $Y' \subseteq Y$ faktorisiert mit $t\colon X \to Y'$, so ist t eine stetige Abbildung, wobei Y' die Unterraumtopologie trägt. Da nämlich $f(X) \subseteq Y'$ folgt für alle $Z \subseteq Y$, dass $f^{-1}(Z) = f^{-1}(Z \cap Y')$. Ist nun $Z' \subseteq Y'$ eine abgeschlossene Menge, gibt es $Z \subseteq Y$ abgeschlossen mit $Z' = Z \cap Y'$. Dann gilt $t^{-1}(Z') = f^{-1}(Z') = f^{-1}(Z \cap Y') = f^{-1}(Z)$, welches abgeschlossen ist, da f stetig ist. Also ist t stetig.

Nun zeigen wir noch, dass t abgeschlossen ist. Sei dazu $\mathcal{V}(J) \subseteq \mathrm{Spec}(A/I)$ abgeschlossen. Dann gilt $I \subseteq f^{-1}(J)$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(f)(\mathcal{V}(J)) &= \{\mathrm{Spec}(f)(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \in \mathcal{V}(J)\} \\ &= \{f^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A) \mid J \subseteq \mathfrak{q}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p} \text{ und } J \subseteq f(\mathfrak{p})\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid f^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \mathcal{V}(f^{-1}(J)). \end{aligned}$$

Also ist t ein Homöomorphismus

Nun zeigen wir (2). Nach der Idealkorrespondenz für Lokalisierungen A.12 bildet $\mathrm{Spec}(l_S)$ bijektiv auf den Unterraum $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$ ab und in den erwähnten beiden Spezialfällen wird dieser entsprechend anders beschrieben. Es ist t nach dem obigen Argument stetig und es genügt die Abgeschlossenheit zu zeigen. Sei also $\mathcal{V}(J) \subseteq \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ abgeschlossen. Wir setzen abkürzend $Y' := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(l_S)(\mathcal{V}(J)) &= \{\mathrm{Spec}(l_S)(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{q} \in \mathcal{V}(J)\} \\ &= \{l_S^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}(A) \mid J \subseteq \mathfrak{q}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \text{ und } J \subseteq S^{-1}\mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \text{ und } l_S^{-1}(J) \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \mathrm{Spec}(l_S)(\mathrm{Spec}(S^{-1}A)) \cap \mathcal{V}(l_S^{-1}(J)). \end{aligned}$$

□

Beispiel 4.10.

- Der surjektive Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p$ induziert eine abgeschlossene Einbettung $\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

- Der injektive Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ induziert eine offene Einbettung $\operatorname{Spec}(f)\colon \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.
- Der injektive Ringhomomorphismus $f\colon \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}$ induziert allerdings eine Einbettung $\operatorname{Spec}(f)\colon \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$, die weder offen noch abgeschlossen ist, denn der Unterraum
$$Y' = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) \mid \mathfrak{p} \cap (\mathbb{Z} \setminus (p)) = \emptyset\} = \{(0), (p)\}$$
ist weder offen noch abgeschlossen. Dieses sieht man wie folgt. Wäre er abgeschlossen, so wäre auch $\mathcal{V}((0)) = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ darin enthalten. Wäre er offen, so enthielte er eine basisoffene Menge $0 \neq D(f) = \{(q) \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) \mid f \notin (q)\} = \{(q) \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) \mid q \nmid f)\}$ aber diese Mengen enthalten unendlich viele Elemente, da $f \neq 0$.

Satz 4.11. *Ist A ein Ring, so ist der topologische Raum* $\operatorname{Spec}(A)$ *quasikompakt, es hat also jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung.*

Beweis. Eine offene Überdeckung von $\operatorname{Spec}(A)$ lässt sich verfeinern zu einer Überdeckung durch Mengen der Form $D(f)$, da diese eine Basis der Topologie bilden. Es genügt, eine endliche Teilüberdeckung dieser verfeinerten Überdeckung $\{D(f)\}_{f\in\mathcal{I}}$ zu finden. Sei nun $I \subseteq A$ das von den Elementen $f \in \mathcal{I}$ erzeugt Ideal. Aus $\cup_{f\in\mathcal{I}} D(f) = \operatorname{Spec}(A)$ folgt nach Lemma 4.3, dass $V(I) = \cap_{f\in\mathcal{I}} V(f) = \emptyset$. Weil also kein Primideal zwischen I und A liegt, gilt $I = A$ nach Zorns Lemma. Also ist insbesondere $1 \in I$ und es gibt eine Darstellung
$$1 = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$$
für endlich viele $f_j \in \mathcal{I}$ und $a_j \in A$. Also gilt $A = (f_1, \ldots, f_n)$ und daher $\cup_{i=1}^n D(f_i) = \operatorname{Spec}(A)$, wir haben also eine endliche Teilüberdeckung gefunden. □

Satz 4.12. *Sei A ein Ring und I ein Ideal von A. Dann gilt*
$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathcal{V}(I)} \mathfrak{p}.$$

Beweis. Ist $f\colon A \twoheadrightarrow A/I$ mit $a \mapsto a + I$ die Quotientenprojektion, so folgt
$$\begin{aligned}
\sqrt{I} &= f^{-1}(\operatorname{Nil}(A/I)) \\
&= f^{-1}\Big(\bigcap\nolimits_{\substack{\mathfrak{q}\subseteq A/I \\ \text{Primideal}}} \mathfrak{q}.\Big) && \text{(Satz über das Nilradikal A.14)} \\
&= \bigcap\nolimits_{\substack{\mathfrak{q}\subseteq A/I \\ \text{Primideal}}} f^{-1}(\mathfrak{q}) \\
&= \bigcap\nolimits_{f^{-1}(\mathfrak{q})\in\mathcal{V}(I)} f^{-1}(\mathfrak{q}) && \text{(Idealkorrespondenz für Quotienten A.4)} \\
&= \bigcap\nolimits_{\mathfrak{p}\in\mathcal{V}(I)} \mathfrak{p} && \text{(Idealkorrespondenz für Quotienten A.4).}
\end{aligned}$$
□

Korollar 4.13. *Es gilt $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(J)$ genau dann, wenn $J \subseteq \sqrt{I}$.*

Definition 4.14. Sei X ein nichtleerer topologischer Raum und seien Teilmengen von X mit der Unterraumtopologie aufgefasst.

(1) Es heisst X *zusammenhängend*, wenn er nur trivial als disjunkte Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen geschrieben werden kann, d.h. wenn gilt
$$X = X_1 \sqcup X_2 \implies X_1 = X \text{ oder } X_2 = X.$$
(2) Eine Teilmenge $X_\alpha \subseteq X$ heisst *Zusammenhangskomponente von X*, falls X_α zusammenhängend ist und maximal mit dieser Eigenschaft, d.h. wenn für eine zusammenhängende Teilmenge $X_\beta \subseteq X$ mit $X_\alpha \subseteq X_\beta$ folgt dass $X_\alpha = X_\beta$.

(3) Es heisst X *irreduzibel*, wenn er nur trivial als Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen geschrieben werden kann, d.h. wenn gilt
$$X = X_1 \cup X_2 \implies X_1 = X \text{ oder } X_2 = X.$$
(4) Eine Teilmenge $X_\alpha \subseteq X$ heisst *Irreduzibilitätskomponente von X*, falls X_α irreduzibel ist und maximal mit dieser Eigenschaft, d.h. wenn für eine irreduzible Teilmenge $X_\beta \subseteq X$ mit $X_\alpha \subseteq X_\beta$ folgt dass $X_\alpha = X_\beta$.

(5) Eine Teilmenge $M \subseteq$ heisst *dicht*, falls ihr Abschluss der gesamte Raum ist, d.h. wenn $\overline{M} = X$.

(6) Ein Punkt $\eta \in X$ heisst *generischer Punkt von X*, falls $\overline{\{\eta\}} = X$.

Es ist natürlich jeder irreduzible Raum X auch zusammenhängend.

Beispiel 4.15. Der abgeschlossene Unterraum $\mathrm{Spec}(k[X,Y]/(XY)) \cong \mathcal{V}(XY) = \mathcal{V}(X) \cup \mathcal{V}(Y) \subseteq \mathrm{Spec}(k[X,Y]) = \mathbb{A}_k^2$ ist nicht irreduzibel, da $\mathcal{V}(X) \neq \mathcal{V}(YX) \neq \mathcal{V}(Y)$. Wir werden später sehen (Korollar 5.9), dass dieser Raum aber zusammenhängend ist.

Bemerkung 4.16. In der klassischen Topologie des $\mathbb{R}^n$ ist der Begriff des irreduziblen topologischen Raums nicht von Bedeutung, da ein Hausdorff Raum genau dann irreduzibel ist, wenn er leer ist oder wenn er aus genau einem Punkt besteht. Ebenso ist der Begriff des generischen Punkts hier uninteressant, da einelementige Mengen in einem Hausdorff Raum abgeschlossen sind.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Untersuchung von Irreduzibilität, da die entsprechenden Aussagen über Zusammenhang Gegenstand der klassischen mengentheoretischen Topologie sind und als bekannt vorausgesetzt werden können.

Lemma 4.17. *Sei X ein topologischer Raum und seien Teilmengen von X mit der Unterraumtopologie aufgefasst. Dann gilt:*

(1) Einelementige Teilmengen $\{x\} \subseteq X$ sind irreduzibel.
(2) Der Abschluss $\overline{Y}$ einer irreduziblen Teilmenge $Y \subseteq X$ ist ebenfalls irreduzibel.
(3) Eine Irreduzibilitätskomponente X_α von X ist abgeschlossen.
(4) Jede irreduzible Teilmenge $Y \subseteq X$ ist enthalten in einer Irreduzibilitätskomponente X_α von X.
(5) Es ist X die Vereinigung seiner Irreduzibilitätskomponenten.
(6) Es ist X irreduzibel genau dann, wenn der Durschnitt aller zwei nichtleeren offenen Teilmengen nichtleer ist.
(7) Ist X irreduzibel, so ist jede nichtleere offene Teilmenge dicht in X und ebenfalls irreduzibel.
(8) Ist X eine endliche Vereinigung von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen X_α unter denen keine Inklusionsbeziehungen gelten, so sind diese genau die Irreduzibilitätskomponenten von X.

Beweis. (1) ist klar.

Für (2) sei $\overline{Y} = Y_1' \cup Y_2'$ für abgeschlossene $Y_1', Y_2' \subseteq \overline{Y}$. Es gibt also $Y_1, Y_2 \subseteq X$ abgeschlossen mit $Y_1' = Y_1 \cap \overline{Y}$ und $Y_2' = Y_2 \cap \overline{Y}$. Dann $Y = \overline{Y} \cap Y = (Y_1' \cup Y_2') \cap Y = (Y_1' \cap Y) \cup (Y_2' \cap Y) = (Y_1 \cap Y) \cup (Y_2 \cap Y)$. Da Y irreduzibel ist gilt also oBdA $Y = Y_1 \cap Y$. Dann aber $\overline{Y} = \overline{Y_1 \cap Y} \subseteq \overline{Y_1} \cap \overline{Y} = Y_1 \cap \overline{Y} = Y_1'$. Also ist $\overline{Y}$ irreduzibel.

Es folgt (3) direkt aus (2) und der Definition.

Für (4) sei $Y \subseteq X$ eine irreduzible Teilmenge. Betrachte die folglich nichtleere Menge $M := \{Z \subseteq X \mid Z \text{ irreduzibel und } Y \subseteq Z \subseteq X\}$ die bezüglich der Mengeninklusion partial geordnet ist. Mit Zorns Lemma folgt die Behauptung, wenn wir zeigen, dass jede Kette $T \subseteq M$ eine obere Schranke in M hat. Sei also T eine Kette. Es genügt zu zeigen, dass $Z' := \cup_{Z \in T} Z$ irreduzibel ist. Sei also $Z' = Z_1' \cup Z_2'$ für abgeschlossene $Z_1', Z_2' \subseteq Z'$. Es gibt also wieder $Z_1, Z_2 \subseteq X$ abgeschlossen mit $Z_1' = Z_1 \cap Z'$ und $Z_2' = Z_2 \cap Z'$. Für ein $Z \in T$ gilt also $Z = Z' \cap Z = (Z_1' \cup Z_2') \cap Z = (Z_1 \cap Z) \cup (Z_2 \cap Z)$. Da ein jedes solches Z irreduzibel ist, ist es entweder in Z_1' oder in Z_2' enthalten. Sind alle in einem der beiden enthalten, so auch Z' und wir sind fertig. Ist aber sonst obda $Z \not\subseteq Z_1'$ so sind auch alle grösseren nicht in Z_1' und daher in Z_2'. Da $Z \subseteq Z_2'$ sind auch alle kleineren in Z_2' enthalten und daher das ganze Z'.

Es folgt (5) aus (1) und (4).

Für (6) sei zunächst X irreduzibel und U_1, U_2 nichtleere offene Teilmengen mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dann $X = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$, also obda $X = X \setminus U_1$ und daher $U_1 = \emptyset$, ein Widerspruch. Für die andere Richtung sei $X = X_1 \cup X_2$ für abgeschlossene Mengen X_1 und X_2. Für die offenen Mengen $U_1 := X \setminus X_1$ und $U_2 := X \setminus X_2$ gilt also $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, also $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$. Daher ist X irreduzibel.

Für (7) sei U eine nichtleere offene Teilmenge von X. Es ist zu zeigen dass $\overline{U} = X$. Da aber $X = (X \setminus U) \cup \overline{U}$ und X irreduzibel ist, folgt $X \subseteq \overline{U}$. Es ist U irreduzibel, denn wenn es nicht irreduzibel wäre, gäbe es nach (6) zwei nichtleere offene Teilmengen darin mit nichtleerem Schnitt. Diese wären dann aber auch offen in X und somit X nach (6) ncht irreduzibel. Dies ist ein Widerspruch und also U irreduzibel.

Für (8) sei X'_α eine Irreduzibilitätskomponente von $X = \cup X_\alpha$. Dann $X'_\alpha = X \cap X'_\alpha = (\cup X_\alpha) \cap X'_\alpha = \cup(X_\alpha \cap X'_\alpha)$. Durch Induktion nach der Anzahl der X_α bekommt man, dass eines dieser gleich X'_α ist. □

Korollar 4.18. *Das Bild eines irreduziblen topologischen Raums unter einer stetigen Abbildung ist ein irreduzibler topologischer Raum.*

Beweis. Sei $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ eine surjektive stetige Abbildung. Wir benutzen Lemma 4.17.(6). Seien dafür V_1 und V_2 zwei nichtleere offene Teilmengen von Y. Dann sind $f^{-1}(V_1)$ und $f^{-1}(V_2)$ jeweils nichtleer und offen. Daher gilt $\emptyset \neq f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2)$ und daher $\emptyset \neq ff^{-1}(V_1 \cap V_2) = V_1 \cap V_2$. Die Behauptung folgt mit Lemma 4.17.(6). □

Lemma 4.19. *Sei X ein topologischer Raum, dann gilt:*

(1) Hat X (mindestens) einen generischen Punkt, so ist X irreduzibel.
(2) Ein Punkt $\eta \in X$ ist generisch genau dann wenn er in jeder nichtleeren offenen Menge liegt.

Beweis. Wir zeigen zunächst (1). Aus Punkt (1) und (2) von Lemma 4.17 folgt, dass für jeden Punkt $x \in X$ die Menge $\overline{\{x\}} \subseteq X$ irreduzibel ist. Hat X einen generischen Punkt η, so ist also $\overline{\{\eta\}} = X$ irreduzibel.

Für (2) sei η ein generischer Punkt und nicht enthalten in einer nichtleeren offene Menge U, so ist $X \setminus U$ eine abgeschlossene Teilmenge, die η enthält und daher $X = \overline{\{\eta\}} \subseteq X \setminus U$, ein Widerspruch. Ist umgekehrt η in jeder nichtleeren offenen Menge enthalten und $\overline{\{\eta\}} \neq X$, so ist $U := X \setminus \overline{\{\eta\}}$ nichtleer und offen, enthält aber nicht η, ein Widerspruch. □

Das folgende Lemma zeigt, dass im Fall eines lokalen Rings $(A, \mathfrak{m})$ der (einzige) abgeschlossene Punkt $m \in \operatorname{Spec}(A)$ eine Art duale Rolle zu einem generischen Punkt spielt.

Lemma 4.20. *Ist $(A, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, so liegt der Punkt $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec}(A)$ in jeder nichtleeren abgeschlossenen Menge. Insbesondere ist das Spektrum eines lokalen Rings zusammenhängend.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Idealkorrespondenz für Quotienten A.4. □

Um diese Begriffe mit der Zariski Topologie auf dem Spektrum eines Rings in Beziehung zu bringen ist es bequem, an dieser Stelle die sogenannte „Ideale-Varientäten Korrespondenz“ (in ihrer allgemeinen Form) zu betrachten.

5. Die Ideale-Teilmenegen Korrespondenz

Definition 5.1. Seien A ein Ring und $M \subseteq \operatorname{Spec}(A)$ eine Teilenge. Dann ist die Teilmenge

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(M) &:= \textstyle\bigcap_{\mathfrak{p} \in M} \mathfrak{p} \\ &= \{f \in A \mid \forall \mathfrak{p} \in M : f(\mathfrak{p}) = 0\} \end{aligned}$$

von A ein Ideal und heisst das *Verschwindungsideal* von M.

Satz 5.2 (Ideale-Teilmengen Korrespondenz)**.** *Sei A ein Ring. Dann gibt es eine inklusionsumkehrende Bijektion*

$$\left\{ \textit{Radikalideale von } A \right\} \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{matrix} \textit{Abgeschlossene Teilmengen} \\ \textit{von } \operatorname{Spec}(A) \end{matrix} \right\}$$

mit

(1) $\mathcal{I}\mathcal{V}(I) = \sqrt{(I)}$ für eine Teilmenge $I \subseteq A$,
(2) $\mathcal{V}\mathcal{I}(M) = \overline{M}$ für eine Teilmenge $M \subseteq \operatorname{Spec}(A)$

Beweis. Es ist durch die Definition der abgeschlossenen Teilmengen von $\operatorname{Spec}(A)$ klar, dass $\mathcal{V}$ das angegebene Bild hat. Um zu zeigen, dass $\mathcal{I}(M)$ ein Radikalideal ist, sei $f^n \in \mathcal{I}(M)$. Dann gilt für alle $\mathfrak{p} \in M$, dass $0 = f^n(\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{p})^n$ im Körper $k(p)$ und daher $f(\mathfrak{p}) = 0$. Daher ist $f \in \mathcal{I}(M)$ und $\mathcal{I}(M)$ ein Radikalideal. (Oder direkter: Ein beliebiger Durchschnitt von Radikalidealen ist ein Radikalideal.)

Es ist klar, dass es genügt, (1) und (2) zu zeigen.

Für (1) folgt $\mathcal{I}\mathcal{V}(I) = \cap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(I)} \mathfrak{p} = \sqrt{I}$ direkt mit Satz 4.12.

Für (2) beobachtet man zunächst, dass die Menge M in der abgeschlossenen Menge $\mathcal{V}\mathcal{I}(M) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \cap_{\mathfrak{p}\in M}\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}$ enthalten ist. Wir zeigen, dass dies die kleinste abgeschlossene Menge mit dieser Eigenschaft ist und daher gleich dem Abschluss $\overline{M}$. Sei also $\mathcal{V}(J)$ eine abgeschlossene Menge mit $M \subseteq \mathcal{V}(J)$, also $J \subseteq \mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in M$. Dann folgt auch $J \subseteq \cap_{\mathfrak{p}\in M}\mathfrak{p} = \mathcal{I}(M)$ und daher $\mathcal{V}\mathcal{I}(M) \subseteq \mathcal{V}(J)$. $\square$

Korollar 5.3. *Seien A ein Ring und M und N Teilmengen von* $\operatorname{Spec}(A)$. *Dann gilt*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{I}(\emptyset) = A & \textit{und} & \mathcal{I}(\operatorname{Spec}(A)) = \operatorname{Nil}(A) \\ M \subseteq N & \Longrightarrow & \mathcal{I}(N) \subseteq \mathcal{I}(M) \\ \sqrt{\mathcal{I}(M)} & = & \mathcal{I}(M). \end{array}$$

Satz 5.4. *Für einen Ring A schränkt die Bijektion aus Satz 5.2 ein auf die Bijektion*

$$\operatorname{Spec}(A) \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{matrix} \textit{Abgeschlossene und irreduzible} \\ \textit{Teilmengen von } \operatorname{Spec}(A) \end{matrix} \right\}$$

und $\mathfrak{p}$ ist der eindeutige generische Punkt von $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Abbildung $\mathcal{V}$ in der angegebenen Menge landet. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ ein Primideal und angenommen $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cap J)$. (Genauer schreiben wir $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ als Vereinigung zweier in $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ abgeschlossener Mengen, aber da $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ in $\operatorname{Spec}(A)$ abgeschlossen ist, entsprechen diese abgeschlossenen Mengen $\mathcal{V}(I)$ und $\mathcal{V}(J)$ in $\operatorname{Spec}(A)$.) Dann gilt nach Satz 5.2, dass

$$\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathcal{I}\mathcal{V}(\mathfrak{p}) = \mathcal{I}\mathcal{V}(I \cap J) = \sqrt{I \cap J},$$

also $IJ \subseteq I \cap J \subseteq \mathfrak{p}$ und damit oBdA $I \subseteq \mathfrak{p}$, also $\mathcal{V}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathcal{V}(I)$ und damit auch Gleichheit und $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ ist irreduzibel.

Wir zeigen nun $\mathcal{V}\mathcal{I} = \mathrm{id}$. Sei dafür $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(\sqrt{I})$ eine abgeschlossene irreduzible Teilmenge von $\operatorname{Spec}(A)$. Es genügt zu zeigen, dass $\mathfrak{p} := \sqrt{I}$ ein Primideal ist. Wir nehmen an, dass $\sqrt{I}$ kein Primideal ist. Dann gibt es $xy \in \sqrt{I}$ mit $x \notin \sqrt{I}$ und $y \notin \sqrt{I}$. Es gilt $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(xy) = \mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y)$ und es ist

$$\mathcal{V}(I) = (\mathcal{V}(x) \cup \mathcal{V}(y)) \cap \mathcal{V}(I) = (\mathcal{V}(x) \cap \mathcal{V}(I)) \cup (\mathcal{V}(x) \cap \mathcal{V}(I))$$

eine Vereinigung von abgeschlossenen Teilmenegen von $\mathcal{V}(I)$. Also oBdA $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(x) \cap \mathcal{V}(I)$. Dies kann aber nicht sein, denn ist $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(x)$, so folgt mit Satz 5.2

$$x \in \sqrt{(x)} = \mathcal{I}\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{I}\mathcal{V}(I) = \sqrt{I},$$

was ein Widerspruch ist.

Wegen Lemma 4.6 ist $\mathfrak{p}$ ein generischer Punkt von $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$. Für die Eindeutigkeit (und die Injektivität von $\mathcal{V}$) sei also $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(A)$ mit $\overline{\{\mathfrak{q}\}} = \mathcal{V}(\mathfrak{q}) = \mathcal{V}(\mathfrak{p})$. Dann folgt aber $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. $\square$

Korollar 5.5. *In einem Ring A entsprechen die minimalen Primideale $\mathfrak{p}$ genau den irreduziblen Komponenten $\mathcal{V}(\mathfrak{p})$ von* $\operatorname{Spec}(A)$. *Insbesondere ist der Ring A irreduzibel genau dann, wenn* $\operatorname{Spec}(A)$ *irreduzibel ist und in diesem Fall ist das Primideal* $\operatorname{Nil}(A)$ *der generische Punkt.*

Beweis. Dies ist klar. Die letzte Aussage folgt mit Korollar A.17 $\square$

Beispiel 5.6. Ist $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ ein endliches direktes Produkt von Ringen, so gibt es eine kanonische Homöomorphie

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Spec}(A) & = & \mathcal{V}((0), A_2, \ldots, A_n) \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{V}(A_1, \ldots, A_{n-1}, (0)) \\ & \cong & \operatorname{Spec}(A_1) \quad \sqcup \ldots \sqcup \quad \operatorname{Spec}(A_n) \end{array}$$

von topologischen Räumen.

Sei umgekehrt eine Zerlegung

$$\operatorname{Spec}(A) \quad = \quad \mathcal{V}(I_1) \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{V}(I_2)$$

in endlich viele abgeschlossene Teilmengen gegeben. Für alle zwei Summanden gilt also $\emptyset = \mathcal{V}(I_i) \cap \mathcal{V}(I_j) = \mathcal{V}(I_i + I_j)$, also $A = \sqrt{I_i + I_j}$ nach Satz 5.2 und damit $A = I_i + I_j$. Es sind also $I_1, \ldots, I_n$ paarweise koprime Ideale. Mit dem Chinesischen Restsatz A.2 folgt

$$A/(\sqrt{I_1} \cap \ldots \cap \sqrt{I_n}) \cong A/\sqrt{I_1} \times \ldots \times A/\sqrt{I_n}.$$

Es gilt außerdem $\mathrm{Spec}(A) = \mathcal{V}(I_1) \cup \ldots \cup \mathcal{V}(I_n) = \mathcal{V}(I_1 \cap \ldots \cap \mathcal{I}_n)$. Ist nun A ein reduzierter Ring so folgt mit Satz 5.2, dass

$$(0) = \mathrm{Nil}(A) = \sqrt{I_1 \cap \ldots \cap \mathcal{I}_n} = \sqrt{I_1} \cap \ldots \cap \sqrt{I_n}$$

und wir haben eine Zerlegung $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ ein endliches direktes Produkt von Ringen gefunden. Diese Behauptung gilt auch für nicht reduziertes A, wie wir gleich sehen werden.

Ein Idempotent in einem Ring A ist ein Element $e \in A$ mit $e^2 = e$. Ist A ein Ring, so gibt es eine Bijektion

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Idempotente von } A\} & \cong & \{\text{Zerlegungen } A = A' \times A''\} \\ e & \mapsto & eA \times (1-e)A \quad (\cong A[\tfrac{1}{e}] \times A/(e)) \\ (1,0) & \leftarrow\!\shortmid & A' \times A''. \end{array}$$

Zusammen mit dem vorherigen Beispiel 5.6 liefert also jedes Idempotent $e \in A$ eine Zerlegung $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(A') \sqcup \mathrm{Spec}(A'')$. Der folgende Satz 5.8 zeigt, dass diese Zuordnung bijektiv ist.

Bemerkung 5.7. Eine zusammenhängende abgeschlossene und offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $U \neq \emptyset$ ist immer eine Zusammenhangskomponente von X, denn ist X_α eine (notwendigerweise abgeschlossene) Zusammenhangskomponente von X, die U enthält, so ist $X_\alpha \setminus U$ abgeschlosen in X, daher auch in X_α und $X_\alpha = U \sqcup (X_\alpha \setminus U)$ eine Zerlegung in abgeschlossene Teilmengen, woraus $X_\alpha = U$ folgt. Es ist im Allgemeinen aber nicht unbedingt jede Zusammenhangskomponente offen.

Satz 5.8. *Für einen Ring $A \neq 0$ schränkt die Bijektion aus Satz 5.2 ein auf die Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{(e)} \text{ mit} \\ e \text{ Idempotent} \end{array} \right\} & \underset{\mathcal{I}}{\overset{\mathcal{V}}{\rightleftarrows}} & \left\{ \begin{array}{c} \text{Abgeschlossene und offene} \\ \text{Teilmengen von } \mathrm{Spec}(A) \end{array} \right\} \\ \varphi \big\uparrow \cong & & \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{Idempotente} \\ \text{von } A \end{array} \right\} & & \end{array}$$

Beweis. Die vertikale Abbildung φ ist per Definition surjektiv. Wir werden die Bijektivität der zusammengesetzten Abbildung $\mathcal{V}\varphi$ zeigen. Hierraus ergibt sich zunächst die Injektivität von φ, also ist φ bijektiv und damit auch $\mathcal{V}$.

Zunächst zeigen wir, dass $\mathcal{V}$ tatsächlich in der angegebenen Menge landet. Sei $e \in A$ ein Idempotent. Dann ist

$$\mathcal{V}(e) \cup \mathcal{V}(1-e) = \mathcal{V}(e(1-e)) = \mathcal{V}(0) = \mathrm{Spec}(A)$$

und $\mathcal{V}(e) \cap \mathcal{V}(1-e) = \mathcal{V}((e) + (1-e)) = \mathcal{V}(1) = \emptyset$. Also ist $\mathcal{V}(e)$ das Komplement von $\mathcal{V}(1-e)$ und somit abgeschlossen und offen.

Für die Injektivität seien nun e und f Idempotente mit $\mathcal{V}(e) = \mathcal{V}(f)$. Dann folgt wie eben, dass $\mathcal{V}(f(1-e)) = \mathrm{Spec}(A)$ und daher ist $f(1-e)$ nilpotent, aber gleichzeitig auch idempotent, also $f(1-e) = 0$ und daher $f = fe$. Andersherum folgt auch $e = fe$, also $e = f$.

Für die Surjektivität sei $\mathcal{V}(I)$ eine abgeschlossene und offene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$. Dann ist ihr Komplement auch abgeschlossen und daher von der Form $\mathcal{V}(J)$. Es gilt nun $\emptyset = \mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I+J)$ und nach Satz 5.2 also $A = \sqrt{I+J}$. Insbesondere ist also $1^n = 1 \in I + J$ und es gibt $a \in I$ und $b \in J$ mit $1 = a + b$. Es gilt ausserdem $\mathrm{Spec}(A) = \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(IJ)$ und daher ist ab nilpotent, also $(ab)^n = 0$ für ein $n > 0$. Wir betrachten das Ideal $(a^n, b^n) \subseteq A$. Wäre dieses in einem Primideal enthalten, so auch a und b, ein Widerspruch. Also ist $(a^n, b^n) = A$ und es gibt $x, y \in A$ mit $xa^n + yb^n = 1$. Wir behaupten nun, dass $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(xa^n)$ und es ist xa^n idempotent, da

$$xa^n = xa^n(xa^n + yb^n) = (xa^n)^2 + xy(ab)^n = (xa^n)^2.$$

Da $a \in I$ folgt $xa^n \in I$ und damit $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathcal{V}(xa^n)$. Ebenso gilt $\mathcal{V}(J) \subseteq \mathcal{V}(yb^n)$. Läge also ein Element von $\mathcal{V}(xa^n)$ nicht in $\mathcal{V}(I)$, dann läge es in $\mathcal{V}(J)$ und damit in $\mathcal{V}(yb^n)$. Es ist aber $\mathcal{V}(xa^n) \cap \mathcal{V}(yb^n) = \emptyset$. □

Korollar 5.9. *Sei $A \neq 0$ ein Ring ohne nichttriviale idempotente Elemente. Dann ist* $\mathrm{Spec}(A)$ *zusammenhängend.*

Beweis. Ein topologischer Raum ist zusammenhängend genau dann, wenn die einzigen abgeschlossenen und offenen Teilmengen die leere Menge und der ganze Raum sind. Die Behauptung folgt dann mit Satz 5.8. □

Korollar 5.10. *Sei A ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. Dann ist die Zusammenhangskomponente von $\mathfrak{p}$ gegeben durch $\mathcal{V}(\{e \in \mathfrak{p} \mid e \text{ idempotent}\})$.*

Beweis. Wir haben im zweiten Teil von Lemma 4.9 gezeigt, dass die topologischen Räume $D(f)$ das Spektrum eines Rings sind und also nach Satz 4.11 quasikompakt. Wir behaupten, dass die Zusammenhangskomponente eines Punktes $\mathfrak{p}$ gegeben ist durch den Schnitt aller abgeschlossenen und offenen Mengen, die $\mathfrak{p}$ enthalten. Mit dieser Behauptung und dem vorherigen Satz 5.8 ist also die Zusammenhangskomponente von $\mathfrak{p}$ genau

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathcal{V}(e) \\ e \text{ idempotent}}} \mathcal{V}(e) = \mathcal{V}(\{e \in \mathfrak{p} \mid e \text{ idempotent}\}).$$

Es ist also noch die Behauptung zu zeigen. Wir setzen zur Abkürzung $X := \operatorname{Spec}(A)$. Es sei $Z := \cap_{i \in \mathcal{I}} Z_i$ der Durchschnitt aller abgeschlossenen und offenen Mengen $Z_i \subseteq X$, die $\mathfrak{p}$ enthalten ($Z \subseteq X$ ist abgeschlossen, muss aber nicht offen sein). Sei X_α die Zusammenhangskomponente von $\mathfrak{p}$. Wir wollen zunächst zeigen, dass $X_\alpha \subseteq Z$. Sei also Z_i ein Element in dem Durchschnitt, der Z definiert. Dann ist $X_\alpha = (Z_i \cap X_\alpha) \sqcup ((X \setminus Z_i) \cap X_\alpha)$ eine disjunkte Zerlegung von X_α in darin abgeschlossene Teilmengen. Da X_α zusammenhängend ist, ist eine von diesen leer. Da aber $\mathfrak{p} \in Z_i \cap X_\alpha$, folgt $((X \setminus Z_i) \cap X_\alpha) = \emptyset$, also $X_\alpha \subseteq Z$. Wir wollen zeigen, dass $X_\alpha = Z$ und es genügt zu sehen, dass Z zusammenhängend ist.

Sei $Z = V_1 \sqcup V_2$ eine Zerlegung in abgeschlossene (und daher auch offene) Teilmengen $V_1, V_2 \subseteq Z$. Da $Z \subseteq X$ abgeschlossen ist, sind V_1 und V_2 auch abgeschlossen in X. Abgeschlossene Teilmengen eines quasikompakten Raums sind wieder quasikompakt, also sind V_1 und V_2 quasikompakt. Es gibt quasikompakte offene Teilmengen U_1 und U_2 von X mit $V_1 = Z \cap U_1$ und $V_2 = Z \cap U_2$, da X eine Basis aus quasikompakten offenen Teilmengen besitzt (Übung (a)). Es gilt

$$\cap_i (Z_i \cap U_1 \cap U_2) = (\cap_i Z_i) \cap U_1 \cap U_2 = Z \cap U_1 \cap U_2 = (Z \cap U_1) \cap (Z \cap U_2) = V_1 \cap V_2 = \emptyset.$$

Der Schnitt $U_1 \cap U_2$ ist nun wieder quasikompakt, denn weil U_1 quasikompakt und offen ist, können wir es als eine endliche Vereinigung $U_1 = \cup_k D(f_k)$ schreiben und ebenso auch $U_2 = \cup_l D(g_l)$, womit folgt $U_1 \cap U_2 = (\cup_k D(f_k)) \cap (\cup_l D(g_l)) = \cup_{k,l} D(f_k g_l)$, was als endliche Vereinigung quasi-kompakter Räume wieder quasikompakt ist.

Daher gibt es ein $i \in \mathcal{I}$ mit $Z_i \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ (Übung (b)). Andererseits gilt

$$\cap_i (Z_i \cap (X \setminus (U_1 \cup U_2))) = Z \cap (X \setminus (U_1 \cup U_2)) = \emptyset$$

da $Z = V_1 \cup V_2 = (Z \cap U_1) \cup (Z \cap U_2) = Z \cap (U_1 \cup U_2) \subseteq U_1 \cup U_2$. Weil $X \setminus (U_1 \cup U_2)$ eine abgeschlossene und damit quasikompakte Menge ist, gibt es nach (Übung (b)) ein $j \in \mathcal{I}$ mit $Z_j \cap (X \setminus (U_1 \cup U_2)) = \emptyset$, also $Z_j \subseteq U_1 \cup U_2$.

Setze $Z_{ij} := Z_i \cap Z_j$. Dann gilt nach Konstruktion zunächst, dass $(Z_{ij} \cap U_1) \cap (Z_{ij} \cap U_2) = Z_{ij} \cap U_1 \cap U_2 \subseteq Z_i \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und außerdem auch $(Z_{ij} \cap U_1) \cup (Z_{ij} \cap U_2) = Z_{ij} \cap (U_1 \cup U_2) = Z_{ij}$, da $Z_{ij} \subseteq Z_j \subseteq U_1 \cup U_2$. Damit ist $Z_{ij} = (Z_{ij} \cap U_1) \sqcup (Z_{ij} \cap U_2)$ eine disjunkte Zerlegung. Da $U_1, U_2 \subseteq X$ jeweils offen sind, sind beide Summanden der disjunkten Zerlegung von Z_{ij} zunächst offen und damit auch abgeschlossen in der Unterraumstopologie von Z_{ij}. Weil aber Z_{ij} abgeschlossen und offen ist, sind diese Summanden also auch abgeschlossen und offen in X. Weil $\mathfrak{p} \in Z_i$ und $\mathfrak{p} \in Z_j$ folgt $\mathfrak{p} \in Z_{ij}$ und oBdA $\mathfrak{p} \in (Z_{ij} \cap U_1)$. Also ist $(Z_{ij} \cap U_1)$ ein Element in dem Durchschnitt, der Z definiert und damit gilt $Z \subseteq (Z_{ij} \cap U_1) = (Z_{ij} \cap U_1) \cap Z = Z_{ij} \cap V_1 \subseteq V_1$. Also gilt $V_1 = Z$ und Z ist zusammenhängend. □

Bemerkung 5.11. In einem noetherschen Ring gibt es nach Lemma A.18 nur endlich viele minimale Primideale. Da diese nach Korollar 5.5 genau zu den irreduziblen Komponenten seines Spektrums korrespondieren, hat $\operatorname{Spec}(A)$ für einen noetherschen Ring A nur endlich viele Irreduzibilitäts- und daher auch nur endlich viele Zusammenhangskomponenten.

Lemma 5.12. *Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\operatorname{Spec}(f)\colon \operatorname{Spec}(B) \to \operatorname{Spec}(A)$ die induzierte Abbildung. Dann gilt für ein Ideal $J \subseteq B$*

$$\overline{\operatorname{Spec}(f)(\mathcal{V}(J))} = \mathcal{V}(f^{-1}(J)).$$

Beweis. Mit Satz 5.2 gilt

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\mathrm{Spec}(f)(\mathcal{V}(J))} & = & \mathcal{V}\mathcal{I}(\mathrm{Spec}(f)(\mathcal{V}(J))) \\
& = & \mathcal{V}(\ \bigcap_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(f)(\mathcal{V}(J))} \mathfrak{p}\ ) \\
& \overset{(*)}{=} & \mathcal{V}(\ \bigcap_{\mathfrak{q}\in\mathcal{V}(J)} f^{-1}(\mathfrak{q})\ ) \\
& = & \mathcal{V}(\ f^{-1}(\bigcap_{\mathfrak{q}\in\mathcal{V}(J)} \mathfrak{q})\ ) \\
& = & \mathcal{V}(f^{-1}(\sqrt{J})) \\
& = & \mathcal{V}(\sqrt{f^{-1}(J)}) \\
& = & \mathcal{V}(f^{-1}(J)).
\end{array}$$

□

Die Gleichung $(*)$ bedarf vielleicht einer Erklärung. Schreibt man die Indizes beider Schnitte aus, so ist die behauptete Gleichheit $\mathcal{V}$ angewendet auf die Gleichung

$$\bigcap_{\substack{\mathfrak{p}=f^{-1}(\mathfrak{q}) \\ \text{für } \mathfrak{q}\in\mathcal{V}(J)}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{q}\subseteq B \text{ prim} \\ J\subseteq\mathfrak{q}}} f^{-1}(\mathfrak{q}).$$

Korollar 5.13. *Sei $f\colon A\to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist die induzierte Abbildung* $\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(B)\to\mathrm{Spec}(A)$ *dominant genau dann, wenn* $\mathrm{Ker}(f)\subseteq\mathrm{Nil}(A)$.

Beweis. Wenden wir das vorherige Lemma 5.12 auf $J := (0)$ an, so ergibt sich

$$\overline{\mathrm{Spec}(\mathrm{Spec}(B))} = \mathcal{V}(\mathrm{Ker}(f))$$

und es ist $\mathrm{Spec}(f)$ dominant genau dann, wenn die linke Seite gleich $\mathrm{Spec}(A)$ ist. Nach Satz 5.2 ist aber $\mathrm{Spec}(A) = \mathcal{V}(\mathrm{Ker}(f))$ genau dann, wenn

$$\mathrm{Nil}(A) = \mathcal{I}(\mathrm{Spec}(A)) = \mathcal{I}\mathcal{V}(\mathrm{Ker}(f)) = \sqrt{\mathrm{Ker}(f)}$$

und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{Ker}(f)\subseteq\mathrm{Nil}(A)$. □

6. Die Ideale-Varietäten Korrespondenz und der Nullstellensatz

In diesem Kapitel werden wir die Ergebnisse der letzten beiden Kapitel in speziellen Fällen untersuchen. Genauer formulieren wir die abstrakte Ideale-Teilmengen-Korrespondenz aus Satz 5.2 für den Fall eines Polynomrings über einem algebraisch abgeschlossenen Körper neu und bekommen damit den wichtigen Hilbertschen Nullstellensatz als ein Korollar. Anschließend werden wir noch algebraische Abbildungen in diesem Spezialfall betrachten und eine Äquivalenz von Kategorien formulieren.

Bemerkung 6.1. Sei A ein Ring. Es ist $\mathrm{mSpec}(A)\hookrightarrow\mathrm{Spec}(A)$ nicht unbedingt ein offener oder abgeschlossener Unterraum. Wäre es ein offener Unterraum, so wäre das Komplement $\mathrm{Spec}(A)\setminus\mathrm{mSpec}(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$. Es enthält aber jede nichtleere abgeschlossene Teilmenge von $\mathrm{Spec}(A)$ einen abgeschlossenen Punkt. Dies ist ein Widerspruch, falls $\mathrm{Spec}(A)\neq\mathrm{mSpec}(A)$. Ist $(A,\mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, so ist $\mathrm{mSpec}(A)=\{\mathfrak{m}\}$ und daher ein abgeschlossener Unterraum von $\mathrm{Spec}(A)$. Es ist aber beispielsweise $\mathrm{mSpec}(\mathbb{Z})$ nicht abgeschlossen in $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, denn das Komplement $\{(0)\}$ ist nicht offen (siehe Beispiel 4.10).

Definition 6.2. Seien A ein Ring und $I\subseteq A$ eine Teilenge. Dann definieren wir

$$\begin{array}{rcl}
\mathcal{V}_{\max}(I) & := & \mathcal{V}(I)\cap\mathrm{mSpec}(A) \\
& = & \{\mathfrak{m}\in\mathrm{mSpec}(A)\mid I\subseteq\mathfrak{m}\}.
\end{array}$$

Definition 6.3. Ein *Jacobson Ring* ist ein Ring A, in in dem für jedes Ideal $I\subseteq A$ die Gleichheit $\mathrm{Nil}(A/I)=\mathrm{Jac}(A/I)$ gilt, also

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m}\in\mathcal{V}_{\max}(I)} \mathfrak{m}.$$

Satz 6.4. *Sei k ein Körper. Eine k-Algebra A von endlichem Typ ist ein Jacobson Ring.*

Beweis. Wir können $I = (0)$ annehmen, da die k-Algebra A/I wieder von endlichem Typ ist. Es ist klar, dass $\mathrm{Nil}(A) \subseteq \mathrm{Jac}(A)$.

Umgekehrt sei $f \in \mathrm{Jac}(A)$ und $f \notin \mathrm{Nil}(A)$. Weil f nicht nilpotent ist, ist $A[\frac{1}{f}] \neq 0$ und enthält also ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Es ist aber $A[\frac{1}{f}] \cong A[X]/(Xf-1)$ von endlichem Typ über k und somit nach Korollar 3.12 auch das Urbild von $\mathfrak{m}$ unter der Lokalisierungsabbildung ein maximales ideal in A. Nach der Idealkorrespondenz für Lokalisierungen A.12 ist aber f nicht darin enthalten, ein Widerspruch. □

Satz 6.5. *Sei A ein Jacobson Ring. Die inklusionsumkehrende Bijektion aus Satz 5.2 passt in ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
\left\{ \textit{Radikalideale von } A \right\} \arrow[r, shift left, "\mathcal{V}_{\max}"] \arrow[d, equal] & \left\{ \begin{matrix} \textit{Abgeschlossene Teilmengen} \\ \textit{von } \mathrm{mSpec}(A) \end{matrix} \right\} \arrow[l, shift left, "\mathcal{I}"] \\
\left\{ \textit{Radikalideale von } A \right\} \arrow[r, shift left, "\mathcal{V}"] & \left\{ \begin{matrix} \textit{Abgeschlossene Teilmengen} \\ \textit{von } \mathrm{Spec}(A) \end{matrix} \right\} \arrow[l, shift left, "\mathcal{I}"] \arrow[u, "M \mapsto M \cap \mathrm{mSpec}(A)"']
\end{tikzcd}$$

deren horizontale Abbildungen jeweils zueinander inverse Bijektionen sind und wobei die Teilmenge $\mathrm{mSpec}(A) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ *die Unterraumtopologie trägt und die obere horizontale Einschränkung von $\mathcal{I}$ mit dem gleichen Symbol bezeichnet wird. Es gilt außerdem*

(1) $\mathcal{I}\mathcal{V}_{\max}(I) = \sqrt{(I)}$ *für eine Teilmenge $I \subseteq A$,*
(2) $\mathcal{V}_{\max}\mathcal{I}(M) = \overline{M}$ *für eine Teilmenge* $M \subseteq \mathrm{mSpec}(A)$.

Beweis. Es folgt die Kommutativität, sowie (1) direkt aus der Definition eines Jacobson Rings und Satz 5.2. Ebenso gilt (2), denn ist $X' \subseteq X$ ein Unterraum eines topologischen Raums so ist der Abschluss einer Teilenge $M \subseteq X'$ in X' gegeben durch den Schnitt des Abschlusses von M in X mit X'. □

Wir betrachten nun einen algebraisch abgeschlossenen Körper $k = \bar{k}$ und die k-Algebra $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. In diesem Fall liefert der schwache Nullstellensatz 3.5 zusammen mit (3.2) eine Bijektion

$$\mathrm{mSpec}(k[X_1, \ldots, X_n]) \xrightarrow[\alpha^{-1}]{\cong} k^n$$

mittels derer wir k^n die Struktur eines topologischen Raums geben können (die linke Seite der Bijektion ist ja bereits mit einer Topologie versehen). Diese Topologie nennt man ebenfalls die *Zariski Topologie* auf k^n. Verfolgt man die genannten Bijektionen, so sind deren abgeschlossene Mengen genau gegeben durch

$$\mathcal{V}_k(I) := \alpha^{-1}(\mathcal{V}_{\max}(I)) = \{\underline{a} \in k^n \mid \forall f \in I : f(\underline{a}) = 0\}.$$

für eine Teilmenge $I \subseteq A$. Eine solche Teilmenge $\mathcal{V}_k(I) \subseteq k^n$ nennt man auch eine *affine Varietät.* Für eine Teilmenge $M \subseteq k^n$ definieren wir außerdem

$$\mathcal{I}_k(M) := \mathcal{I}(\alpha(M)) = \{f \in A \mid \forall \underline{a} \in M : f(\underline{a}) = 0\}.$$

Mit diesen Bezeichnungen können wir den vorherigen Satz 6.5 umschreiben zu dem in der Einleitung als Satz 1.1 bezeichneten klassischen *Hilbertschen Nullstellensatz.*

Satz 6.6 (Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Ist $k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so sind die Abbildungen $\mathcal{V}_k$ und $\mathcal{I}_k$ zueinander inverse Bijektionen.*

Wir möchten uns nun noch eine allgemeinere und relative Situation ansehen. Sei dazu A ein Ring und $A \to K$ eine A-Algebra, sowie $I \subseteq A[X_1, \ldots, X_n]$ eine Teilmenge. Dann definieren wir

$$\mathcal{V}_K(I) = \{\underline{a} \in K^n \mid \forall f \in I : f(\underline{a}) = 0\} \tag{6.1}$$

als die zu I gehörige *affine Varietät* in K^n.

Bemerkung 6.7. Im obigen Spezialfall war $A = K = k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper und damit $\mathcal{V}_k(I) = \mathcal{V}_K(I)$.

Bemerkung 6.8. Wir haben uns im ersten Kapitel schon davon überzeugt, dass wir nur A-Algebren $A \to K$ betrachten wollen die auch Körper sind. In diesem Fall definieren die Teilmengen $\mathcal{V}_K(I)$ wie in Lemma 4.3 eine Topologie auf K^n, die *Zariski Topologie* auf k^n.

Lemma 6.9. *Sei A ein Ring, $I \subseteq A[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal und $A \to K$ eine A-Algebra. Dann passt die Bijektion 3.1 in ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\cong", "\Psi"'] & \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[X_1, \ldots, X_n], K) \\ \mathcal{V}_K(I) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\cong", "\bar{\Psi}"'] & \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[X_1, \ldots, X_n]/I, K) \arrow[u, hook, "q^*"'] \end{tikzcd}$$

wobei die Abbildung $q\colon A[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow A[X_1, \ldots, X_n]/I$ die Quotientenabbildung ist.

Beweis. Durch die universelle Eigenschaft der Quotientenabbildung q faktorisiert die Abbildung $\mathcal{V}_K(I) \hookrightarrow K^n \to \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[X_1, \ldots, X_n], K)$ über $\mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[X_1, \ldots, X_n]/I, K)$ und ist per Definition die Abbildung $q^*\bar{\Psi}$ (Genauer ist $\bar{\Psi}(\underline{a})(\bar{f})$ gegeben durch $f(\underline{a})$ für ein Urbild f von $\bar{f}$ unter q. Ist f' ein zweites Urbild von $\bar{f}$, so gilt $f = f' + g$ für ein $g \in I$ und $f(\underline{a}) = f'(\underline{a}) + g(\underline{a}) = f'(\underline{a})$, da $\underline{a} \in \mathcal{V}_K(I)$.). Es gilt $\Psi^{-1}(\psi) = (\psi(X_1), \ldots, \psi(X_n))$ für eine A-Algebrenabbildung $\psi\colon A[X_1, \ldots, X_n] \to K$. Liegt diese Abbildung ψ im Bild von q^*, so gilt außerdem $\psi(f) = 0$ für alle $f \in I$. Wir zeigen, dass das n-Tupel $(\psi(X_1), \ldots, \psi(X_n)) \in K^n$ für ein solches ψ in der Teilmenge $\mathcal{V}_K(I)$ liegt. Sei dazu $f \in I$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} f(\psi(X_1), \ldots, \psi(X_n)) & = & \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{i_1,\ldots,i_n} \psi(X_1)^{i_1} \cdot \cdots \cdot \psi(X_n)^{i_n} \\ & = & \psi(\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a_{i_1,\ldots,i_n} X_1^{i_1} \cdot \cdots \cdot X_n^{i_n}) \\ & = & \psi(f) \\ & = & 0 \end{array}$$

Also schränken sowohl Ψ als auch Ψ^{-1} auf die gewünschte Weise ein und sind zueinander inverse Bijektionen. $\square$

Bemerkung 6.10. Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass man für ein Radikalideal I aus der abgeschlossenen Teilmenge $\mathcal{V}_K(I) \hookrightarrow K^n$ nicht unbedingt I rekonstruieren kann. Ist zum Beispiel $A = K = \mathbb{R}$ und $I = (X^2+1) \subseteq \mathbb{R}[X]$, so gilt $\mathcal{V}_\mathbb{R}(X^2+1) = \emptyset = \mathcal{V}_\mathbb{R}(1)$. Unter der Bijektion des vorherigen Lemmas 6.9 bedeutes dies, dass es keine $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismen von $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ nach $\mathbb{R}$ gibt, genau so, wie es keine $\mathbb{R}$-Algebrenhomomorphismen von dem Nullring nach $\mathbb{R}$ gibt.

Für einen Ring A betrachten wir die Kategorie $\mathbf{FtRed}(A)$. Ihre Objekte sind A-Algebren der Form

$$A[Y_1, \ldots, Y_m]/J$$

für ein Radikalideal J. Die Morphismen in dieser Kategorie sind gegeben durch die üblichen A-Algebrenhomomorphismen.

Bemerkung 6.11. Ein Funktor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwischen zwei Kategorien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ heisst eine *Äquivalenz von Kategorien*, wenn er

1. *voll* ist, also wenn für alle zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ die durch die Definition eines Funktors gegebene Abbildung $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(X), F(Y))$ surjektiv ist,
2. *treu* ist, also wenn für alle zwei Objekte $X, Y \in \mathcal{C}$ die durch die Definition eines Funktors gegebene Abbildung $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(X), F(Y))$ injektiv ist,
3. *essentiell surjektiv* ist, also wenn jedes Objekt aus $\mathcal{D}$ isomorph ist zu einem Objekt der Form $F(X)$ für ein $X \in \mathcal{C}$.

Bemerkung 6.12. Für einen Ring A ist die Kategorie $\mathbf{FtRed}(A)$ eine Unterkategorie der Kategorie $\mathbf{AlgFtRed}(A)$ der reduzierten A-Algebren von endlichem Typ mit A-Algebrenabbildungen als Morphismen. Der Inklusionsfunktor ist sicherlich voll und treu und jede reduzierte A-Algebra von endlichem Typ ist per Definition isomorph zu einem Objekt aus $\mathbf{FtRed}(A)$. Daher sind die beiden Kategorien äquivalent.

Es sei $\bar{f}\colon A[Y_1,\ldots,Y_m]/J \to A[X_1,\ldots,X_n]/I$ ein Morphismus zwischen zwei Objekten von $\mathbf{FtRed}(A)$. Ein solcher liftet (nicht unbedingt eindeutig) zu einem A-Algebrenhomomorphismus $f\colon A[Y_1,\ldots,Y_m] \to A[X_1,\ldots,X_n]$, es gibt also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A[\underline{Y}] \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q_J"] & A[\underline{X}] \arrow[d, two heads, "q_I"] \\ A[\underline{Y}]/J \arrow[r, "\bar{f}"] & A[\underline{X}]/I \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

von A-Algebrenhomomorphismen, wobei q_J und q_I die jeweiligen Quotientenabbildungen bezeichnen.

Lemma 6.13. *Seien A ein Ring, $A \to K$ eine A-Algebra und ein Diagramm* (6.2) *gegeben. Setzen wir $f_j := f(Y_j) \in A[X_1,\ldots,X_n]$ und $F(\underline{a}) := (f_1(\underline{a}),\ldots,f_m(\underline{a}))$, so gibt es ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} & K^m \arrow[rr, "\cong", "\bar{\Psi}"'] & & \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[\underline{Y}],K) \\ K^n \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\cong", "\Psi"'] & & \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[\underline{X}],K) \arrow[ur, "f^*"] & \\ & \mathcal{V}_K(J) \arrow[uu, hook] \arrow[rr, "\cong", "\bar{\Psi}"'] & & \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[\underline{Y}]/J,K) \arrow[uu, hook, "q_J^*"'] \\ \mathcal{V}_K(I) \arrow[uu, hook] \arrow[ur, "\bar{F}"] \arrow[rr, "\cong", "\Psi"'] & & \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(A[\underline{X}]/I,K) \arrow[uu, hook, "q_I^*"'] \arrow[ur, "\bar{f}^*"] & \end{tikzcd}$$

wobei $\bar{F}$ die Einschränkung von F bezeichnet.

Beweis. Die rechte Seite kommutiert durch das Einsetzen des Diagramms (6.2) in den Funktor $\mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(-,K)$. Die vordere und die hintere Seite des Diagramms kommutieren wegen Lemma 6.9. Die obere Seite kommutiert wegen Lemma 3.21 (es wurde dort im Beweis für die Kommutativität des relevanten Diagramms nicht benutzt, dass dort k ein Körper ist). Daraus folgt die Behauptung. □

Sei A ein Ring und $A \to K$ eine A-Algebra und sei $\mathbf{EbAffVar}(A \to K)$ die Kategorie der *eingebetteten affinen Varietäten*. Ihre Objekte sind die affinen Varietäten

$$\mathcal{V}_K(I) \hookrightarrow K^n$$

aus (6.1) für eine Teilmenge $I \subseteq A[X_1,\ldots,X_n]$ (zusammen mit der Einbettung als Teilmenge des K^n). Um die Morphismen dieser Kategorie zu definieren, erweitern wir in der folgenden Definition 6.14 den Begriff der *algebraischen Abbildung* aus Definition 3.19 auf affine Varietäten. Die Morphismen $\mathrm{Hom}(V \hookrightarrow K^n, W \hookrightarrow K^m)$ in der Kategorie $\mathbf{EbAffVar}(A \to K)$ sind die algebraischen Abbildungen.

Definition 6.14. Sei A ein Ring und $A \to K$ eine A-Algebra. Seien ausserdem $V \hookrightarrow K^n$ und $W \hookrightarrow K^m$ affine Varietäten in Sinn von (6.1). Eine Abbildung $\bar{F}\colon V \to W$ heisst *algebraisch über A*, wenn es Polynome $f_1,\ldots,f_m \in A[X_1,\ldots,X_n]$ gibt mit

$$\begin{array}{rccl} \bar{F}\colon & V & \to & W \\ & \underline{a} & \mapsto & (f_1(\underline{a}),\ldots,f_m(\underline{a})), \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccl} f\colon & A[Y_1,\ldots,Y_m] & \to & A[X_1,\ldots,X_n] \\ & Y_j & \mapsto & f_j \end{array}$$

heißt eine *zu $\bar{F}$ gehörige Abbildung auf Polynomringen über A.*

Bemerkung 6.15. Es gibt also eine algebraische Abbildung $\bar{F}\colon V \to W$ über A genau dann, wenn es eine algebraische Abbildung $F\colon K^n \to K^m$ über A gibt, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "F"] & K^m \\ V \arrow[u, hook] \arrow[r, "\bar{F}"] & W \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Bemerkung 6.16. Die vorhereige Definition 6.14 scheint auf den ersten Blick im Vergleich zu bekannten Abbildungsbegriffen aus der Topologie oder Analysis zu restiktiv zu sein. Sind allerdings V und W zwei kompakte Mannigfaltigkeiten, so lassen sich diese abgeschlossen als $V \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und $W \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ für geeignete n und m einbetten. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "F"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_i"] & \mathbb{R} \\ V \arrow[u, hook] \arrow[r, "\bar{F}"] & W. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Eine stetige Abbildung F ist gegeben durch die Angabe von m-vielen stetigen Abbildungen $\mathrm{pr}_i F$ nach $\mathbb{R}$. Nun sagt aber der Fortsetzungssatz von Tietze, dass sich jede stetige Abbildung $V \to \mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung $\mathrm{pr}_i F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ erweitern lässt. Also ist die Definition einer stetigen Abbildung zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten analog zu Definition 6.14.

Seien A ein Ring und $A \to K$ eine A-Algebra. Dann ist die Zuordnung

$$\begin{array}{rrcl} \mathcal{V}_K\colon & \mathbf{FtRed}(A)^{op} & \to & \mathbf{EbAffVar}(A \to K) \\ & A[X_1,\dots,X_n]/I & \mapsto & \mathcal{V}_K(I) \hookrightarrow K^n \\ & \bar{f} & \mapsto & \bar{F} \end{array}$$

ein Funktor, der per Definition surjektiv auf Objekten ist. Die Wohldefiniertheit von $\bar{f} \mapsto \bar{F}$ folgt aus Lemma 6.13.

Beispiel 6.17. Es ist $\mathcal{V}_K$ nicht unbedingt ein voller Funktor. Mit anderen Worten lässt sich nicht zu jeder algebraischen Abbildung $\bar{F}\colon \mathcal{V}_K(I) \to \mathcal{V}_K(J)$ ein kommutatives Diagramm (6.2) finden, welches diese induziert. Sei beispielsweise $A = K = \mathbb{R}$ und seien die Ideale $J = (1) \subseteq \mathbb{R}[Y]$ und $I = (X^2+1) \subseteq \mathbb{R}[X]$ gegeben. Es gilt $\mathcal{V}_K(I) = \emptyset = \mathcal{V}_K(J)$ und es gibt offenbar eine algebraische Abbildung $\bar{F}\colon \mathcal{V}(I) \to \mathcal{V}(J)$, beispielsweise gegeben durch die Identität $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und durch $\mathbb{R}[Y] \to \mathbb{R}[X]$ mit $Y \mapsto X$. Andererseits kann es kein Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}[Y] \arrow[r] \arrow[d, two heads, "q_J"] & \mathbb{R}[X] \arrow[d, two heads, "q_I"] \\ (0) = \mathbb{R}[Y]/J \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}[X]/I \cong \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

geben.

Es ist auch $\mathcal{V}_K$ nicht unbedingt ein treuer Funktor. Sei dafür $A = K = \mathbb{F}_2$. Es genügt hier sogar schon $I = (0)$ zu betrachten (und also nur die obere Seite des Diagramms in Lemma 6.13). Betrachte die $\mathbb{F}_2$-Algebrenmorphismen $f\colon \mathbb{F}_2[Y] \to \mathbb{F}_2[X]$ mit $Y \mapsto X^2$ und die Identität $\mathrm{id}\colon \mathbb{F}_2[Y] \to \mathbb{F}_2[X]$. Diese induzieren die gleiche Abbildung $F\colon \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2$.

Satz 6.18. *Ist $A = K = k = \bar{k}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, so ist der Funktor $\mathcal{V}_k$ voll und treu und damit eine Äquivalenz von Kategorien.*

Beweis. Seien also $I \subseteq k[X_1,\dots,X_n]$ und $J \subseteq k[Y_1,\dots,Y_m]$ zwei Radikalideale. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg}}(k[\underline{Y}]/J, k[\underline{X}]/I) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{V}_k(I) \hookrightarrow k^n, \mathcal{V}_k(J) \hookrightarrow k^m) \\ \bar{f} & \mapsto & \bar{F} \end{array}$$

und zeigen zunächst dessen Surjektivität. Eine algebraische Abbildung $\bar{F}\colon \mathcal{V}_k(I) \to \mathcal{V}_k(J)$ hat (mindestens) eine zugehörige Abbildung auf Polynomringen $f\colon k[\underline{Y}] \to k[\underline{X}]$. Diese zugehörige Abbildung f bestimmt $\bar{F}$ eindeutig. Wir wollen zeigen, dass es eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} k[\underline{Y}] \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q_J"] & k[\underline{X}] \arrow[d, two heads, "q_I"] \\ k[\underline{Y}]/J \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] & k[\underline{X}]/I \end{tikzcd}$$

gibt, denn dann wird $\bar{f}$ auf $\bar{F}$ abgebildet (siehe Lemma 6.13). Es gibt eine Faktorisierung, falls $f(J) \subseteq I$. Der Nullstellensatz 6.6 liefert nun, dass $I = \{g \in k[\underline{X}] \mid \forall \underline{a} \in \mathcal{V}_k(I) : g(\underline{a}) = 0\}$.

Sei also $h \in J$ und $\underline{a} \in \mathcal{V}_k(I)$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} f(h)(\underline{a}) & = & f(\sum_{(i_1,\dots,i_m)} a_{i_1,\dots,i_m} Y_1^{i_1} \cdot \dots \cdot Y_m^{i_m})(\underline{a}) \\ & = & (\sum_{(i_1,\dots,i_m)} a_{i_1,\dots,i_m} f_1^{i_1} \cdot \dots \cdot f_m^{i_m})(\underline{a}) \\ & = & \sum_{(i_1,\dots,i_m)} a_{i_1,\dots,i_m} f_1^{i_1}(\underline{a}) \cdot \dots \cdot f_m^{i_m}(\underline{a}) \\ & = & \sum_{(i_1,\dots,i_m)} a_{i_1,\dots,i_m} f_1(\underline{a})^{i_1} \cdot \dots \cdot f_m(\underline{a})^{i_m} \\ & = & h(f_1(\underline{a}), \dots, f_m(\underline{a})). \end{array}$$

Der Nullstellensatz 6.6 liefert aber außerdem, dass $J = \{h \in k[\underline{Y}] \mid \forall \underline{b} \in \mathcal{V}_k(J) : h(\underline{b}) = 0\}$. Da $\underline{b} := (f_1(\underline{a}), \dots, f_m(\underline{a})) \in \mathcal{V}_k(J)$ folgt also $f(h)(\underline{a}) = 0$ und damit $f(h) \in I$, also $f(J) \subseteq I$.

Für die Injektivität seinen

$$\begin{tikzcd} k[\underline{Y}] \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "q_J"] & k[\underline{X}] \arrow[d, two heads, "q_I"] \\ k[\underline{Y}]/J \arrow[r, "\bar{f}"] & k[\underline{X}]/I \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} k[\underline{Y}] \arrow[r, "f'"] \arrow[d, two heads, "q_J"] & k[\underline{X}] \arrow[d, two heads, "q_I"] \\ k[\underline{Y}]/J \arrow[r, "\bar{f}'"] & k[\underline{X}]/I \end{tikzcd}$$

zwei Diagramme, die beide $\bar{F}\colon \mathcal{V}_k(I) \to \mathcal{V}_k(J)$ definieren. Durch den Nullstellensatz 6.6 können wir annehmen, dass in beiden Diagrammen das gleiche I und J auftaucht. Es ist zu zeigen, dass $\bar{f} = \bar{f}'$. Sei $h \in k[\underline{Y}]$. Wir zeigen, dass $f(h) - f'(h) \in I$ und wissen durch den Nullstellensatz 6.6, dass $I = \{g \in k[\underline{X}] \mid \forall \underline{a} \in \mathcal{V}_k(I) : g(\underline{a}) = 0\}$. Sei also $\underline{a} \in \mathcal{V}_k(I)$. Wir wollen zeigen, dass $(f(h) - f'(h))(\underline{a}) = f(h)(\underline{a}) - f'(h)(\underline{a}) = 0$ und es gilt wie oben

$$\begin{array}{rcl} f(h)(\underline{a}) & = & h(f_1(\underline{a}), \dots, f_m(\underline{a})) \\ & = & h(\bar{F}(\underline{a})) \\ & = & h(f'_1(\underline{a}), \dots, f'_m(\underline{a})) \\ & = & f'(h)(\underline{a}). \end{array} \qquad \square$$

7. Prägarben und Garben

Bevor wir im nächsten Kapitel die Strukturgarbe auf dem Spektrum eines Rings definieren und zu Schemata verkleben werden, müssen wir einige Grundbegriffe der Garbentheorie diskutieren. Diese abstrakte Theorie hat vielleicht auf den ersten Blick nicht unbedingt etwas mit Algebraischer Geometrie zutun. Sie ist allerdings nicht nur ein technisches Hilfsmittel für knappe Definitionen sondern in der modernen Algebraischen Geometrie, sowie vielen anderen Gebieten der Mathematik, allgegenwärtig.

Definition 7.1. Sei X ein topologischer Raum. Die *Kategorie* $\mathrm{Ouv}(X)$ *der offenen Mengen von* X hat als Objekte die offenen Mengen $U \subseteq X$ von X und es ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ouv}(X)}(U, V) := \begin{cases} U \hookrightarrow V & \text{falls } U \subseteq V \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es bezeichne im Folgenden $\mathcal{S}$ die Kategorie **Set** der Mengen, die Kategorie **Ab** der abelschen Gruppen oder die Kategorie **Ring** der Ringe und X einen topologischen Raum.

Definition 7.2. Eine *Prägarbe* $\mathcal{F}$ auf X (mit Werten in $\mathcal{S}$) ist ein Funktor

$$\mathcal{F}\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}.$$

Die Elemente $s \in F(U)$ heissen *Schnitte von* $\mathcal{F}$ *auf* U. Für eine Inklusion $U \subseteq V$ in X offener Mengen, nennt man die $\mathcal{S}$-Abbildung $(-)_{|U}\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ die *Einschränkung.*

Ein *Morphismus* $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen zwei solchen Prägarben ist eine natürliche Transformation $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen den Funktoren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$, also eine Familie

$$\{f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to G(U)\}_{U \in \mathrm{Ouv}(X)}$$

von $\mathcal{S}$-Abbildungen, sodass für jede Inklusion $U \subseteq V$ in X offener Mengen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "f(V)"] \arrow[d] & \mathcal{G}(V) \arrow[d] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f(U)"] & G(U) \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei die vertikalen Abbildungen die jeweiligen Einschränkungen sind. Wir sagen, dass eine Eigenschaft eines Morphismus $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen Prägarben *schnittweise* gegeben ist, wenn diese Eigenschaft dadurch definiert ist, dass alle $\mathcal{S}$-Abbildungen $f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ die gleichgenannte Eigenschaft erfüllen. Die Prägarben auf X mit Werten in $\mathcal{S}$ bilden zusammen mit ihren Morphismen eine Kategorie, die mit $\mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X)$ oder auch nur mit $\mathbf{PSh}(X)$ bezeichnet wird.

Bemerkung 7.3. Eine Prägarbe $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ besteht also genau aus den Daten:

(1) Für jede offene Menge $U \subseteq X$ ein Objekt $F(U) \in \mathcal{S}$ und
(2) für jede Inklusion $U \subseteq V$ in X offener Mengen eine $\mathcal{S}$-Abbildung $\rho^V_U\colon \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$

mit den beiden Eigenschaften

- $\rho^U_U = \mathrm{id}_{F(U)}$ und
- $\rho^W_U = \rho^V_U \rho^W_V$ für jede Inklusion $U \subseteq V \subseteq W$ in X offener Mengen.

Beispiel 7.4.

(1) Ist $A \in \mathcal{S}$ ein Objekt so ist die zugehörige *konstante Prägarbe* cA auf X definiert durch $cA(U) := A$ für alle $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ und $\mathrm{id}_A\colon cA(V) \to cA(U)$ für jede Inklusion $U \subseteq V$ in X offener Mengen.
(2) Ist $V \in \mathrm{Ouv}(X)$, so heisst

$$\begin{array}{rccl} yV\colon & \mathrm{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathcal{S} \\ & U & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ouv}(X)}(U,V) \end{array}$$

die *durch V dargestellte Prägarbe* auf X.
(3) Es ist

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{C}(-,\mathbb{R})\colon & \mathrm{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Set} \\ & U & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U,\mathbb{R}) \end{array}$$

die *Prägarbe der stetigen Fuktionen* auf X. Auf die gleiche Weise bekommt man auch eine Prägarbe $\mathcal{C}(-,\mathbb{R})$ mit Werten in **Ab** oder **Ring**.

Lemma 7.5. *Ein Morphismus $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben ist ein Isomorphismus genau dann, wenn er schnittweise ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Ein Morphismus $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben heißt ein Isomorphismus, wenn es einen Morphismus $g\colon \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ von Prägarben gibt mit $gf = \mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ und $fg = \mathrm{id}_{\mathcal{G}}$. Es ist also klar, dass ein Isomorphismus von Prägarben auch schnittweise ein Isomorphismus ist.

Angenommen $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist schnittweise ein Isomorphismus, es gibt also für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ zu der $\mathcal{S}$-Abbildung $f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ eine inverse $\mathcal{S}$-Abbildung $g(U)\colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{F}(U)$. Damit g einen Morphismus von Prägarben definiert müssen wir zeigen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G}(V) \arrow[r, "g(V)"] \arrow[d] & \mathcal{F}(V) \arrow[d] \\ \mathcal{G}(U) \arrow[r, "g(U)"] & F(U) \end{tikzcd}$$

kommutiert, wobei die vertikalen Abbildungen jeweils die Einschränkungen sind. Für ein $s \in \mathcal{G}(V)$ gilt aber, da $\mathcal{F}$ ein Morphismus von Prägarben ist, die Gleichung

$$g(V)(s)_{|U} = g(U)f(U)(g(V)(s)_{|U}) = g(U)(f(V)g(V)(s)_{|U}) = g(U)(s_{|U}). \qquad \square$$

Die Prägarbe $\mathcal{C}(-,\mathbb{R})$ aus dem vorherigen Beispiel 7.4.(3) ist das motivierende Beispiel für den Begriff einer Garbe. Ist $X = U \cup V$ eine offene Überdeckung von X, so gilt:

- (*Eindeutigkeit*) Sind $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die jeweils auf U und V übereinstimmen (für die also gilt $f_{|U} = g_{|U}$ und $f_{|V} = g_{|V}$), so stimmen f und g schon auf ganz X überein (es gilt also $f = g$). Mit anderen Worten kann man also Gleichheit von Schnitten „lokal testen".
- (*Verkleben von lokalen Schnitten*) Sind $f_U\colon U \to \mathbb{R}$ und $f_V\colon V \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf dem Schnitt $U \cap V$ übereinstimmen (für die also gilt $(f_U)_{|U\cap V} = (f_V)_{|U\cap V}$), so gibt es eine stetige Abbildung $f\colon X \to \mathbb{R}$ mit $f_{|U} = f_U$ und $f_{|V} = f_V$.

Definition 7.6. Eine Prägarbe $\mathcal{F} \colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ heisst eine *Garbe*, wenn für jede offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow U\}_{i \in \mathcal{I}}$ einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ das Diagramm

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}(U_i) \underset{d_1''}{\overset{d_1'}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} \mathcal{F}(U_{ij})$$

ein *Equalizer-Diagramm* ist, wobei $U_{ij} := U_i \cap U_j$, wobei $d_0(s) := (s_{|U_i})_i$ und wobei $d_1'((s_i)_i) := (s_{i|U_{ij}})_{ij}$ und $d_1'((s_i)_i) := (s_{j|U_{ij}})_{ij}$. Für unsere Kategorien $\mathcal{S}$ bedeutet dieses genau

(1) d_0 ist injektiv und
(2) das Bild von d_0 ist genau die Menge $\{(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid d_1'((s_i)_i) = d_1''((s_i)_i)\}$.

Die Garben auf X mit Werten in $\mathcal{S}$ bilden eine Unterkategorie

$$\mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \hookleftarrow \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) \colon i \tag{7.1}$$

der Prägarben wofür manchmal auch nur $\mathbf{Sh}(X)$ geschrieben wird.

Bemerkung 7.7. Ist $\mathcal{S} = \mathbf{Ab}$ so ist eine Prägarbe $\mathcal{F} \colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ also genau dann eine Garbe, wenn für jede offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow U\}_{i \in \mathcal{I}}$ einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ das Diagramm

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d_1 := d_1' - d_1''} \prod_{(i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} \mathcal{F}(U_{ij})$$

von (unterliegenden) abelschen Gruppen exakt ist. Die Injektivität von d_0 entspricht genau der oben erwähnten *Eindeutigkeit*. Es ist in jedem Fall $\mathrm{Im}(d_0) \subseteq \mathrm{Ker}(d_1)$, denn aus der Definition einer Prägarbe folgt, dass für die Inklusionen $U_{ij} \subseteq U_i \subseteq U$ und $U_{ij} \subseteq U_j \subseteq U$ in X offener Mengen das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & F(U_i) \arrow[dr, "\rho^{U_i}_{U_{ij}}"] & \\ F(U) \arrow[ur, "\rho^U_{U_i}"] \arrow[rr, "\rho^U_{U_{ij}}"] \arrow[dr, "\rho^U_{U_j}"'] & & F(U_{ij}) \\ & F(U_j) \arrow[ur, "\rho^{U_j}_{U_{ij}}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die andere Inklusion $\mathrm{Ker}(d_1) \subseteq \mathrm{Im}(d_0)$ entspricht genau dem oben erwähnten *Verkleben von lokalen Schnitten.*

Bemerkung 7.8. Betrachtet man Punkt (2) in der Definition 7.6 einer Garbe, so gilt

$$\begin{aligned} & \{(s_i)_i \in \textstyle\prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid d_1'((s_i)_i) = d_1''((s_i)_i)\} \\ = \quad & \{(s_i)_i \in \textstyle\prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid \forall (i,j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} : s_{i|U_{ij}} = s_{j|U_{ij}}\} \\ = \quad & \{(s_i)_i \in \textstyle\prod_i \mathcal{F}(U_i) \mid \forall \{i,j\} \subseteq \mathcal{I} : s_{i|U_{ij}} = s_{j|U_{ij}}\} \end{aligned}$$

da die Bedingung $s_{i|U_{ii}} = s_{i|U_{ii}}$ stets erfüllt ist und außerdem $s_{i|U_{ij}} = s_{j|U_{ij}}$ gilt genau dann, wenn $s_{j|U_{ji}} = s_{i|U_{ji}}$ gilt. Also können wir in der Garbenbedingung aus der rechten Seite gleiche Indizes (i,i) und Permutationen weglassen und schreiben für das obige Equalizer Diagramm nur

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \underset{d_1''}{\overset{d_1'}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_{ij}).$$

Man kann allerdings auch allgemeinere Prägarben untersuchen und anstatt Funktoren $\mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$, Funktoren $\mathcal{T}^{op} \to \mathcal{S}$ von einem sogenannten Situs $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{S}$ betrachten. Hier verallgemeinert man $U_i \cap U_j$ zu $U_i \times_X U_j$ und es kann passieren, dass die beiden Projektionen $U_i \times_X U_i \rightrightarrows U_i$ verschieden sind. In diesem Fall ist die Schreibweise $s_{i|U_{ii}}$ doppeldeutig und wir müssen in der zugehörigen Garbenbedingung sehr wohl die Indizes (i,i) berücksichtigen.

Beispiel 7.9.

(0) Ist $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ eine Garbe, so gilt immer $\mathcal{F}(\emptyset) \cong *$, wobei $*$ das terminale Objekt der Kategorie $\mathcal{S}$ bezeichne (also die einpunktige Menge im Fall $\mathcal{S} = \mathbf{Set}$, die Nullgruppe im Fall $\mathcal{S} = \mathbf{Ab}$ und den Nullring im Fall $\mathcal{S} = \mathbf{Ring}$). Um dieses zu sehen, schauen wir uns die Garbenbedingung für $U = \emptyset$ an. Es ist die leere Überdeckung $\{\}$ mit Indexmenge $\mathcal{I} = \emptyset$ eine Überdeckung der leeren Menge U (Diese Überdeckung ist nicht zu verwechseln mit der Überdeckung $\{\emptyset \hookrightarrow \emptyset\}$ der leeren Menge). Außerdem ist das Produkt $\prod_\emptyset$ über eine leere Menge das terminale Objekt $*$ von $\mathcal{S}$. Mit der Garbenbedingung sieht man nun $\mathcal{F}(\emptyset) \cong *$.

(1) Ist $A \in \mathcal{S}$ ein Objekt so ist die zugehörige konstante Prägarbe cA nicht unbedingt eine Garbe. Zum einen erfüllt diese (außer im Fall $A = *$) nicht $cA(\emptyset) \cong *$, was nach dem vorherigen Beispiel für eine Garbe aber erfüllt sein muss. Ist zum anderen $X = U \sqcup V$ eine disjunkte Zerlegung von X in offene Teilmengen, so liefert die Garbenbedingung für die offene Überdeckung $\{U \hookrightarrow X, V \hookrightarrow X\}$ und für eine Prägarbe $\mathcal{F}$
$$\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(V).$$
Dies ist insbesondere nicht erfüllt für die konstante Prägarbe $cA \neq *$.

(2) Ist $V \in \mathrm{Ouv}(X)$, so ist die durch V dargestellte Prägarbe yV auf X eine Garbe.

(3) Es wuerde schon begründet, dass die Prägarbe $\mathcal{C}(-,\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf X eine Garbe ist.

Eine Garbe ermöglicht einem also, kompatible lokale Informationen (eindeutig) zu einer globalen Information zusammenzukleben.

Ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe und sind $x \in U \subseteq V$ zwei ineinander enthaltene offene Umgebungen eines Punktes $x \in X$, so bekommen wir also eine Abbildung $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$. Wir würden gerne $\mathcal{F}$ „maximal lokal um den Punkt x“ auswerten, also soetwas wie das $\mathcal{S}$-Objekt $\mathcal{F}(\{x\})$ betrachten. Dies ist natürlich nicht ohne Weiteres möglich, da $\{x\}$ nicht unbedingt eine offene Teilmenge von X sein muss. Auf die gleiche Weise ist es nicht möglich, alle offenen Teilmengen, die x enthalten zu schneiden und dann in $\mathcal{F}$ einzusetzen, denn dieser Schnitt ist ebenfalls nicht unbedingt eine offene Teilmenge von X. Dieses Problem motiviert die folgende Definition.

Definition 7.10. Sei $x \in X$. Die Zuordnung
$$\begin{array}{rccc} (-)_x\colon & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathcal{S} \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \operatorname*{colim}_{x \in U \in \mathrm{Ouv}(X)^{op}} \mathcal{F}(U) \\ & f & \mapsto & f_x \end{array}$$
ist ein Funktor und heißt der *Halm von $\mathcal{F}$ an x*. Hier ist
$$\operatorname*{colim}_{x \in U \in \mathrm{Ouv}(X)^{op}} \mathcal{F}(U) := \coprod_{\substack{U \in \mathrm{Ouv}(X) \\ x \in U}} \mathcal{F}(U)/_\sim$$
wobei $(s,U) \sim (t,V)$ genau dann, wenn eine in X offene Menge $W \subseteq U \cap V$ um x existiert mit $s_{|W} = t_{|W}$. Die Äquivalenzklasse $[s,U] := [(s,U)] \in \mathcal{F}_x$ heißt der *Keim von s an x* und wird manchmal auch mit s_x bezeichnet. Es ist für den Fall $\mathcal{S} = \mathbf{Ab}$ oder $\mathcal{S} = \mathbf{Ring}$ auch $\mathcal{F}_x \in \mathcal{S}$ durch
$$[s,U][t,V] := [s_{|U\cap V} t_{|U \cap V}, U \cap V].$$
Für einen Morphismus $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben definiert man die $\mathcal{S}$-Abbildung $f_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ durch $s_x = [s,U] \mapsto f_x(s_x) := (f(U)(s))_x = [f(U)(s), U]$. (Dieses ist genau die Abbildung, die von f auf dem Kolimes induziert wird.)

Lemma 7.11. *Sei $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ eine Prägarbe. Die Zuordnung $U \mapsto \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$ mit den Projektionen als Einschränkungen definiert eine Prägarbe $\mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ und die Abbildung*
$$\mathcal{F}(U) \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$
definiert durch $s \mapsto (s_x)_{x \in U}$ ist ein Morphismus von Prägarben und natürlich in $\mathcal{F}$. Außerdem ist diese Abbildung injektiv, falls $\mathcal{F}$ eine Garbe ist. (Ein Schnitt einer Garbe ist also schon festgelegt durch seine Keime.)

Beweis. Es ist klar, dass $\prod_{x\in(-)}\mathcal{F}_x$ eine Prägarbe definiert. Dafür, dass die angegebene Abbildung eine Abbildung von Prägarben ist, sei $U \subseteq V$ eine Inklusion von in X offenen Teilmengen. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{x\in V}\mathcal{F}_x \arrow[d] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r] & \prod_{x\in U}\mathcal{F}_x \end{tikzcd}$$

wobei die linke vertikale Abbildung die Einschränkung ist und die rechte vertikale gegeben durch die Projektion.

Für die Natürlichkeit der beschriebenen Abbildung in $\mathcal{F}$ sei $f\colon \mathcal{F}\to\mathcal{G}$ eine Abbildung zwischen Prägarben auf X. Dann ist für jedes offene $U\subseteq X$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d] \\ \prod_{x\in U}\mathcal{F}_x \arrow[r, "\prod_x f_x"] & \prod_{x\in U}\mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

kommutativ, da Halme Funktoren sind.

Für den Beweis der Injektivität wird nur die Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{F}$ benutzt. Seien $s,t\in\mathcal{F}(U)$ zwei Schnitte, die beide auf $(s_x)_{x\in U}=(t_x)_{x\in U}$ abgebildet werden. Für jedes $x\in U$ gilt also $s_x=[s,U]=[t,U]=t_x$ und nach Definition des Halms gibt es ein offenes $W_x\subseteq U\cap V$ um x mit $s_{|W_x}=t_{|W_x}$. Es ist nun aber $\{W_x\hookrightarrow U\}_{x\in U}$ eine offene Überdeckung von U und die Behauptung folgt aus der Eindeutigkeitseigenschaft von $\mathcal{F}$. □

Lemma 7.12. *Zwei Prägarbenabbildungen $f,f'\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ auf X in eine Garbe $\mathcal{G}$ sind gleich genau dann, wenn sie halmweise gleich sind, also genau dann, wenn für alle $x\in X$ die Abbildungen $f_x,f'_x\colon\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ übereinstimmen.*

Beweis. Es ist klar, dass zwei gleiche Abbildungen $f=f'$ auch halmweise gleich sind.

Nach dem vorherigen Lemma 7.11 ist für jedes offene $U\subseteq X$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, shift left, "f(U)"] \arrow[r, shift right, "f'(U)"'] \arrow[d] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, hook] \\ \prod_{x\in U}\mathcal{F}_x \arrow[r] & \prod_{x\in U}\mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

kommutativ und aus der Injektivität der rechten vertikalen Abbildung folgt $f(U)=f'(U)$, da die untere horizontale Abbildung durch $\prod_x f_x=\prod_x f'_x$ gegeben ist. Also gilt $f=f'$. □

Lemma 7.13. *Eine Abbildung $f\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ zwischen Garben auf X ist ein Isomorphismus genau dann, wenn sie halmweise ein Isomorphismus ist, also genau dann, wenn für alle $x\in X$ die Abbildung $f_x\colon\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Es ist klar, dass ein Isomorphismus f zwischen Garben Isomorphismen f_x auf allen Halmen induziert, da diese jeweils Funktoren sind.

Für die andere Richtung sei $f\colon\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ eine Garbenabbildung die Isomorphismen f_x auf allen Halmen induziert. Es genügt nach Lemma 7.5 und da Isomorphismen in unseren Kategorien $\mathcal{S}$ genau die bijektiven Abbildungen sind, zu zeigen, dass $f(U)\colon\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ bijektiv ist für jede offene Teilmenge $U\subseteq X$.

Die Injektivität von $f(U)$ folgt aus dem nach Lemma 7.11 kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d, hook] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, hook] \\ \prod_{x\in U}\mathcal{F}_x \arrow[r, "\cong"] & \prod_{x\in U}\mathcal{G}_x. \end{tikzcd}$$

Für die Surjektivität sei $s\in\mathcal{G}(U)$. Für ein $x\in U$ ist f_x surjektiv und es gibt also ein $[t,V]\in\mathcal{F}_x$ mit $f_x([t,V])=(f(V)(t))_x=s_x\in\mathcal{G}_x$. Dies bedeutet, dass es eine offene Umgebung $W_x\subseteq V$ von x gibt mit $s_{|W_x}=f(V)(t)_{|W_x}=f(W_x)(t_{|W_x})$. Nun ist $\{W_x\hookrightarrow U\}_{x\in U}$

eine offene Überdeckung von U und wir möchten die Garbeneienschaft von $\mathcal{F}$ benutzen, um die $t_{|W_x}$ zu einem Element $t \in \mathcal{F}(U)$ mit $s = f(U)(t)$ zu verkleben. Es gilt für $x, y \in U$, dass

$$\begin{aligned}
f(W_x \cap W_y)((t_{|W_x})_{|W_x \cap W_y}) &= f(W_x)(t_{|W_x})_{|W_x \cap W_y} \\
&= (s_{|W_x})_{|W_x \cap W_y} \\
&= s_{|W_x \cap W_y} \\
&= (s_{|W_y})_{|W_x \cap W_y} \\
&= f(W_y)(t_{|W_y})_{|W_x \cap W_y} \\
&= f(W_x \cap W_y)((t_{|W_y})_{|W_x \cap W_y})
\end{aligned}$$

und aus der eben bewiesenen Injektivität folgt $(t_{|W_x})_{|W_x \cap W_y} = (t_{|W_y})_{|W_x \cap W_y}$. Also gibt es mit der Garbenbedingung für $\mathcal{F}$ ein $t \in \mathcal{F}(U)$, das zu den obigen $t_{|W_x}$ einschränkt. Ausserdem impliziert die Injektivität von d_0 mit $s_{|W_x} = f(W_x)(t_{|W_x})$, dass $s = f(U)(t)$. □

Bemerkung 7.14. Der Beweis des vorherigen Lemmas 7.13 zeigt auch, dass f schnittweise injektiv ist genau dann, wenn es halmweise (also auf allen Halmen) injektiv ist. Das einzige dafür zusätzlich erforderliche Argument ist, dass eine schnittweise injektive Abbildung von Prägarben auch halmweise injektiv ist. Die Analogie von Lemma 7.13 ist aber falsch für die Surjektivität. Ein schnittweise surjektives f ist auch halmweise surjektiv, aber die Umkehrung ist nicht unbedingt richtig.

Wir wollen nun eine Prägarbe „bestmöglich“ zu einer Garbe machen. Dafür möchten wir identifizieren, wie das Bild der Injektion

$$\mathcal{F}(U) \hookrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

aus Lemma 7.11 für eine Garbe genau aussieht.

Lemma 7.15. *Sei $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ eine Prägarbe und betrachte für ein offenes $U \subseteq X$ das $\mathcal{S}$-Objekt*

$$a\mathcal{F}(U) := \{\ (s_x)_{x \in U} \in \textstyle\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \ \mid\ (s_x)_{x \in U} \text{ ist ausdehnbar } \} \ \hookrightarrow \displaystyle\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

wobei eine Familie $(s_x)_{x \in U}$ von Keimen ausdehnbar *heißt, wenn gilt:*

> *Für alle $x \in U$ existiert eine offene Umgebung $W \subseteq U$ und ein Schnitt $c \in \mathcal{F}(W)$, sodass für alle $y \in W$ gilt $c_y = s_y$.*

Dann ist $a\mathcal{F}$ mit den Projektionen als Einschränkungen eine Garbe.

Beweis. Es ist $a\mathcal{F}(U)$ mit der halmweisen Addition bzw. Multiplikation ein $\mathcal{S}$-Objekt. Es ist leicht zu sehen, dass $a\mathcal{F}$ eine Prägarbe $a\mathcal{F}\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ definiert.

Für die Garbenbedingung sei $U \subseteq X$ offen und $\{U_i \hookrightarrow U\}$ eine offene Überdeckung.

Für die Eindeutigkeitseigenschaft betrachten wir die Komposition,

$$a\mathcal{F}(U) \to \prod_i a\mathcal{F}(U_i) \hookrightarrow \prod_i \prod_{x \in U_i} \mathcal{F}_x = \prod_{x \in \sqcup_i U_i} \mathcal{F}_x \twoheadrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x,$$

(wobei wir für die letzte Abbildung für jedes $x \in U$ ein i wählen mit $x \in U_i$ und dann die Projektion $\mathrm{pr}_{U_i}\colon \prod_{x \in \sqcup_i U_i} \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ betrachten) die per Definition injektiv ist. Also ist auch insbesondere die erste Abbildung injektiv.

Seien nun für jedes i ausdehnbare Familien von Keimen $(s_{i,x})_{x \in U_i}$ gegeben, die kompatibel mit den Einschränkungen sind, also für die gilt $(s_{i,x})_{x \in U_i \cap U_j} = (s_{j,x})_{x \in U_i \cap U_j}$ für alle Indizes i und j. Wir definieren $(s_x)_{x \in U}$ durch $s_x := s_{i,x}$ falls $x \in U_i$. Dieses ist durch die gerade beschriebene Kompatibilität wohldefiniert. Es bleibt zu zeigen, dass die Familie von Keimen $(s_x)_{x \in U}$ auch wieder ausdehnbar ist. Sei dafür $x \in U$. Dann liegt x in einem U_i und da $(s_{i,x})_{x \in U_i}$ ausdehnbar ist, gibt eine offene Umgebung $W_x \subseteq U_i \subseteq U$ und ein $c \in \mathcal{F}(W_x)$, sodass für alle $y \in W_x$ gilt $c_y = s_{i,y} = s_y$. Damit ist $a\mathcal{F}$ eine Garbe. □

Bemerkung 7.16. Sei $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ eine Prägarbe und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Nach Definition des kartesischen Produkts gilt

$$\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x := \{\ f\colon U \to \bigsqcup_{x \in U} \mathcal{F}_x \ \mid\ \text{Für alle } x \in U \text{ gilt } f(x) \in \mathcal{F}_x\ \}$$

und für $U \subseteq V$ entspricht der Projektion $\prod_{x\in V} \mathcal{F}_x \twoheadrightarrow \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$ genau die Abbildung, die ein Element $V \to \sqcup_{x\in V}\mathcal{F}_x$ auf die Präkomposition $U \hookrightarrow V \to \sqcup_{x\in V}\mathcal{F}_x$, welche wiederum über über die Inklusion $\sqcup_{x\in U}\mathcal{F}_x \hookrightarrow \sqcup_{x\in V}\mathcal{F}_x$ faktorisiert, schickt. Man findet manchmal in der Literatur die Beschreibnung der Garbifizierung durch diese alternative Beschreibung.

Satz 7.17. *Es ist die Zuordnung* $a\colon \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \to \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X)$ *aus dem vorherigen Lemma 7.15 ein Funktor und heißt* Garbifizierung. *Ist* $f\colon \mathcal{F} \to i(\mathcal{G})$ *eine Prägarbenabbildung von einer Prägarbe* $\mathcal{F}$ *in eine Garbe* $\mathcal{G}$*, so faktorisiert diese eindeutig über die Garbifizierung, es gibt also eine natürliche Transformation* $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{PSh}} \to ia$ *und ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\eta(\mathcal{F})"'] & i(\mathcal{G}) \\ & ia(\mathcal{F}). \arrow[u, dashed, "\exists!"'] \end{tikzcd}$$

Es ist außerdem $\eta(\mathcal{F})$ *ein Isomorphismus auf allen Halmen.*

Beweis. Wir haben uns schon in Lemma 7.11 davon überzeugt, dass die Zurordnung

$$\begin{aligned} \eta(F)(U)\colon \quad \mathcal{F}(U) &\to \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \\ s &\mapsto (s_x)_{x\in U} \end{aligned}$$

natürlich in $U \in \mathrm{Ouv}(X)$ und $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X)$ ist. Wir zeigen nun, dass sie auch über $ia\mathcal{F}(U)$ faktorisiert und erhalten somit eine natürliche Transformation $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{PSh}} \to ia$. Für die Existenz dieser Faktorisierung müssen wir zeigen, dass für einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ die Familie $(s_x)_{x\in U}$ von Keimen ausdehnbar ist, was aber (mit $W_x = U$) unmittelbar klar ist.

Wir zeigen nun, dass für alle Prägarben $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X)$ und $x \in X$ die $\mathcal{S}$-Abbildung $\eta(\mathcal{F})_x\colon \mathcal{F}_x \to (ia\mathcal{F})_x$ ein Isomorphismus ist.

Für die Injektivität seien $[s, U], [t, V] \in \mathcal{F}_x$ mit $\eta(\mathcal{F})_x([s, U]) = \eta(\mathcal{F})_x([t, V])$. Wir können $U = V$ annehmen, da $[s, U] = [s, U \cap V]$ und $[t, V] = [t, U \cap V]$. Es gilt

$$[\eta(\mathcal{F})(U)(s), U] =: \eta(\mathcal{F})_x([s, U]) = \eta(\mathcal{F})_x([t, U]) := [\eta(\mathcal{F})(U)(t), U]$$

und daher gibt es eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von x mit

$$\eta(\mathcal{F})(W)(s_{|W}) = \eta(\mathcal{F})(U)(s)_{|W} = \eta(\mathcal{F})(U)(t)_{|W} = \eta(\mathcal{F})(W)(t_{|W}).$$

Es gilt also $s_y = t_y$ für alle $y \in W$, Da $x \in W$ folgt, dass $[s, U] = s_x = t_x = [t, U]$.

Für die Surjektivität sei $[(s_x)_{x\in U}, U] \in (ia\mathcal{F})_x$. Es gibt also eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von x und ein Schnitt $c \in \mathcal{F}(W)$, sodass für alle $y \in W$ gilt $c_y = s_y$. Wir haben also

$$[(s_x)_{x\in U}, U] = [(s_x)_{x\in W}, W] = [(c_x)_{x\in W}, W] = [\eta(\mathcal{F})(W)(c), W] =: \eta(\mathcal{F})_x(c_x)$$

und damit ist $\eta(\mathcal{F})_x$ surjektiv.

Ist nun $f\colon \mathcal{F} \to i(\mathcal{G})$ eine Prägarbenabbildung, so liefert die Anwendung von η ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta(\mathcal{F})"'] & i(\mathcal{G}) \arrow[d, "\eta(i(\mathcal{G}))"] \\ ia\mathcal{F} \arrow[r, "\eta(f)"] & iai(\mathcal{G}) \end{tikzcd}$$

dessen vertikale Morphismen nach dem bereits Gezeigtem Isomorphismen auf allen Halmen sind. Daher folgt mit Lemma Lemma 7.13, dass der rechte vertikale Morphismus ein Isomorphismus ist und die Existenz der gewünschten Faktorisierung ist gezeigt.

Für deren Eindeutigkeit, seien h und h' Morphismen, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\eta(\mathcal{F})"'] & i(\mathcal{G}) \\ & ia(\mathcal{F}). \arrow[u, shift left, "h"] \arrow[u, shift right, "h'"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ machen. Wir haben schon gezeigt, dass $\eta(F)$ halmweise ein Isomorphismus ist. Daher sind h und h' halmweise gleich und als Morphismen zwischen Garben gleich nach Lemma 7.12. □

Bemerkung 7.18. Sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien sowie $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ Funktoren, so heisst (F, G) ein *adjungiertes Paar* oder F *linksadjungiert* zu G oder G *rechtsadjungiert* zu F, oder in Symbolen

$$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$$

falls es eine in $c \in \mathcal{C}$ und $d \in \mathcal{D}$ natürliche Bijektion

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \xrightarrow[\varphi]{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d))$$

gibt. Es folgt, dass es eine natürliche Transformation

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$$

gibt, die *Einheit* der Adjunktion, sodass für alle Morphismen $f\colon c \to G(d)$ in $\mathcal{C}$ ein eindeutiger Morphismus $g\colon F(c) \to d$ in $\mathcal{D}$ existiert, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\eta(c)"'] & G(d) \\ & GF(c) \arrow[u, dashed, "G(g)"'] \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Diese Einheit ist definiert durch $\eta(c) := \varphi(\mathrm{id}_{F(c)})$. Umgekehrt liefert eine natürliche Transformation η mit der obigen Eigenschaft eine natürliche Bijektion φ durch $\varphi(g\colon F(c) \to Y) := G(g)\eta(c)$. Der vorherige Satz 7.17 zeigt also mit anderen Worten, dass es eine Adjunktion

$$a : \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \rightleftarrows \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) : i$$

gibt.

Definition 7.19. Sei $A \in \mathcal{S}$ ein Objekt. Die zugehörige *konstante Garbe*

$$acA\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$$

auf X ist die Garbifizierung der konstanten Prägarbe cA aus Beispiel 7.4.(1).

Lemma 7.20. *Für ein Objekt $A \in \mathcal{S}$ ist die konstante Garbe acA gegeben durch*

$$acA(U) \cong \{g\colon U \to A \mid g \text{ ist stetig und } A \text{ trägt die diskrete Topologie}\}$$

für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit den offensichtlichen Einschränkungsabbildungen. Es gilt also insbesondere $acA(U) \cong A$, falls U nichtleer und zusammenhängend ist.

Beweis. Zunächst ist klar, dass für ein zusammenhängendes U die zweite Beschreibung aus der ersten folgt, denn in diesem Fall sind für $U \neq \emptyset$ die stetigen Abbildungen $g\colon U \to A$ konstant und entsprechen also genau einem Element aus A.

Für die erste Beschreibung, sei die rechte Seite der zu zeigenden Isomorphie kurzfristig mit $cA'(U)$ bezeichnet. Es ist klar, dass cA' eine Garbe ist. Wir benutzen nun die universelle Eigenschaft der Garbifizierung aus Satz 7.17 und betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} cA \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & cA' \\ & acA, \arrow[u, dashed, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

wobei die Abbildung f von Prägarben dadurch definiert ist, dass $f(U)$ ein Element a aus $A = cA(U)$ auf die konstante Funktion $g\colon U \to A$ mit Wert a schickt. Da die diagonale Abbildung in dem obigen Diagramm ein Isomorphismus auf Halmen ist und es nach Lemma 7.13 ausreicht zu zeigen, dass φ ein Isomorphismus auf Halmen ist, genügt es schließlich also zu zeigen, dass f ein Isomorphismus auf Halmen ist. Es ist klar, dass f injektiv auf Halmen ist, da jedes $f(U)$ injektiv ist. Die Halme von cA sind natürlich jeweils A und für die Surjektivität von einem f_x genügt es also zu zeigen, dass für jeden Keim $[g\colon U \to A, U] \in cA'_x$ die stetige Abbildung g nach genügender Verkleinerung von U um x konstant wird. Ist aber $a = g(x)$ das Bild von x, so ist $\{a\} \subseteq A$ offen und dessen Urbild $W \subseteq U$ also eine offene Menge von der gewünschten Form. $\square$

8. Die Strukturgarbe auf dem Spektrum eines Rings

Sei A ein Ring. Wir wollen nun eine Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Ring}$ auf dem topologischen Raum $X := \mathrm{Spec}(A)$ definieren. Dafür definieren wir zunächst eine Prägarbe $\mathcal{O}_X^{pre}\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Ring}$ und schließlich $\mathcal{O}_X$ als deren Garbifizierung.

Definition 8.1. Betrachte für eine offene Menge $U \subseteq X$ die multiplikative Teilmenge

$$S_U := A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p}\in U} \mathfrak{p}$$

von A. Dann ist die Zuordnung

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{O}_X^{pre}\colon & \mathrm{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Ring} \\ & U & \mapsto & S_U^{-1}A \end{array}$$

eine Prägarbe und heißt die *Strukturprägarbe* von $\mathrm{Spec}(A)$.

Es ist klar, dass S_U aus der vorherigen Definition 8.1 multiplikativ ist, denn seien $x, y \in S_U$ und angenommen $xy \notin S_U$, gibt es also ein $\mathfrak{p} \in U$ mit $xy \in \mathfrak{p}$. Dann aber folgt $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$, was ein Widerspruch ist zu $x, y \in S_U$.

Es ist ebenso klar, dass $\mathcal{O}_X^{pre}$ eine Prägarbe ist, denn ist $U \subseteq V$ eine Inklusion von Teilmengen von X, so ist $S_V \subseteq S_U$ und es gibt also eine kanonische A-Algebrenabbildung $S_V^{-1}A \to S_U^{-1}A$. Hierfür ist es nicht notwendig, dass U und V in X offen sind. Insbesondere gilt für $\mathfrak{p} \in U$ auch die Inklusion $S_U \subseteq S_{\{\mathfrak{p}\}}$ und es gibt eine A-Algebrenabbildung $\mathcal{O}_X^{pre}(V) := S_V^{-1}A \to S_{\{\mathfrak{p}\}}^{-1}A =: A_{\mathfrak{p}}$. Daher gibt es auch eine kanonische A-Algebrenabbildung

$$\begin{array}{rcl} \operatorname*{colim}_{\mathfrak{p}\in U\in \mathrm{Ouv}(X)^{op}} \mathcal{O}_X^{pre}(U) & \to & A_{\mathfrak{p}} \\ [\frac{x}{s}, U] & \mapsto & \frac{x}{s} \end{array} \tag{8.1}$$

Lemma 8.2. *Ist $\mathfrak{p} \in X$, so ist die kanonische A-Algebrenabbildung* (8.1)*, also*

$$\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}^{pre} \xrightarrow{\cong} A_{\mathfrak{p}}$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Zunächst beobachten wir, dass für ein $s \in A$ stets $s \in S_{D(s)}$ gilt, denn wäre das Gegenteil richtig, also wäre $s \in \bigcup_{\mathfrak{q}\in D(s)} \mathfrak{q}$, so gäbe es ein $\mathfrak{q} \in D(s)$ mit $s \in \mathfrak{q}$, aber andererseits $D(s) = \{\mathfrak{q} \mid s \notin \mathfrak{q}\}$, was ein Widerspruch ist.

Für die Surjektivität sei $\frac{x}{s} \in A_{\mathfrak{p}}$, also $x \in A$ und $s \in A \setminus \mathfrak{p}$. Dann $s \notin \mathfrak{p}$, also gilt $\mathfrak{p} \in D(s)$. Außerdem wissen wir schon, dass $s \in S_{D(s)}$. Damit ist $[\frac{x}{s}, D(s)]$ ein Element des Halms, das auf $\frac{x}{s} \in A_{\mathfrak{p}}$ abgebildet wird und die Surjektivität ist gezeigt.

Für die Injektivität sei $[\frac{x}{s}, U]$ ein Element des Halms, das auf $0 \in A_{\mathfrak{p}}$ abgebildet wird. Wir können $U = D(f)$ basisoffen annehmen, da $\mathfrak{p}$ in einer basisoffenen Überdeckungsmenge $D(f)$ von U enthalten ist und dafür $[\frac{x}{s}, U] = [\frac{x}{s}, D(f)]$ gilt. Nach Voraussetzung gibt es ein $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $tx = 0$ in A. Es ist $\mathfrak{p} \in D(t)$, da $t \notin \mathfrak{p}$. Also gilt $[\frac{x}{s}, U] = [\frac{x}{s}, D(ft)]$. Da aber $ft \in S_{D(ft)}$ und $ftx = 0$, folgt $\frac{x}{s} = 0$ in $S_{D(ft)}^{-1}A = \mathcal{O}_X^{pre}(D(ft))$ und damit $[\frac{x}{s}, D(ft)] = 0$. Damit ist die Injektivität gezeigt. □

Es ist für ein Element $f \in A$ sicherlich $\{1, f, f^2, \ldots\} \subseteq S_{D(f)}$, denn wäre das Gegenteil richtig und $f^n \in \bigcup_{\mathfrak{p}\in D(f)} \mathfrak{p}$, so gäbe es ein $\mathfrak{p} \in D(f)$ mit $f^n \in \mathfrak{p}$, aber dann folgte auch $f \in \mathfrak{p}$, was ein Widerspruch zu $\mathfrak{p} \in D(f)$ ist. Damit gibt es eine kanonische A-Algebrenabbildung $A[\frac{1}{f}] \to S_{D(f)}^{-1}A = \mathcal{O}_X^{pre}(D(f))$.

Lemma 8.3. *Ist $f \in A$, so ist die kanonische A-Algebrenabbildung*

$$A[\tfrac{1}{f}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X^{pre}(D(f))$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Wir zeigen die Aussage, dass für jedes $s \in S_{D(f)}$ ein $a \in A$ existiert mit $as = f^n$ für ein $n \geq 0$. Dieses bedeutet, dass $\frac{s}{1} \in A[\frac{1}{f}]$ invertierbar ist. Da also alle Elemente aus $S_{D(f)}$ auf Einheiten in $A[\frac{1}{f}]$ geschickt werden, folgt mit der universellen Eigenschaft der Lokalisierung die Behauptung. Angenommen, das Gegenteil der obigen Aussage wäre der Fall. Dann gibt es ein $s \in S_{D(f)}$, sodass $(s) \cap \{1, f, f^2, \ldots\} = \emptyset$. Damit ist das Ideal $(s)[\frac{1}{f}] \subsetneq A[\frac{1}{f}]$ nicht der ganze Ring und nach Satz A.5 in einem Primideal enthalten. Dessen Urbild unter der Lokalisierungsabbildung ist wieder ein Primideal $\mathfrak{q}$ mit $(s) \subseteq \mathfrak{q}$. Es ist aber $f \notin \mathfrak{q}$ nach der Primidealkorrespondenz für Lokalisierungen, also $s \in \mathfrak{q} \in D(f)$, was ein Widerspruch zu $s \in S_{D(f)}$ ist. $\square$

Definition 8.4. Sei $X = \mathrm{Spec}(A)$. Die Garbifizierung

$$\mathcal{O}_X : \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Ring}$$

der Strukturprägarbe $\mathcal{O}_X^{pre}$ aus Definition 8.1 heißt die *Strukturgarbe* von $\mathrm{Spec}(A)$.

Bemerkung 8.5. Mit der Beschreibung der Halme der Strukturprägarbe aus Lemma 8.2 und der konkreten Form der Garbifizierung aus Lemma 7.15, ergibt sich für ein offenes $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$, dass

$$\mathcal{O}_X(U) = \{\ (s_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in U}\ \mid\ (s_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}\in U} \text{ ist ausdehnbar }\} \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p}$$

wobei die Ausdehnbarkeitsbedingung aus Lemma 7.15 nun übersetzbar ist zu:

Für alle $\mathfrak{p} \in U$ existiert eine offene Umgebung $W \subseteq U$ und $a, b \in A$, sodass für alle $\mathfrak{q} \in W$ gilt $b \notin \mathfrak{q}$ und $\frac{a}{b} = s_\mathfrak{q}$ in $A_\mathfrak{q}$.

Im Rest dieses Kapitels möchten wir zeigen, dass die Garbifizierung $\mathcal{O}_X$ von $\mathcal{O}_X^{pre}$ auf basisoffenen Mengen $D(f)$ „nichts ändert", dass also gilt $\mathcal{O}_X(D(f)) \cong \mathcal{O}_X^{pre}(D(f)) \cong A[\frac{1}{f}]$. Hierzu müssen wir den Begriff der Garbe erweitern zum Begriff der $\mathfrak{B}$-Garbe. Diese Erweiterung ist ein erstes Beispiel dafür, wieso es sinnvoll ist, den Begriff der Garbe nicht nur für offene Mengen eines Topologischen Raums sondern allgemeiner für einen sogenannten *Grothendieck Situs* zu definieren.

Für die Definition einer Basis einer Topologie, siehe Bemerkung 4.1.

Definition 8.6. Es sei X ein Topologischer Raum mit einer Topologie $\mathfrak{T}$. Eine Teilmenge $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ mit den Eigenschaften

(1) Endliche Schnitte von Elementen aus $\mathfrak{B}$ sind wieder in $\mathfrak{B}$.
(2) Für jedes offene $U \subseteq X$ und $x \in U$ gibt es ein $U' \in \mathfrak{B}$ mit $U' \subseteq U$ und $x \in U'$.

heißt *schnittstabile Basis* der Topologie $\mathfrak{T}$.

Ist $\mathfrak{B}$ eine schnittstabile Basis von $\mathfrak{T}$, so definiert man genau wie in Definition 7.1 die Kategorie $\mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B})$, diese ist also eine Unterkategorie

$$\phi\colon \mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B}) \hookrightarrow \mathrm{Ouv}(X). \tag{8.2}$$

Eine $\mathfrak{B}$-*Prägarbe* auf X (mit Werten in $\mathcal{S}$) ist ein Funktor

$$\mathcal{F}\colon \mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B})^{op} \to \mathcal{S},$$

genau wie in Definition 7.2 und diese bilden die Kategorie $\mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X, \mathfrak{B})$. Eine $\mathfrak{B}$-Prägarbe heißt eine $\mathfrak{B}$-*Garbe*, wenn sie die zu Definition 7.6 analoge Bedingung erfüllt (also mit U_i und U in $\mathfrak{B}(X)$). Es sei $\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X, \mathfrak{B})$ die Kategorie der $\mathfrak{B}$-Garben mit Werten in $\mathcal{S}$. Der Funktor

$$\begin{array}{rccc} \phi_*\colon & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X, \mathfrak{B}) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(\phi(-)) \end{array}$$

heißt die *Einschränkung* (von einer Prägarbe auf X zu einer $\mathfrak{B}$-Prägarbe). Da eine Prägarbe, welche die Garbeneigenschaft für alle offenen Mengen erfüllt, sie insbesondere auch für die speziellen offenen Mengen in $\mathfrak{B}$ erfüllt, schränkt dieser Funktor ein zu einem Funktor

$$\begin{array}{rccc} \phi_*\colon & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X, \mathfrak{B}) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(\phi(-)) \end{array}$$

der die *Einschränkung* (von einer Garbe auf X zu einer $\mathfrak{B}$-Garbe) genannt und mit dem gleichen Symbol bezeichnet wird.

Satz 8.7. *Sei A ein Ring und $X = \mathrm{Spec}(A)$. Die Einschränkung $\phi_*(\mathcal{O}_X^{pre})$ der Strukturprägarbe ist eine $\mathfrak{B}$-Garbe.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\phi_*(\mathcal{O}_X^{pre})$ die Eindeutigkeitseigenschaft einer $\mathfrak{B}$-Garbe erfüllt. Sei dazu $\{D(f_i) \hookrightarrow D(f)\}$ eine $\mathfrak{B}$-Überdeckung und $\frac{x}{f^n} \in \mathcal{O}_X^{pre}(D(f)) \cong A[\frac{1}{f}]$. Da $D(f)$ nach Lemma 4.9 und Satz 4.11 quasikompakt ist, können wir eine endliche Indexmenge annehmen. Angenommen für alle i gilt

$$\left(\frac{x}{f^n}\right)_{|D(f_i)} = \frac{xf_i^n}{f^n f_i^n} = 0.$$

Mit anderen Worten gibt es für alle i ein $n_i \geq 0$ mit $xf_i^{n_i} = 0$ in A. Wir können annehmen, dass $n_i > 0$ für alle i, da sonst $x = 0$ in A gilt und wir fertig sind. Da

$$\mathrm{Spec}(A) \setminus \mathcal{V}(f) = D(f) = \bigcup_i D(f_i) = \bigcup_i D(f_i^{n_i}) = \mathrm{Spec}(A) \setminus \mathcal{V}(\textstyle\sum_i (f_i^{n_i}))$$

folgt $\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}(\sum_i (f_i^{n_i}))$ und nach der Ideale-Teilmengen Korrespondenz 5.2 gilt

$$f \in \sqrt{(f)} = \mathcal{IV}(f) = \mathcal{IV}(\textstyle\sum_i (f_i^n)) = \sqrt{\sum_i (f_i^{n_i})}.$$

Also gibt es ein $r > 0$ mit $f^r = \sum_i a_i f_i^{n_i}$. Dann folgt aber $xf^r = \sum_i a_i x f_i^{n_i} = 0$ und damit ist $\frac{x}{f^n} = 0$ in $A[\frac{1}{f}]$.

Für die Verklebeeigenschaft sei $\{D(f_i) \hookrightarrow D(f)\}$ eine $\mathfrak{B}$-Überdeckung, die wir wegen der Quasikompaktheit von $D(f)$ wieder als endlich annehmen können, und für alle i ein Schnitt $\frac{x_i}{f_i^{n_i}} \in A[\frac{1}{f_i}]$ gegeben, sodass für alle Paare (i,j) gilt

$$\left(\frac{x_i}{f_i^{n_i}}\right)_{|D(f_i f_j)} = \left(\frac{x_j}{f_j^{n_j}}\right)_{|D(f_i f_j)}$$

gegeben. Dies bedeutet, dass es für alle i und j ein $m_{ij} \geq 0$ gibt mit

$$(f_i f_j)^{m_{ij}}(x_i f_j^{n_j} - f_i^{n_i} x_j) = 0.$$

Wieder können wir annehmen, dass alle $m_{ij} > 0$ sind. Sei m eine natürliche Zahl, die größer ist als alle m_{ij}. Wie im Eindeutigkeitsteil des Beweises finden wir ein $r > 0$ mit $f^r = \sum_i a_i f_i^{n_i+m}$. Wir setzen $x := \sum_i a_i f_i^m x_i$ und behaupten, dass der Schnitt $\frac{x}{f^r} \in A[\frac{1}{f}]$ auf alle gegebenen Schnitte einschränkt, dass also für alle j

$$\left(\frac{x}{f^r}\right)_{|D(f_j)} = \frac{x_j}{f_j^{n_j}}$$

gilt. Dafür berechnen wir

$$\begin{aligned} f_j^m(xf_j^{n_j} - f^r x_j) &= f_j^m\left(\left(\textstyle\sum_i a_i f_i^m x_i\right) f_j^{n_j} - \left(\textstyle\sum_i a_i f_i^{n_i+m}\right) x_j\right) \\ &= f_j^m\left(\textstyle\sum_i a_i f_i^m (x_i f_j^{n_j} - f_i^{n_i} x_j)\right) \\ &= \textstyle\sum_i a_i f_i^m f_j^m (x_i f_j^{n_j} - f_i^{n_i} x_j) \\ &= 0, \end{aligned}$$

womit wir die Behauptung gezeigt haben. □

Korollar 8.8. *Ist $f \in A$, so ist die kanonische Ringabbildung*

$$A[\tfrac{1}{f}] \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X^{pre}(D(f)) \cong \mathcal{O}_X(D(f))$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Es sind die basisoffenen Mengen $D(f)$ eine schnittstabile Basis $\mathfrak{B}$ der Zariskitopologie auf $X = \mathrm{Spec}(A)$. Wir wenden $\phi_*\colon \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \to \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X, \mathfrak{B})$ auf die Garbifizierungsabbildung $\mathcal{O}_X^{pre} \to \mathcal{O}_X$ an. Diese Abbildung

$$\phi_*(\mathcal{O}_X^{pre}) \to \phi_*(\mathcal{O}_X)$$

nach dem vorherigen Satz 8.7 eine Abbildung zwischen $\mathfrak{B}$-Garben und ein Isomorphismus auf Halmen, da dies für die Garbifizierungsabbildung nach Satz 7.17 gilt und also auch nach der Anwendung von ϕ_*, da man bei der Ausrechnung der Halme immer auch die basisoffenen Mengen in $\mathfrak{B}$ benutzen kann. Genauso wie in Lemma 7.13 zeigt man für $\mathfrak{B}$-Garben, dass eine Abbildung die ein Isomorphismus auf allen Halmen ist auch ein Isomorphismus von $\mathfrak{B}$-(Prä)Garben ist. Dann folgt die Behauptung mit Lemma 8.3. □

Korollar 8.9. *Es gilt* $\mathcal{O}_X(\mathrm{Spec}(A)) \cong A$.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem vorherigen Korollar 8.8, da $\mathrm{Spec}(A) = D(1)$ eine basisoffene Menge ist. $\square$

Beispiel 8.10. Sei k ein Körper und $A := k[Y, Z]$. Betrachte die offene Menge

$$U := \mathrm{Spec}(A) \setminus \{(X, Y)\} \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A).$$

Wir möchten $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ ausrechnen. Es ist $U = D(X) \cup D(Y)$ und $D(X) \cap D(Y) = D(XY)$. Die Garbenbedingung liefert

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) &\cong \{(f, g) \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(X)) \times \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(Y)) \mid \tfrac{f}{1} = \tfrac{g}{1} \in k[X, Y, \tfrac{1}{XY}\} \\
&\cong \{(f, g) \in k[X, Y][\tfrac{1}{X}] \times k[X, Y][\tfrac{1}{Y}] \mid \tfrac{f}{1} = \tfrac{g}{1} \in k[X, Y, \tfrac{1}{X}, \tfrac{1}{Y}]\} \\
&\cong \{(\tfrac{f'}{X^n}, \tfrac{g'}{Y^m}) \in ... \mid f' \in k[X, Y] \text{ coprm. to } X, g' \in k[X, Y] \text{ coprm. to } Y \\
&\qquad \tfrac{f'}{X^n} = \tfrac{g'}{Y^m} \in k[X, Y, \tfrac{1}{X}, \tfrac{1}{Y}]\} \\
&\cong \{(\tfrac{f'}{X^n}, \tfrac{g'}{Y^m}) \in ... \mid f' \in k[X, Y] \text{ coprm. to } X, g' \in k[X, Y] \text{ coprm. to } Y \\
&\qquad f'Y^m = g'X^n \in k[X, Y, \tfrac{1}{X}, \tfrac{1}{Y}]\} \\
&\cong \{(\tfrac{f'}{1}, \tfrac{g'}{1}) \in ... \mid f' \in k[X, Y] \text{ coprm. to } X, g' \in k[X, Y] \text{ coprm. to } Y \\
&\qquad f' = g' \in k[X, Y, \tfrac{1}{X}, \tfrac{1}{Y}]\}.
\end{aligned}$$

Betrachte nun das kommutative Dreieck

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(A) \arrow[r, "(-)|_U"] \arrow[dr] & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) \arrow[d] \\
 & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(X)) \times \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(Y))
\end{tikzcd}$$

wobei die diagonale Abbildung injektiv ist, da X und Y keine Nullteiler in A sind und wir die Identifikation aus Korollar 8.8 benutzen. Es ist also die Einschränkungsabbildung $(-)|_U$ injektiv. Sie ist aber auch nach der obigen Berechnung surjektiv und daher ein Isomorphismus. Es folgt $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) \cong A$.

Wir notieren noch den folgenden Satz, der auch eine alternative Konstruktion der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ auf $X = \mathrm{Spec}(A)$ ermöglicht.

Satz 8.11. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{B}$ eine schnittstabile Basis. Für eine $\mathfrak{B}$-Garbe $\mathcal{F}'$ gibt es eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Garbe $\mathcal{F}$ auf X, dessen Einschränkung zu einer $\mathfrak{B}$-Garbe wieder $\mathcal{F}'$ ist, also $\phi_*(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}'$. Mit anderen Worten ist ϕ_* eine Äquivalenz von Kategorien (siehe Bemerkung 6.11).*

Beweis. Zur besseren Übersicht betrachte man das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B})^{op} \arrow[r, hook, "\phi"] \arrow[d, "\mathcal{F}'"] & \mathrm{Ouv}(X)^{op} \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\
\mathcal{S} \arrow[r, equal] & \mathcal{S}.
\end{tikzcd}$$

Wir definieren zunächst eine Prägarbe $\mathcal{F}^{pre}$ auf X mit $\phi_*(\mathcal{F}^{pre}) = \mathcal{F}'$. Dafür imitieren wir die Konstruktion des Halms für eine offene Menge $U \subseteq X$ (anstatt für die Menge $\{x\}$ im Falls des Halms) und setzen

$$\mathcal{F}^{pre}(U) := \underset{U \subseteq U' \in \mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B})^{op}}{\mathrm{colim}} \mathcal{F}'(U') := \bigsqcup_{\substack{U' \in \mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B}) \\ U \subseteq U'}} \mathcal{F}'(U')/\sim,$$

wobei $(s', U') \sim (t', V')$ genau dann, wenn ein $W' \in \mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ mit $W' \subseteq U' \cap V'$ um U existiert mit $s'_{|W'} = t'_{|W'}$. Man bemerke, dass $\mathcal{F}^{pre}(U)$ das initiale Objekt von $\mathcal{S}$ ist (also $\emptyset$ im Fall der Mengen, $\{0\}$ im Fall der abelschen Gruppen und $\mathbb{Z}$ im Fall der Ringe), wenn U in keinem $U' \in \mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ enthalten ist. Es wird $\mathcal{F}^{pre}$ zu einer Prägarbe auf X durch die Einschränkungsabbildungen

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{pre}(V) &\to \mathcal{F}^{pre}(U) \\
[s', U'] &\mapsto [s', U']
\end{aligned}$$

für in X offene Teilmengen $U \subseteq V$. Dafür muss man beobachten, dass wenn $V \subseteq U'$ gilt auch folgt, dass $U \subseteq U'$ und $\mathcal{F}^{pre}(U)$ in diesem Fall nicht das initiale Objekt von $\mathcal{S}$ sein kann. Ist $\mathcal{F}^{pre}(V)$ das initiale Objekt von $\mathcal{S}$ so gibt es sowieso nur einen Morphismus in jedes andere $\mathcal{S}$ Objekt.

Nun bemerken wir, dass $\mathcal{F}' \cong \phi_*(\mathcal{F}^{pre})$. Es gibt sicherlich für $U' \in \mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ eine natürliche Abbildung $\mathcal{F}'(U') \to \mathcal{F}^{pre}(U')$ und diese ist auch ein Isomorphismus, da man $W' = U'$ wählen kann (Mit anderen Worten hat die Indexkategorie des Kolimes das terminales Objekt U').

Wir definieren nun $\mathcal{F} := a\mathcal{F}^{pre}$ als die Garbifizierung. Um zu zeigen, dass $\mathcal{F}' \cong \phi_*(\mathcal{F})$ genügt zu zeigen, dass $\phi_*(\mathcal{F}^{pre}) \cong \phi_*(\mathcal{F})$. Sei dafür $U' \in \mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ und wir betrachten die Abbildung $\mathcal{F}^{pre}(U') \to \mathcal{F}(U')$. Für die Injektivität seien $s, t \in \mathcal{F}^{pre}(U')$ zwei Schnitte, die auf das gleiche Element in der Garbifizierung $\mathcal{F}(U')$ abgebildet werden. Es gibt also eine Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow U'\}$ mit $s_{|U_i} = t_{|U_i}$ für alle i. Da $\mathfrak{B}$ eine Basis der Topologie auf X ist, können wir diese Überdeckung zu einer Überdeckung $\{U_i' \hookrightarrow U'\}$ mit $U_i' \in \mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ verfeinern. Nun benutzen wir die Eindeutigkeitseigenschaft der Garbenbedingung von $\mathcal{F}'$ (denn $\mathcal{F}' \cong \phi_*(\mathcal{F}^{pre})$) und erhalten $s = t$.

Für die Surjektivität von $\mathcal{F}'(U') \cong \mathcal{F}^{pre}(U') \to \mathcal{F}(U') = a\mathcal{F}^{pre}(U')$ benutzen wir die Definition der Garbifizierung aus Lemma 7.15. Sei also $(s_x)_{x \in U'}$ ein Element von $a\mathcal{F}^{pre}(U')$, also eine Familie ausdehnbarer Keime. Da wieder $\mathfrak{B}$ eine Basis der Topologie auf X ist, können wir die offenen Mengen W in der Definition der Ausdehnbarkeit aus $\mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ wählen und der Konsistenz halber mit W' bezeichnen. Es gibt also für jedes $x \in U'$ ein W_x' und einen Schnitt $c' \in \mathcal{F}'(W_x')$ mit Keimen $c_z' = s_z$ für alle $z \in W_x'$. Ist $d' \in \mathcal{F}'(W_y')$ mit $d_z' = s_z$ für alle $z \in W_y$, so stimmen c' und d' auf dem Schnitt $W_x' \cap W_y'$ überein (siehe den Beweis der Injektivität in Lemma 7.11) und da $\mathcal{F}'$ eine $\mathfrak{B}$-Garbe ist, verkleben alle diese zu einem Schnitt $s \in \mathcal{F}'(U')$ mit dem gewünschten Bild.

Für die Eindeutigkeit sei $\mathcal{G}$ eine weitere Garbe auf X mit $\varphi \colon \mathcal{F}' \cong \phi_*(\mathcal{G})$. Wir definieren eine Abbildung von Prägarben auf X durch

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^{pre}(U) & \to & \mathcal{G}(U) \\ [s', U'] & \mapsto & \varphi(U')(s')_{|U} \end{array}$$

wobei wieder zu beachten ist, dass $\mathcal{F}^{pre}(U)$ manchmal das initiale Objekt von $\mathcal{S}$ sein kann. Diese induziert durch die universelle Eigenschaft eine Abbildung $\mathcal{F} = a\mathcal{F}^{pre} \to \mathcal{G}$ von Garben auf X, von der wir nach Lemma 7.13 nur zeigen müssen, dass sie ein Isomorphismus auf Halmen ist. Dies ist aber klar, da die Einschränkungen beider Seiten auf $\mathrm{Ouv}(X, \mathfrak{B})$ isomorph sind und man für die Ausrechnung der Halme beliebig kleine Umgebungen (also auch aus $\mathfrak{B}$) wählen kann.

Es ist eine leichte Übung zu zeigen, dass der Funktor ϕ_* voll und treu ist und somit eine Äquivalenz von Kategorien. $\square$

9. Lokalgeringte Räume

Anstatt wie in den ersten Kapiteln nur den topologischen Raum $\mathrm{Spec}(A)$ als das zu einem Ring A zugehörige „geometrische Objekt“ zu betrachten, möchten wir nun das Paar $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ bestehend aus dem topologischen Raum und der Strukturgarbe (siehe Definition 8.4) darauf studieren.

Definition 9.1. Sei A ein Ring. Das Paar $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$ heißt das zu A gehörige *affine Schema*.

Wir haben in Korollar 8.9 gesehen, dass man aus dem zu A gehörigen affinen Schema, den Ring A vollständig rekonstruieren kann. Dies ist verschieden zu der Situation in den vorherigen Kapiteln, denn beispielsweise gilt $\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_2) \cong * \cong \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_3)$ als topologische Räume aber es sind die Ringe $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{F}_3$ offensichtlich nicht isomorph.

In Satz 6.18 haben wir gesehen, dass wenn k ein algebraisch abgeschlossener Körper ist und $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring, die Radikalideale von A den in k^n eingebetteten Varietäten entsprechen. Doch selbst unter Berücksichtigung der Einbettung, können wir eine entsprechende Aussage für allgemeine Ringe k durch die Ideale Varietäten Korrespondenz nicht bekommen.

Nun möchten wir definieren, was der geeignete Begriff einer Abbildung

$$\varphi\colon (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$$

zwischen den zu B und A gehörigen affinen Schemata ist. Sicherlich möchten wir, dass eine Ringabbildung $f\colon A \to B$ eine solche Abbildung induziert. Wir haben in Lemma 4.8 gesehen, dass eine solche Ringabbildung eine stetige Abbildung $\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ topologischer Räume induziert. Es liegt nahe, dass die Abbildung φ aus zwei Komponenten bestehen soll von denen die erste genau die stetige Abbildung $\mathrm{Spec}(f)\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ ist. Für die zweite Komponente möchten wir eine Abbildung zwischen den beteiligten Strukturgarben definieren. Diese sind jeweils insbesondere Prägarben und wir haben uns bereits überlegt, was eine Abbildung von Prägarben sein soll - allerdings waren diese Prägarben auf dem gleichen topologischen Raum X definiert, während die beteiligten Strukturgarben Funktoren

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}\colon & \mathrm{Ouv}(\mathrm{Spec}(B))^{op} & \to & \mathbf{Ring} \\ \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}\colon & \mathrm{Ouv}(\mathrm{Spec}(A))^{op} & \to & \mathbf{Ring} \end{array}$$

sind, also unterschiedliche Quellkategorien haben.

Definition 9.2. Sei $F\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume (im obigen Fall ist dieses gerade $F := \mathrm{Spec}(f)$). Es gibt analog zu der Situation in Definition 8.6, einen Funktor

$$\begin{array}{rccc} F^{-1}\colon & \mathrm{Ouv}(Y) & \to & \mathrm{Ouv}(X) \\ & U & \mapsto & F^{-1}(U) \end{array}$$

(im obigen Fall bildet dieser die basisoffene Menge $D(s)$ auf die basisoffene Menge $D(f(s))$ ab, wie man im Beweis von Lemma 4.8 sieht). Dieser induziert, wiederum analog zu der Situation in Definition 8.6, einen Funktor

$$\begin{array}{rccc} F_*^{-1}\colon & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(Y) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(F^{-1}(-)) \end{array}$$

der auch nur mit F_* bezeichnet und das *direkte Bild* oder der *Pushforward* genannt wird.

Lemma 9.3. *Das direkte Bild $F_*\colon \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \to \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(Y)$ bewahrt Garben und definiert also einen Funktor*

$$\begin{array}{rccc} F_*\colon & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(F^{-1}(-)) \end{array}$$

der ebenfalls das direkte Bild *genannt und mit dem gleichen Symbol bezeichnet wird.*

Beweis. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Wir müssen die Garbenbedingung aus Definition 7.6 für die Prägarbe $\mathcal{F}(F^{-1}(-))$ auf Y testen. Sei also $V \subseteq Y$ eine offene Teilmenge und $\{V_i \hookrightarrow V\}$ eine offene Überdeckung. Dann ist aber auch $\{F^{-1}(V_i) \hookrightarrow F^{-1}(V)\}$ eine offene Überdeckung der offene Menge $F^{-1}(V) \subseteq X$ und die Garbenbedingung von $\mathcal{F}$ liefert das Gewünschte. $\square$

Um eine geeignete Kategorie zu definieren, betrachten wir nun anstatt $\mathrm{Spec}(A)$ und $\mathrm{Spec}(B)$ beliebige topologische Räume Y und X, die jeweils mit Garben versehen sind.

Definition 9.4. Ein *geringter Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus einem topologischen Raum X und einer Garbe

$$\mathcal{O}_X\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Ring}$$

von Ringen auf X.

Ein *Morphismus* $(F, F^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen zwei geringten Räumen besteht aus einer stetigen Abbildung $F\colon X \to Y$ und einer Abbildung $F^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to F_*\mathcal{O}_X$ von Garben auf Y. Man bezeichnet einen solchen Morphismus geringter Räume meinst nur mit F, wenn klar ist, was die beteiligte Abbildung auf Garben sein soll.

Die geringten Räume bilden zusammen mit ihren Morphismen eine Kategorie, die mit $\mathbf{RS}$ bezeichnet wird und für deren Komposition $(G, G^\sharp)(F, F^\sharp) = (GF, F^\sharp G^\sharp)$ gilt.

Ist Y ein lokalgeringter Raum, so schreiben wir manchmal $|Y|$ für dessen zugehörigen topologischen Raum.

Beispiel 9.5. Ist A ein Ring, so ist das zugehörige affine Schema $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{Spec(A)})$ aus Definition 9.1 ein geringter Raum.

Beispiel 9.6. Ist X ein topologischer Raum und $\mathcal{C}_X(-,\mathbb{R})$ die Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen darauf, so ist das Paar $(X,\mathcal{C}_X(-,\mathbb{R}))$ ein geringter Raum. Eine stetige Abbildung $F\colon X\to Y$ definiert einen Morphismus $(F,F^\sharp)\colon (X,\mathcal{C}_X(-,\mathbb{R}))\to(Y,\mathcal{C}_Y(-,\mathbb{R}))$ durch

$$\begin{array}{rccl} F^\sharp(V)\colon & \mathcal{C}_Y(V,\mathbb{R}) & \to & F_*\mathcal{C}_X(V,\mathbb{R})=\mathcal{C}_X(F^{-1}(V),\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & F^*f. \end{array}$$

(Oder genauer durch $f\mapsto f(F|_{F^{-1}(V)}(-))$.)

Wir möchten einen Funktor $\mathbf{Ring}^{op}\to\mathbf{RS}$ konstruieren, der einen Ring A auf das zu A gehörige affine Schema, also den geringten Raum $(\operatorname{Spec}(A),\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$, schickt. Dazu müssen wir noch definieren, wie man einer Ringabbildung $f\colon A\to B$ einen Morphismus $(\operatorname{Spec}(B),\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)})\to(\operatorname{Spec}(A),\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})$ geringter Räume zuordnet. Sicherlich ist die erste Komponente F die stetige Abbildung $\operatorname{Spec}(f)$. Die zweite Komponente soll ein Morphismus $F^\sharp\colon\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}\to F_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)}$ von Garben von Ringen sein. Diesen definieren wir, wie bei der Strukturgarbe, wieder als Garbifizierung eines Morphismus von Prägarben, der auf eine offensichtliche Weise gegeben ist.

Lemma 9.7. *Sei $f\colon A\to B$ eine Abbildung von Ringen mit zugehöriger Abbildung topologischer Räume $F\colon\operatorname{Spec}(B)\to\operatorname{Spec}(A)$. Dann ist die Zuordnung*

$$\begin{array}{rccl} F^{\sharp,pre}(U)\colon & \mathcal{O}^{pre}_{\operatorname{Spec}(A)}(U) & \to & F_*\mathcal{O}^{pre}_{\operatorname{Spec}(B)}(U) \\ & \| & & \| \\ & S_U^{-1}A & \to & S^{-1}_{F^{-1}(U)}B \\ & \frac{x}{s} & \mapsto & \frac{f(x)}{f(s)} \end{array}$$

für $U\subseteq\operatorname{Spec}(A)$ offen wohldefiniert und definiert eine Abbildung von Prägarben auf $\operatorname{Spec}(A)$.

Beweis. Um die Wohldefiniertheit zu zeigen sei $s\in A$ mit $f(s)\in\cup_{\mathfrak{q}\in F^{-1}(U)}\mathfrak{q}$. Wir müssen zeigen, dass $s\in\cup_{\mathfrak{p}\in U}\mathfrak{p}$. Sei also $\mathfrak{q}\in F^{-1}(U)$ mit $f(s)\in\mathfrak{q}$. Wir setzen $\mathfrak{p}:=f^{-1}(\mathfrak{q})$. Dies ist als Urbild eines Primideals wieder ein Primideal. Es gilt $s\in\mathfrak{p}=f^{-1}(\mathfrak{q})$, da $f(s)\in\mathfrak{q}$. Außerdem gilt

$$\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(f)^{-1}(U)\ \Leftrightarrow\ \operatorname{Spec}(f)(\mathfrak{q})\in U\ \Leftrightarrow\ \mathfrak{p}=f^{-1}(\mathfrak{q})\in U.$$

Also $s\in\mathfrak{p}\subseteq\cup_{\mathfrak{p}\in U}\mathfrak{p}$. $\square$

Definition 9.8. Für eine Abbildung $f\colon A\to B$ von Ringen mit zugehöriger Abbildung topologischer Räume $F\colon\operatorname{Spec}(B)\to\operatorname{Spec}(A)$ definieren wir

$$F^\sharp\colon\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}=a\mathcal{O}^{pre}_{\operatorname{Spec}(A)}\xrightarrow{aF^{\sharp,pre}}aF_*\mathcal{O}^{pre}_{\operatorname{Spec}(B)}\to F_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)},\tag{9.1}$$

wobei die letzte Abbildung gegeben ist durch die universelle Eigenschaft der Garbifizierung aus Satz 7.17 angewandt auf die Abbildung $F_*\mathcal{O}^{pre}_{\operatorname{Spec}(B)}\to F_*a\mathcal{O}^{pre}_{\operatorname{Spec}(B)}$, dessen Ziel nach Lemma 9.3 eine Garbe ist.

Lemma 9.9. *Der Morphismus $F^\sharp$ von Prägarben auf $\operatorname{Spec}(A)$ ist auf einer basisoffenen Menge $D(s)\subseteq A$ durch*

$$\begin{array}{rccl} F^\sharp(D(s))\colon & (\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)})(D(s)) & \to & (F_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B)})(D(s)) \\ & \| & & \| \\ & A[\frac{1}{s}] & & B[\frac{1}{f(s)}] \\ & \frac{x}{s^n} & \mapsto & \frac{f(x)}{f(s)^n} \end{array}$$

gegeben.

Beweis. Zur Erinnerung ist hier $f\colon A\to B$ und $F\colon X=\operatorname{Spec}(B)\to Y=\operatorname{Spec}(A)$. Es gibt ein kommutatives Diagramm von Funktoren

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ouv}(Y,\mathfrak{B}_Y) \arrow[r, "F_{\mathfrak{B}}^{-1}"] \arrow[d, hook, "\phi_Y"'] & \operatorname{Ouv}(X,\mathfrak{B}_X) \arrow[d, hook, "\phi_X"] \\ \operatorname{Ouv}(Y) \arrow[r, "F^{-1}"] & \operatorname{Ouv}(X) \end{tikzcd}$$

da, der Funktor $F^{-1}(D(s)) = F^{-1}(D(s)) = D(f(s))$. Die vertikalen Funktoren wurden in (8.2) betrachtet. Dieses Diagramm induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbf{PSh}(X) \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "\phi_{X,*}"'] & \mathbf{PSh}(Y) \arrow[d, "\phi_{Y,*}"] \\ \mathbf{PSh}(X, \mathfrak{B}_X) \arrow[r, "F_{\mathfrak{B},*}"] & \mathbf{PSh}(Y, \mathfrak{B}_Y) \end{tikzcd}$$

welches auch auf Garben einschränkt. Um das Gewünschte zu zeigen, wenden wir den Funktor $\phi_{Y,*}$ auf (9.1) an, denn $F^\sharp(D(s)) = (\phi_{Y,*}F^\sharp)(D(s))$. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \phi_{Y,*}\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(A)} \arrow[r, "\phi_{Y,*}F^{\sharp,pre}"] \arrow[d, "\cong"'] & \phi_{Y,*}F_*\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \phi_{Y,*}F_*\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)} \arrow[r, equal] \arrow[d] & F_{\mathfrak{B},*}\phi_{X,*}\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)} \arrow[d, "\cong"] \\ \phi_{Y,*}a\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(A)} \arrow[r] & \phi_{Y,*}aF_*\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)} \arrow[r] & \phi_{Y,*}F_*a\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)} \arrow[r, equal] & F_{\mathfrak{B},*}\phi_{X,*}a\mathcal{O}^{pre}_{\mathrm{Spec}(B)} \end{tikzcd}$$

dessen untere horizontale Abbildung gerade $\phi_{Y,*}F^\sharp$ ist. Mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Korollar 8.8 folgt, dass die beiden äußeren vertikalen Abbildungen Isomorphismen sind und damit ist die Behauptung gezeigt. □

Korollar 9.10. *Es ist $F^\sharp(\mathrm{Spec}(A))$ genau die Abbildung $f\colon A \to B$ von Ringen.*

Beweis. Dies folgt direkt aus dem vorherigen Lemma 9.9 mit $\mathrm{Spec}(A) = D(1)$. □

Definition 9.11. Die Zuordnung

$$\begin{array}{llcll} \mathrm{Spec}\colon & \mathbf{Ring}^{op} & \to & \mathbf{RS} & \\ & A & \mapsto & (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}) & \\ & f\colon A \to B & \mapsto & (F, F^\sharp) & \text{(aus Definition 9.8)} \end{array}$$

ist ein Funktor und wird verwirrenderweise ebenfalls mit Spec bezeichnet.

Wir hätten gerne, dass die (opposite) Kategorie der Ringe äquivalent ist zu der durch die affinen Schemata gegebenen Unterkategorie von **RS**. Es ist aber leider nicht richtig, dass jeder Morphismus

$$(F, F^\sharp)\colon (\mathrm{Spec}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$$

in **RS** auf die obige Weise durch einen Morphismus $f\colon A \to B$ von Ringen induziert ist.

Beispiel 9.12. Sei k ein Körper. Wir betrachten den Ring $A := k[X]_{(X)}$. Für diesen gilt $\mathrm{Spec}(A) = \{(0), (X)\}$. Wir betrachten den Quotientenkörper $K := \mathrm{Quot}(A)$ und möchten eine Abbildung

$$(F, F^\sharp)\colon (\mathrm{Spec}(K), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(K)}) \to (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$$

in **RS** definieren. Wir setzen dafür $F(*) := (X)$ und definieren

$$\begin{array}{rlclclcl} F^\sharp(\emptyset)\colon & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\emptyset) & \cong & 0 & \to & 0 & \cong & F_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(K)}(\emptyset) \\ F^\sharp(\{(0)\})\colon & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\{(0)\}) & \cong & K & \to & 0 & \cong & F_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(K)}(\{(0)\}) \\ F^\sharp(\mathrm{Spec}(A))\colon & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) & \cong & A & \hookrightarrow & K & \cong & F_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(K)}(\mathrm{Spec}(A)) \end{array}$$

denn $\emptyset$, $\{(0)\}$ und $\mathrm{Spec}(A)$ sind die einzigen offenen Mengen von $\mathrm{Spec}(A)$. Dieses definiert offensichtlich einen Morphismus von Prägarben, es ist also $(F, F^\sharp)$ ein Morphismus geringter Räume. Falls dieser von einer Ringabbildung $f\colon A \to K$ käme, wäre dies nach Korollar 9.10 gerade die Inklusion $f\colon A \hookrightarrow K$. Dann ist das Urbild des maximalen Ideals von K aber gerade $(0) \subseteq A$ und nicht (X). Also kann $(F, F^\sharp)$ nicht von einer Ringabbildung herkommen.

Beispiel 9.13. Wir haben in Beispiel 9.6 gesehen, dass $(X, \mathcal{C}(-, \mathbb{R}))$ ein geringter Raum ist und einer stetigen Abbildung $F\colon X \to Y$ eine Abbildung geringer Räume zugeordnet, wobei $F^\sharp$ durch Präkomposition mit F gegeben war. Ist $U \subseteq Y$ eine offene Menge, $x \in F^{-1}(U)$ und $b\colon F^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, so können wir x in diese einsetzen und bekommen $b(x) \in \mathbb{R}$. Nun gilt für eine Abbildung $a\colon U \to \mathbb{R}$, dass

$$a(F(x)) = aF(x) = F^\sharp(U)(a)(x).$$

Im Fall von affinen Schemata ergibt es keinen Sinn nach einer Gleichung wie im letzten Beispiel 9.13 zu fragen, denn ist $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ eine offene Menge, $x \in F^{-1}(U)$ ein Primideal und $a \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$ so ist $a(F(x)) \in k(F(x))$, aber $F^\sharp(U)(a)(x) \in k(x)$. Es ergibt aber dennoch Sinn danach zu fragen, wann einer der beiden Elemente Null ist.

Definition 9.14. Sei $(F, F^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung geringter Räume und $x \in X$ ein Punkt. Dann induzieren die Abbildungen $F^\sharp(U)\colon \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(F^{-1}(U))$ für alle offenen Umgebungen U von $F(x)$ einen Morphismus

$$F_x^\sharp\colon (\mathcal{O}_Y)_{F(x)} \to (\mathcal{O}_X)_x$$

von Ringen durch Definition 7.10, denn ist $F(x) \in U$, so ist $x \in F^{-1}(U)$ und $F^{-1}(U) \subseteq X$ ist offen.

Sei $(F, F^\sharp)$ ein Morphismus geringter Räume, der durch eine Abbildung $f\colon A \to B$ von Ringen gegeben ist (siehe Definition 9.11) und der aus $F\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ zusammen mit $F^\sharp(U)\colon \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U) \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)}(F^{-1}(U))$ besteht. Ist $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ ein Primideal, so ist die Ringabbildung

$$F_\mathfrak{q}^\sharp\colon (\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})_{F(\mathfrak{q})} \to (\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(B)})_\mathfrak{q}$$

aus der vorherigen Definition durch die Identifikation aus Lemma 8.2 gerade gegeben durch

$$F_\mathfrak{q}^\sharp\colon \begin{array}{ccc} A_{f^{-1}(\mathfrak{q})} & \to & B_\mathfrak{q} \\ \frac{x}{s} & \mapsto & \frac{f(x)}{f(s)}. \end{array} \tag{9.2}$$

(Man bemerke, dass aus $s \in A \setminus f^{-1}(\mathfrak{q}) = f^{-1}(B) \setminus f^{-1}(\mathfrak{q}) = f^{-1}(B \setminus \mathfrak{q})$ auch folgt, dass $f(s) \in ff^{-1}(B \setminus \mathfrak{q}) \subseteq B \setminus \mathfrak{q}$.) Da $F_\mathfrak{q}^\sharp$ eine Ringabbildung ist, schickt sie Einheiten auf Einheiten. In einem lokalen Ring sind die Einheiten aber genau die Elemente außerhalb des maximalen Ideals. Also gilt

$$(F_\mathfrak{q}^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{m}_{F(\mathfrak{q})}. \tag{9.3}$$

Sei nun $U \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ eine offene Menge, $x = \mathfrak{q} \in F^{-1}(U)$ und $a \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(U)$. Dann gilt für die Keime

$$a_{F(x)} = 0 \quad \Longleftarrow \quad (F^\sharp(U)(a))_x = 0, \tag{9.4}$$

wobei die linke Seite ein Element von $k(F(x))$ und die rechte Seite ein Element von $k(x)$ ist. Die linke Seite ist äquivalent zu $a_{F(x)} \in \mathfrak{m}_{F(x)}$, während die rechte Seite äquivalent ist zu $F_x^\sharp(a_{F(x)}) \in \mathfrak{m}_x$, also $a_{F(x)} \in (F_\mathfrak{q}^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_x)$.

Ist nun der Morphismus von geringten Räumen durch eine Ringabbildung f induziert und hat also die Abbildung $F_\mathfrak{q}^\sharp$ die in (9.2) beschriebene Form, so gilt auch

$$(F_\mathfrak{q}^\sharp)(\mathfrak{m}_{F(\mathfrak{q})}) \subseteq \mathfrak{m}_\mathfrak{q},$$

was zusammen mit (9.3) die Gleichheit

$$(F_\mathfrak{q}^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}_{F(\mathfrak{q})}$$

impliziert und damit auch die Umkehrung zu (9.4), also

$$a_{F(x)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (F^\sharp(U)(a))_x = 0.$$

Diese Feststellung führt zu dem Begriff des *lokalgeringten Raums*.

Definition 9.15. Ein *lokalgeringter Raum* ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, sodass für alle $x \in X$ der Halm $(\mathcal{O}_X)_x$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}_x$ ist.

Ein *Morphismus* $(F, F^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ zwischen zwei lokalgeringten Räumen ist ein Morphismus zwischen geringten Räumen, sodass für alle $x \in X$ die in Definition 9.14 beschriebene Ringabbildung

$$F_x^\sharp\colon (\mathcal{O}_Y)_{F(x)} \to (\mathcal{O}_X)_x$$

lokal ist, also $(F_x^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_{F(x)}$. Die lokalgeringten Räume bilden zusammen mit ihren Morphismen eine Kategorie, die mit **LRS** bezeichnet wird.

Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalgeringter Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, $x \in U$ sowie $f \in \mathcal{O}_X(U)$, so heißt die Restklasse des Keims $f(x) := \bar{f}_x \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x = k(x)$ die *Auswertung* von f an x. (Genauer ist mit der kanonischen Abbildung $g\colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$ gerade $f(x) := g(f) + \mathfrak{m}_x \in k(x)$.)

Beispiel 9.16. Wegen Beispiel 9.13 sind die geringten Räume $(X, \mathcal{C}(-,\mathbb{R}))$ lokalgeringte Räume und eine stetige Abbildung $F\colon X \to Y$ induziert eine Abbildung lokalgeringter Räume.

Beispiel 9.17. Wegen der obigen Diskussion schränkt der Funktor Spec aus Definition 9.11 ein zu einem Funktor

$$\mathrm{Spec}\colon \mathbf{Ring}^{op} \to \mathbf{LRS}$$

der ebenfalls mit Spec bezeichnet wird.

Lemma 9.18. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalgeringter Raum, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Dann ist die Teilmenge*

$$D(f) := \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$$

von U offen und die Einschränkung $f|_{D(f)}$ ist invertierbar. Ist insbesondere $f \in \mathcal{O}_X(U)$ ein Element mit Keim $f_x \neq 0$ in $\mathcal{O}_{X,x}$, so gibt es eine offene Teilmenge von U auf der f schon invertierbar ist.

Beweis. Dieses ist eine Übungsaufgabe. □

Nun können wir endlich eine zu der (opposite) Kategorie der Ringe äquivalente „geometrische" Kategorie identifizieren.

Definition 9.19. Ein lokalgeringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ein *affines Schema*, wenn er isomorph ist zu einem lokalgeringten Raum der Form $(\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$. Morphismen zwischen affinen Schemata sind Morphismen der zugehörigen lokalgeringten Räume. Es bezeichne **Aff** die Kategorie der affinen Schemata.

Ist S ein affines Schema, so ist die Kategorie $\mathbf{Aff}/S$ der *affinen Schemata über S* gegeben als die Überkategorie $\mathbf{Aff}/S := \mathbf{Aff} \downarrow S$. Mit anderen Worten sind die Objekte von $\mathbf{Aff}/S$ gegeben durch Morphismen $X \to S$ in **Aff**, die *Strukturmorphismen* genannt werden, und Morphismen f durch kommutative Dreiecke

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

wobei f ein Morphismus in **Aff** ist.

Satz 9.20. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalgeringter Raum und A ein Ring. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*

$$\begin{array}{rccc} \nu\colon & \mathrm{Hom}_{\mathbf{LRS}}((X, \mathcal{O}_X), (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, \mathcal{O}_X(X)) \\ & (F, F^\sharp) & \mapsto & F^\sharp(\mathrm{Spec}(A)) \end{array}$$

oder mit anderen Worten eine Adjunktion

$$\Gamma : \mathbf{LRS} \rightleftarrows \mathbf{Ring}^{op} : \mathrm{Spec}$$

wobei $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) := \mathcal{O}_X(X)$ den Funktor der globalen Schnitte *bezeichne.*

Beweis. Es ist klar, dass ν eine natürliche Abbildung zwischen den angegebenen Abbildungsmengen ist. Um die Bijektivität zu zeigen, möchten wir eine Umkehrabbildung dazu konstruieren. Sei also $f\colon A \to \mathcal{O}_X(X)$ eine Ringabbildung.

Wir definieren zunächst $F\colon X \to \mathrm{Spec}(A)$. Zu einem Punkt $x \in X$ gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$. Sei $F(x)$ das Urbild von $\mathfrak{m}_x$ unter der Ringabbildung

$$A \xrightarrow{f} \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{g} \mathcal{O}_{X,x}.$$

Es ist F stetig, denn

$$\begin{array}{rcl} F^{-1}(D(s)) & = & F^{-1}(\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid s \notin \mathfrak{p}\}) \\ & = & \{x \in X \mid F(x) \in \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid s \notin \mathfrak{p}\}\} \\ & = & \{x \in X \mid s \notin F(x)\} \\ & = & \{x \in X \mid s \notin (gf)^{-1}(\mathfrak{m}_x)\} \\ & = & \{x \in X \mid gf(s) \notin \mathfrak{m}_x\} \\ & = & \{x \in X \mid f(s)(x) \neq 0\} \\ & = & D(f(s)) \end{array}$$

für alle $s \in A$ und diese Menge ist offen in X nach Lemma 9.18.

Nun möchten wir einen Morphismus $F^\sharp \colon \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \to F_*\mathcal{O}_X$ definieren. Nach Satz 8.11 genügt es, dies auf den basisoffenen Mengen $D(s)$ für $s \in A$ kompatibel mit den Einschränkungen zu tun. Sei also $s \in A$. Durch die Identifikation aus Lemma 8.3 müssen wir also eine Ringabbildung

$$F^\sharp(D(s)) \colon A[\tfrac{1}{s}] \to \mathcal{O}_X(D(f(s)))$$

definieren. Durch die universelle Eigenschaft der Lokalisierung existiert der hervorgehobene Pfeil in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d] \\ A[\tfrac{1}{s}] \arrow[r, dashed, "F^\sharp(D(s))"] & \mathcal{O}_X(D(f(s))), \end{tikzcd} \tag{9.5}$$

denn es ist $f(s)$ in $\mathcal{O}_X(D(f(s)))$ invertierbar nach Lemma 9.18. Diese Zuordung ν' ist kompatibel mit den Einschränkungen und definiert ein Rechtsinverses zu ν.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\nu'\nu = \mathrm{id}$. Sei also $(F, F^\sharp)$ ein Element der linken Menge $\mathrm{Hom}_{\mathbf{LRS}}((X, \mathcal{O}_X), (\mathrm{Spec}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}))$. Betrachten wir $F \colon X \to \mathrm{Spec}(A)$, so gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d, "g"] \\ A_{F(x)} \arrow[r, "F_x^\sharp"] & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd}$$

und weil $F_x^\sharp$ nach Voraussetzung ein lokaler Ringhomomorphismus ist, gilt außerdem gerade $(F_x^\sharp)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = F(x)A_{F(x)}$. Daher ist $F(x)$ das Urbild von $\mathfrak{m}_x$ unter gf.

Für den Morphismus $F^\sharp \colon \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)} \to F_*\mathcal{O}_X$ gibt es für jedes $s \in A$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(\mathrm{Spec}(A)) \arrow[r, "F^\sharp(\mathrm{Spec}(A))"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d] \\ A[\tfrac{1}{s}] \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(s)) \arrow[r, "F^\sharp(D(s))"] & \mathcal{O}_X(F^{-1}D(s)) \cong \mathcal{O}_X(D(f(s))) \end{tikzcd}$$

und durch die Eindeutigkeitseienschaft in (9.5) bekommt man das Gewünschte. □

Korollar 9.21. *Der lokalgeringte Raum* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ *ist ein finales Objekt in der Kategorie* **LRS**. *Mit anderen Worten gibt es also einen eindeutigen Morphismus von einem beliebigen lokalgeringten Raum* $(X, \mathcal{O}_X)$ *nach* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

Beweis. Dieses folgt mit der Bijektion der Abbildungsmengen aus Satz 9.20 und der Tatsache, dass es für jeden Ring, wie zum Beispiel $\mathcal{O}_X(X)$, genau einen Morphismus von Ringen von $\mathbb{Z}$ in diesen Ring gibt. □

Korollar 9.22. *Die Zuordnung aus Satz 9.20 schränkt ein zu einer Äquivalenz*

$$\Gamma : \mathbf{Aff} \rightleftarrows \mathbf{Ring}^{op} : \mathrm{Spec}$$

von Kategorien. Durch die Natürlichkeit der Bijektion in Satz 9.20 induziert diese für einen Ring k auch eine Äquivalenz von Kategorien

$$\Gamma : \mathbf{Aff}/\,\mathrm{Spec}(k) \rightleftarrows k\text{-}\mathrm{Alg}^{op} : \mathrm{Spec}$$

Beweis. Wir wissen nach Korollar 8.9, dass $\Gamma\,\mathrm{Spec}(A) \cong A$ für alle Ringe A. Damit ist Spec (bis auf Isomorphie) injektiv auf Objekten und der Funktor $\mathrm{Spec} \colon \mathbf{Ring}^{op} \to \mathbf{LRS}$ ist eine Unterkategorie. (Mit anderen Worten macht die obige Adjuntion die Unterkategorie $\mathbf{Ring}^{op} \hookrightarrow \mathbf{LRS}$ zu einer *reflexiven Unterkategorie.*) Schränkt man sich auf das Bild ein, so ist dieses per Definition genau **Aff** und die Behauptung folgt. □

10. Schemata und offene Immersionen

Definition 10.1. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalgeringter Raum und $U \hookrightarrow X$ eine offene Teilmenge von X. Dann schreiben wir $\mathcal{O}_{X|U}$ für die Einschränkung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ouv}(U)^{op} & \to & \mathbf{Ring} \\ U' & \mapsto & \mathcal{O}_X(U'). \end{array}$$

Der lokalgeringte Raum $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ heißt die *Einschränkung* von $(X, \mathcal{O}_X)$ auf U und

$$\begin{array}{rrcl} i\colon & U & \hookrightarrow & X \\ i^\sharp(V) := (-)_{|U\cap V}\colon & \mathcal{O}_X(V) & \to & \mathcal{O}_X(U \cap V) = \mathcal{O}_X(i^{-1}(V)) = i_*\mathcal{O}_{X|U}(V) \end{array}$$

ist ein Morphismus $(U, \mathcal{O}_{X|U}) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ lokalgeringter Räume.

Beispiel 10.2. In Beispiel 8.10 haben wir mit $A := k[X, Y]$ und $\mathrm{Spec}(A)$ die offene Teilmenge

$$U := \mathrm{Spec}(A) \setminus \{(X, Y)\} \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A).$$

betrachtet. Es ist mit der vorherigen Definition 10.1, das Paar $(U, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)|U})$ ein lokalgeringter Raum und $i\colon (U, \mathcal{O}_{X|U}) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus lokalgeringter Räume. Unter der Adjunktion, also der Bijektion zwischen den Hom-Mengen, wird dieser Morphismus i in **LRS** auf den Isomorphismus $A \to \mathcal{O}_{X|U}(U) \cong A$ in **Ring** abgebildet, wie wir in Beispiel 8.10 ausgerechnet haben. Wir können nun nicht schließen, dass i ein Isomorphismus in **LRS** ist, denn unter einer Adjunktion gibt es im Allgemeinen nicht eine solche Korrespondenz von Isomorphismen. Nehmen wir allerdings an, dass $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ ein affines Schema (siehe Definition 9.19) ist, so schränkt die Adjunktion nach Korollar 9.22 ein auf einen Äquivalenz von Kategorien. In diesem Fall entsprechen Isomorphismen gerade Isomorphismen und i wäre ein Isomorphismus, was nicht richtig ist, da beispielsweise die Abbildung i auf topologischen Räumen nicht surjektiv ist. Also ist $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ kein affines Schema.

Definition 10.3. Ein Morphismus $(F, F^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ lokalgeringter Räume heißt eine *offene Immersion*, falls $F\colon X \hookrightarrow Y$ eine offene Einbettung ist und eine offene Teilmenge $V \hookrightarrow Y$ existiert, sodass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{O}_X) \arrow[rr, "{(F,F^\sharp)}"] \arrow[dr, dashed, "\cong", "\exists"'] & & (Y, \mathcal{O}_Y) \\ & (V, \mathcal{O}_{Y|V}) \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Eine Isomorphieklasse von solchen offenen Immersion heißt ein *offenes Unterschema* von $(Y, \mathcal{O}_Y)$ und wird häufig mit einem seiner Repräsentanten identifiziert.

Bemerkung 10.4. Alternativ kann man eine offene Immersion $(F, F^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ auch definieren als ein Morphismus lokalgeringter Räume, sodass F eine offene Einbettung ist und $F^\sharp_x$ ein Isomorphismus von Ringen für alle $x \in X$.

Definition 10.5. Ein lokalgeringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt ein *Schema*, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$ gibt, so dass jede Einschränkung $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ ein affines Schema (siehe Definition 9.19) ist. Morphismen zwischen Schemata sind Morphismen der zugehörigen lokalgeringten Räume. Es bezeichne **Sch** die Kategorie der Schemata.

Im Folgenden werden wir oft ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ lediglich mit X bezeichnen.

Ist S ein Schema, so ist die Kategorie $\mathbf{Sch}/S$ der *Schemata über* S (oder S*-Schemata*) gegeben als die Überkategorie $\mathbf{Sch}/S := \mathbf{Sch} \downarrow S$. Mit anderen Worten sind die Objekte von $\mathbf{Sch}/S$ gegeben durch Morphismen $X \to S$ in **Sch**, die *Strukturmorphismen* genannt werden, und Morphismen f durch kommutative Dreiecke

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

wobei f ein Morphismus in **Sch** ist.

Bemerkung 10.6. Es gilt nach Korollar 9.21, dass $\mathbf{Sch} \cong \mathbf{Sch}/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.

In Analogie mit Definition 3.25 machen wir die folgende Definition.

Definition 10.7. Für einen Ring A und $n \geq 1$ setzen wir $\mathbb{A}^n_A := \operatorname{Spec}(A[X_1, \ldots, X_n])$. Ist $A = \mathbb{Z}$ oder keine Verwechselung möglich, so wird das A im Index manchmal weggelassen.

Lemma 10.8. *Ist $(F, F^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \hookrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine offene Immersion und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Schema, so ist auch $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema.*

Beweis. Es gibt nach Voraussetzung ein kommutatives Dreieck wie in Definition 10.3 und es genügt zu zeigen, dass $(V, \mathcal{O}_{Y|V})$ ein Schema ist. Sei $\{V_i \hookrightarrow Y\}$ eine offene Überdeckung, sodass $(V_i, \mathcal{O}_{Y|V_i}) \cong \operatorname{Spec}(A_i)$ für Ringe A_i. Wähle für alle $x \in V$ einen Index i_x, sodass $x \in V_{i_x}$. Es gibt eine basisoffene Menge $D(f_x) \subseteq V_{i_x} \cap V$ um x. Also ist auch $\{D(f_x) \hookrightarrow V\}$ eine offene Überdeckung von V und es gilt

$$(D(f_x), \mathcal{O}_{Y|V|D(f_x)}) \cong (D(f_x), \mathcal{O}_{Y|V_{i_x}|D(f_x)}) \cong (D(f_x), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A_{i_x})|D(f_x)}) \cong \operatorname{Spec}(A_{i_x}[\tfrac{1}{f_x}]).$$

Also ist $(V, \mathcal{O}_{Y|V})$ ein Schema. $\square$

Beispiel 10.9. Es ist das Schema $\mathbb{A}^2_k \setminus \{0\}$ aus Beispiel 8.10 und Beispiel 10.2 ein Schema, das nicht affin ist.

Sei X ein Schema, $x \in X$ ein Punkt und $\operatorname{Spec}(A) = U \subseteq X$ eine affine offene Umgebung von x in X. Sei $\mathfrak{p} \in A$ das zu x gehörige Primideal. Es gilt $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{U,x} \cong A_\mathfrak{p}$ und es gibt einen Schemamorphismus

$$j_x\colon \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) = \operatorname{Spec}(A_\mathfrak{p}) \to \operatorname{Spec}(A) = U \hookrightarrow X \tag{10.1}$$

induziert durch die kanonische Ringabbildung $A \to A_\mathfrak{p}$ und Korollar 9.22. Diese ist nach den Argumenten im Beweis von Lemma 10.8 unabhängig von dem gewählten U. Betrachtet man weiter die kanonische Abbildung $A_\mathfrak{p} \to k(\mathfrak{p}) = k(x)$ in den Restklassenkörper, so bekommen wir einen Schemamorphismus

$$i_x\colon \operatorname{Spec}(k(x)) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X \tag{10.2}$$

und das Bild (auf topologischen Räumen) des einzigen Punktes in $\operatorname{Spec}(k(x))$ unter i_x ist genau der Punkt x.

Lemma 10.10. *Sei X ein Schema. Für einen lokalen Ring R mit Restklassenkörper K (und insbesondere also für jeden Körper $R = K$) gibt es eine Bijektion*

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec}(R), X) \quad \cong \quad \left\{ \begin{matrix} f\colon \mathcal{O}_{X,x} \to R \text{ lokale Ringabbildung} \\ \text{für } x \in X \end{matrix} \right\}$$

die einschränkt zu einer Bijektion

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\operatorname{Spec}(K), X) \quad \cong \quad \left\{ \begin{matrix} f\colon k(x) \to K \text{ Ringabbildung} \\ \text{für } x \in X \end{matrix} \right\}$$

Beweis. Die jeweilige Abbildung von der rechten zu der linken Seite ist die Präkomposition von $\operatorname{Spec}(R) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x})$ und $\operatorname{Spec}(K) \to \operatorname{Spec}(k(x))$ mit den in (10.1) und (10.2) beschriebenen Morphismen.

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(R) \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\operatorname{Spec}(f)"'] & & X \\ & \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \arrow[ur, "(10.1)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(K) \arrow[rr] \arrow[dr, dashed, "\operatorname{Spec}(f)"'] & & X \\ & \operatorname{Spec}(k(x)) \arrow[ur, "(10.2)"'] & \end{tikzcd}$$

Ist nun $(F, F^\sharp)\colon (\operatorname{Spec}(R), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R)}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ ein Schemamorphismus, so ist der Punkt $x \in X$ definiert als das Bild des maximalen Ideals $\mathfrak{m}$ unter $F\colon \operatorname{Spec}(R) \to X$. Weil Morphismen von Schemata insbesondere Morphismen lokalgeringter Räume sind, gibt es einen lokalen Ringhomomorphismus $F^\sharp_\mathfrak{m}\colon \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R),\mathfrak{m}} \cong R_\mathfrak{m} \cong R$. Für den zweiten Teil liefert dieser eine Ringabbildung $k(x) \to R/\mathfrak{m} = K$.

Diese beiden Zuordnungen sind jeweils offensichtlich invers zueinander. $\square$

Nun möchten wir affine Schemata miteinander verkleben und müssen uns dafür erst einmal überlegen, wieso Garbenabbildungen und danach auch Garben verkleben. (Mit technischen Worten sagt man ungefähr, dass der Funktor $\mathbf{Sh}^\mathcal{S}(-)\colon \operatorname{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Cat}$ einen *Stack* definiert - dieses ist eine Art abgeschwächte Version einer Garbe.) Dafür müssen wir erst einmal, genau wie wir es in in Definition 10.1 ad hoc gemacht haben, die Einschränkung einer Garbe auf eine offene Teilmenge definieren.

Definition 10.11. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathcal{S}$ eine Prägarbe und $U \hookrightarrow X$ eine offene Teilmenge von X. Dann schreiben wir $\mathcal{F}_{|U}$ für die Einschränkung

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}_{|U}\colon & \mathrm{Ouv}(U)^{op} & \to & \mathcal{S} \\ & U' & \mapsto & \mathcal{F}(U'). \end{array}$$

Es ist klar, dass $\mathcal{F}_{|U}$ eine Garbe ist, falls $\mathcal{F}$ eine Garbe ist.

Lemma 10.12. *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe und $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X mit Werten in $\mathcal{S}$. Dann ist die Zuordnung*

$$\begin{array}{rccl} \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G})\colon & \mathrm{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Set} \\ & U & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(U)}(\mathcal{F}_{|U},\mathcal{G}_{|U}) \end{array}$$

eine Garbe und heißt der Garbenhom *auf X. Ist $\mathcal{S}$ die Kategorie* **Ab** *oder die Kategorie* **Ring***, so hat der Garbenhom Werte in* **Ab** *durch „punktweise Addition".*

Beweis. Es ist klar, dass $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ eine Prägarbe definiert, denn ist $U \subseteq V$ eine Inklusion in X offener Mengen, so ist die Restriktionsabbildung

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(V) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{|V},\mathcal{G}_{|V}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_{|U},\mathcal{G}_{|U}) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$$

einfach dadurch gegeben, dass man in eine Garbenabbildung $f\colon \mathcal{F}_{|V} \to \mathcal{G}_{|V}$ nur offene Teilmengen von U einsetzt, wofür wir $f_{|U}\colon \mathcal{F}_{|U} \to \mathcal{G}_{|U}$ schreiben.

Für die Garbenbedingung sei $U \subseteq X$ eine offene Menge und $\{U_i \hookrightarrow U\}$ eine offene Überdeckung. Für die Eindeutigkeit seien $f, g \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_{|U},\mathcal{G}_{|U})$ zwei Elemente, sodass gilt $f_{|U_i} = g_{|U_i}$ für alle i. Wir möchten zeigen, dass $f = g$, also dass $f(U') = g(U')$ gilt für alle $U' \subseteq U$ offen. Wähle also ein $U' \subseteq U$ offen und $s \in \mathcal{F}_{|U}(U') = \mathcal{F}(U')$. Dann gilt für alle Indizes i, dass

$$\begin{array}{rcl} f(U')(s)_{|U_i\cap U'} & = & f(U_i \cap U')(s_{|U_i\cap U'}) \\ & = & f_{|U_i}(U_i \cap U')(s_{|U_i\cap U'}) \\ & = & g_{|U_i}(U_i \cap U')(s_{|U_i\cap U'}) \\ & = & g(U')(s)_{|U_i\cap U'} \end{array}$$

und da $\{U_i \cap U' \hookrightarrow U'\}$ eine offene Überdeckung ist, folgt $f(U')(s) = g(U')(s)$ mit der Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{G}$.

Für die Verklebeeigenschaft seien $f_i \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_{|U_i},\mathcal{G}_{|U_i})$ kompatible Elementen. Wir wollen ein Element $f \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_{|U},\mathcal{G}_{|U})$ konstruieren, dass auf die f_i einschränkt. Sei $U' \subseteq U$ eine offene Menge. Wir müssen also zunächst eine Abbildung von Mengen $f(U')\colon \mathcal{F}_{|U}(U') = \mathcal{F}(U') \to \mathcal{G}(U') = \mathcal{G}_{|U}(U')$ definieren. Sei dafür $s \in \mathcal{F}(U')$ und betrachte die Elemente $t_i := f_i(U_i \cap U')(s_{|U_i\cap U'}) \in \mathcal{G}(U_i \cap U')$. Um diese mit der Garbeneigenschaft von $\mathcal{G}$ zu einem Element $t \in \mathcal{G}(U')$ zu verkleben, müssen wir deren Kompatibilität überprüfen. Für Indizes i und j gilt aber

$$\begin{array}{rcl} t_{i,|U_i\cap U_j\cap U'} & = & f_i(U_i \cap U')(s_{|U_i\cap U'})_{|U_i\cap U_j\cap U'} \\ & = & f_i(U_i \cap U_j \cap U')(s_{|U_i\cap U_j\cap U'}) \\ & = & f_j(U_i \cap U_j \cap U')(s_{|U_i\cap U_j\cap U'}) \\ & = & t_{j,|U_i\cap U_j\cap U'}, \end{array}$$

die Elemente sind also kompatibel und wir setzen $f(U')(s) := t$. Um zu zeigen, dass f eine Abbildung von Prägarben $f\colon \mathcal{F}_{|U} \to \mathcal{G}_{|U}$ definiert, seien $U'' \subseteq U'$ in U offene Teilmengen. Wir wollen für $s \in \mathcal{F}_{|U}(U')$ zeigen, dass die Elemente

$$f(U')(s)_{|U''} = f(U'')(s_{|U''})$$

von $\mathcal{G}_{|U}(U'')$ gleich sind. Mit der Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{G}$ genügt es wieder, dies für die Einschränkungen zu der offenen Überdeckung $\{U_i \cap U'' \hookrightarrow U''\}$ zu testen. Nun gilt

$$\begin{array}{rcl} f(U')(s)_{|U_i\cap U''} & = & (f(U')(s)_{|U_i\cap U'})_{|U_i\cap U''} \\ & = & f_i(U_i \cap U')(s_{|U_i\cap U'})_{|U_i\cap U''} \\ & = & f_i(U_i \cap U'')(s_{|U_i\cap U''}) \\ & = & f(U'')(s_{|U''})_{|U_i\cap U''} \end{array}$$

und also ist f ist eine Abbildung von Prägarben.

Für die Behauptung über die additive Struktur seien $f, g \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U})$ zwei Elemente und definiere

$$\begin{array}{rccl} (f-g)(U')\colon & \mathcal{F}_{|U}(U') & \to & \mathcal{G}_{|U}(U') \\ & s & \mapsto & f(U')(s) - g(U')(s). \end{array}$$

Es ist leicht zu sehen, dass dieses ein Element $(f-g) \in \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U})$ definiert, das die gewünschten Eigenschaften hat. □

Definition 10.13. Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U}_X := \{U_i \hookrightarrow X\}_{i \in \mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung. Ein *Verklebedatum* $(\mathcal{F}_i, \varphi_{ij})$ *für Garben auf* $\mathfrak{U}_X$ (mit Werten in $\mathcal{S}$) ist eine Familie

$$\mathcal{F}_i\colon \mathrm{Ouv}(U_i)^{op} \to \mathcal{S}$$

von Garben zusammen mit Garbenisomorphismen

$$\varphi_{ij}\colon \mathcal{F}_{i|U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{j|U_i \cap U_j}$$

für alle Paare $(i,j) \in \mathcal{I}^2$, sodass für alle Tripel $(i,j,k) \in \mathcal{I}^3$ das Diagramm (in dem die jeweiligen Einschränkungen der φ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ nicht genannt sind)

(10.3)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{i|U_i \cap U_j \cap U_j} \arrow[rr, "\varphi_{ik}"] \arrow[dr, "\varphi_{ij}"'] & & \mathcal{F}_{k|U_i \cap U_j \cap U_j} \\ & \mathcal{F}_{j|U_i \cap U_j \cap U_j} \arrow[ur, "\varphi_{jk}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert (was die *Kozykelbedingung* genannt wird). Ein Morphismus von Verklebedaten $(\mathcal{F}_i, \varphi_{ij}) \to (\mathcal{G}_i, \phi_{ij})$ ist eine Familie von Garbenabbildungen $f_i\colon \mathcal{F}_i \to \mathcal{G}_i$, sodass für alle Paare $(i,j) \in I^2$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_{i|U_i \cap U_j} \arrow[r, "\varphi_{ij}", "\cong"'] \arrow[d, "f_{i|U_i \cap U_j}"'] & \mathcal{F}_{j|U_i \cap U_j} \arrow[d, "f_{j|U_i \cap U_j}"] \\ \mathcal{G}_{i|U_i \cap U_j} \arrow[r, "\phi_{ij}", "\cong"'] & \mathcal{G}_{j|U_i \cap U_j} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Verklebedaten für Garben auf $\mathfrak{U}_X$ bilden zusammen mit ihren Morphismen eine Kategorie, die mit $\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(\mathfrak{U}_X)$ bezeichnet wird.

Satz 10.14. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathfrak{U}_X := \{U_i \hookrightarrow X\}_{i \in \mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung. Der Funktor*

$$\begin{array}{rccl} gd_{\mathfrak{U}_X}\colon & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(\mathfrak{U}_X) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & (\mathcal{F}_{|U_i}, (\mathcal{F}_{|U_i})_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{=} (\mathcal{F}_{|U_j})_{U_i \cap U_j}) \end{array}$$

ist voll, treu und essentiell surjektiv und damit eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Die Treue folgt aus Lemma 10.12.

Für die essentielle Surjektivität und die Völle konstruieren wir (funktoriell) zu einem Verklebedatum $(\mathcal{F}_i, \varphi_{ij})$ eine Garbe $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to S$ zusammen mit Isomorphismen $f_i\colon \mathcal{F}_{|U_i} \to \mathcal{F}_i$, sodass für alle Paare $(i,j) \in I^2$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{F}_{|U_i})_{U_i \cap U_j} \arrow[r, equal] \arrow[d, "f_{i|U_i \cap U_j}"'] & (\mathcal{F}_{|U_j})_{U_i \cap U_j} \arrow[d, "f_{j|U_i \cap U_j}"] \\ \mathcal{F}_{i|U_i \cap U_j} \arrow[r, "\varphi_{ij}", "\cong"'] & \mathcal{F}_{j|U_i \cap U_j} \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Sei also $(\mathcal{F}_i, \varphi_{ij})$ ein Verklebedatum und $U \subseteq X$ eine offene Menge. Wir definieren

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ (s_i)_{i \in \mathcal{I}} \in \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i(U_i \cap U) \;\middle|\; \forall i,j : s_{i|U_i \cap U_j \cap U} = \varphi_{ji|U_i \cap U_j \cap U}(s_{j|U_i \cap U_j \cap U}) \right\}$$

mit Restriktionsabbildungen $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ gegeben durch $(s_i) \mapsto (s_{i|U_i \cap U})$. Durch die Definition der Restriktionsabbildungen sieht man sofort, dass $\mathcal{F}\colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Set}$ eine Prägarbe definiert. Ebenso folgt die Garbenbedingung durch die Garbenbedingungen der einzelnen $\mathcal{F}_i$. Bis zu dieser Stelle haben wir noch nicht die Kozykelbedingung benutzt.

Für die Konstruktion der Isomorphismen $f_i\colon \mathcal{F}_{|U_i} \to \mathcal{F}_i$ sei zunächst $U' \subseteq U_i$ für ein $i \in \mathcal{I}$ eine offene Teilmenge. Dann setzen wir $f_i(U')\colon \mathcal{F}_{|U_i}(U') \to \mathcal{F}_i(U')$ als $(s_i) \mapsto s_i$. Um ein Inverses hierzu zu konstruieren, benötigt man die Kozykelbedingung. Dieses zu zeigen ist eine Übungsaufgabe und erfordert keine Tricks. □

Der Satz 10.14 hat jetzt die folgende Formulierung für Schemata.

Satz 10.15. *Sei $\mathcal{I}$ eine Indexmenge und für jedes $i \in \mathcal{I}$ ein Schema $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ gegeben. Angenommen wir haben weiter für jedes Paar $(i,j) \in \mathcal{I}^2$ eine offene Teilmenge $U_{ij} \subseteq U_i$ gegeben, und Isomorphismen $\varphi_{ij} \colon (U_{ij}, \mathcal{O}_{U_i|U_{ij}}) \to (U_{ji}, \mathcal{O}_{U_j|U_{ji}})$, sodass $U_{ii} = U_i$ und die Kozykelbedingung* (10.3) *gilt. Dann gibt es ein (bis auf Isomorphie) eindeutiges Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ und offene Immersionen*

$$f_i \colon (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X),$$

sodass gilt

(1) $X = \cup_i f_i(U_i)$,
(2) $f_j \varphi_{ji} = f_i$ auf U_{ij} und
(3) $f_i(U_i) \cap f_j(U_j) = f_i(U_{ij}) = f_j(U_{ji})$.

Im Spezialfall von zwei Schemata, also $\mathcal{I} = \{1, 2\}$, sind die obigen Bedingungen lediglich zwei offene Teilmengen $U_{12} \subseteq U_1$ und $U_{21} \subseteq U_2$ und ein Isomorphismus $\varphi \colon U_{12} \to U_{21}$.

Beweis. Zunächst konstruieren wir den topologischen Raum X als Quotientenraum (eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist also offen genau dann, wenn für alle i ihr Urbild unter der stetigen Abbildung $U_i \hookrightarrow \coprod_i U_i \twoheadrightarrow X$ in U_i offen ist.)

$$X := \coprod_{i \in I} U_i /_\sim$$

wobei $x_i \sim x_j$ mit $x_i \in U_i$ und $x_j \in U_j$ genau dann, wenn $x_i \in U_{ij}$ und $x_j \in U_{ji}$ und $\varphi_{ji}(x_i) = x_j$. Dieses ist mit Hilfe der Kozykelbedingung transitiv und daher eine Äquivalenzrelation. Die kanonischen Abbildungen $F_i \colon U_i \hookrightarrow X$ sind offene Einbettungen und es gelten offenbar die Bedingungen (1), (2) und (3). Wir werden im Folgenden die topologischen Räume U_i mit ihrem (offenen) Bild $F_i(U_i) \subseteq X$ identifizieren.

Die Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ auf dem topologischen Raum X bekommt man nun einfach durch Verkleben, also genauer durch Satz 10.14 zum Verkleben von Garben angewandt auf die offene Überdeckung $\mathfrak{U}_X := \{U_i \hookrightarrow X\}_{i \in \mathcal{I}}$ und das Verklebedatum

$$\mathcal{O}_{U_i} \colon \mathrm{Ouv}(U_i)^{op} \to \mathbf{Ring}$$

mit Garbenisomorphismen

$$\varphi_{ij} \colon \mathcal{F}_{i|U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{j|U_i \cap U_j}.$$

Diese erfüllen nach Voraussetzung die Kozykelbedingung.

Der lokalgeringte Raum ist ein Schema, da er nach Definition eine offene Überdeckung durch Schemata $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ hat und also auch eine Überdeckung durch lokalgeringte Räume, die isomorph zu affinen Schemata sind. □

Den vorherigen Satz 10.15 kann man natürlich genau so gut fuer lokalgeringte Räume formulieren. Wir bekommen damit das folgende Korollar.

Korollar 10.16. *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ lokalgeringte Räume. Dann ist die Zuordnung*

$$\begin{array}{ccl} \mathrm{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Set} \\ U & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{LRS}}((U, \mathcal{O}_{X|U}), (Y, \mathcal{O}_Y)) \end{array}$$

eine Garbe.

Beweis. Dieses ist eine Übungsaufgabe. □

Beispiel 10.17. Sei $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ eine Familie von Schemata, dann definiert der Satz 10.15 mit $U_{ij} = \emptyset$ ein Schema, dass die *disjunkte Vereinigung* $\coprod_i (U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ genannt wird. Sein topologischer Raum ist die disjunkte Vereinigung der topologischen Räume U_i.

Beispiel 10.18. Ein Beispiel eines besonders pathologischen Schemas ist die *Doppelpunktgerade*. Sei hierzu k ein Körper und betrachte $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1_k$, sowie die Identität $\varphi \colon U_{12} = U_{21}$. Das durch Satz 10.15 definierte Schema heißt Doppelpunktgerade und hat nicht besonders gute Eigenschaften, wie wir bald sehen werden.

Definition 10.19. Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt

(1) zusammenhängend,
(2) irreduzibel,
(3) quasikompakt,

falls der topologische Raum X die entsprechende Eigenschaft hat.

Beispiel 10.20. Wir haben in Satz 4.11 gesehen, dass jedes affine Schema quasikompakt ist. Daher ist beispielsweise das Schema $X := \coprod_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{Spec}(k)$ (siehe Beispiel 10.17 für dessen Konstruktion) kein affines Schema, da es nicht quasikompakt ist. Insbesondere ist X nicht isomorph zu dem affinen Schema $\operatorname{Spec}(\prod_{i\in\mathbb{N}} k)$. Durch die Äquivalenz in Korollar 9.22 sehen wir, dass das affine Schema $\operatorname{Spec}(\prod_{i\in\mathbb{N}} k)$ das Koprodukt $\operatorname{Spec}(\prod_{i\in\mathbb{N}} k)$ in der Kategorie **Aff** der affinen Schemata ist. Insbesondere bewahrt also der Inklusionsfunktor **Aff** $\hookrightarrow$ **Sch** keine Koprodukte und Koprodukte in **Aff** können sich sehr pathologisch verhalten.

Es gibt auch irreduzible (und daher insbesondere zusammenhängende) Schemata, die nicht quasikompakt sind.

Wir können nun die Aussage von Satz 5.4 (umformuliert mit Hilfe von Lemma 4.6) auf beliebige Schemata verallgemeinern.

Satz 10.21. *Für ein Schema X gibt es eine Bijektion*

$$X \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\textit{Abgeschlossene und irreduzible}\\ \textit{Teilmengen von } X\end{matrix}\right\}$$

$$x \longmapsto \overline{\{x\}}$$

$$\left(\begin{matrix}\textit{Der einzige Punkt}\\ x \textit{ in der Menge}\end{matrix} \quad \bigcap_{\emptyset\neq U\subseteq Z \textit{ offen}} U\right) \longleftarrow\!\!\shortmid Z$$

und x ist der eindeutige generische Punkt von $\overline{\{x\}}$.

Beweis. Zunächst möchten wir uns überlegen, wieso die angegebene Zuordnung im Fall eines affinen Schemas $X = \operatorname{Spec}(A)$ tatsächlich der Bijektion aus Satz 5.4 entspricht. Für ein Primideal $x \in X$ zeigt Lemma 4.6, dass $\overline{\{x\}} = \mathcal{V}(x)$ und die Abbildung L ist die gewünschte. Für die Identifikation der anderen Abbildung betrachten wir eine abgeschlossene und irreduzible Teilmenge $Z \subseteq X$ und wissen nach Satz 5.4, dass diese von der Form $Z = \mathcal{V}(x)$ ist für einen Punkt $x \in X$, der der eindeutige generische Punkt von Z ist. Mit Lemma 4.19.(2) folgt dann, dass

$$\bigcap_{\emptyset\neq U\subseteq Z \text{ offen}} U = \{x\},$$

also ist die Abbildung R ebenfalls die gleiche wie in Satz 5.4.

Sei nun X ein beliebiges Schema. Wegen Lemma 4.17.(1) und (2) ist $\overline{\{x\}}$ eine abgeschlossene und irreduzible Teilmenge von X und die Abbildung L damit wohldefiniert.

Sei $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene und irreduzible Teilmenge. Nach Lemma 4.19.(2) besteht die Menge $G := \cap_{\emptyset\neq U\subseteq Z \text{ offen}} U$ genau aus den generischen Punkten von Z. Wenn wir zeigen, dass sie einelementig ist, ist R wohldefiniert und es gilt $LR = \mathrm{id}$ und außerdem $RL = \mathrm{id}$, da x per Definition ein generischer Punkt von $\overline{\{x\}}$ ist.

Um zu zeigen, dass G nichtleer ist, sei $\{U_i \hookrightarrow X\}$ eine offene Überdeckung von X durch affine Schemata. Dann gilt $Z = Z \cap X = Z \cap (\cup_i U_i) = \cup_i (Z \cap U_i)$ und da $Z \neq \emptyset$ gibt es einen Index i mit $Z \cap U_i \neq \emptyset$. Es ist $Z \cap U_i$ eine abgeschlossene Teilmenge des affinen Schemas U_i und außerdem irreduzibel nach Lemma 4.17.(7), da es eine nichtleere und offene Teilmenge des irreduziblen topologischen Raums Z ist. Es gibt also durch den obigen affinen Fall einen eindeutigen Punkt $\mathfrak{p} \in Z \cap U_i$ mit $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = Z \cap U_i$. Da aber nach Lemma 4.17.(7) die Teilmenge $Z \cap U_i \subseteq Z$ dicht ist, gilt $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \overline{\overline{\{\mathfrak{p}\}}} = \overline{Z \cap U_i} = Z$ und damit ist $\mathfrak{p}$ ein generischer Punkt von Z, also $\mathfrak{p} \in G$.

Ist $y \in G$ ein weiterer generischer Punkt von Z, so liegt er nach Lemma 4.19.(2) auch in der nichtleeren offenen Teilmenge $Z \cap U_i$. Mit der Eindeutigkeit des generischen Punktes im affinen Fall sind wir fertig, wenn wir zeigen können, dass y ein generischer Punkt von $Z \cap U_i$

ist. Dieses ist aber klar, da $\overline{\{y\}} \cap (Z \cap U_i) = Z \cap (Z \cap U_i) = Z \cap U_i$ auch der Abschluss von $\{y\}$ in der Unterraumtlogie von $Z \cap U_i$ ist. $\square$

Bemerkung 10.22. Nach Lemma 4.17.(4) gibt es für jeden Punkt $x \in X$ einen generischen (also „maximalen“) Punkt $\eta \in X$ einer Irreduzibilitätskomponente $\overline{\{\eta\}}$ von X mit $x \in \overline{\{\eta\}}$. Dieser Punkt η muss natürlich nicht eindeutig sein, wie das Beispiel des Nullpunktes x im Achsenkreuz zeigt.

Es ist nicht richtig, dass für jeden Punkt $x \in X$ ein abgeschlossener (also „minimaler“) Punkt $m \in X$ existiert mit $m \in \overline{\{x\}}$ und es gibt sogar nichtleere Schemata ohne abgeschlossene Punkte. Ist allerdings X ein affines Schema, so ist natürlich jedes Primideal x in einem maximalen Ideal m (also einem abgeschlossenen Punkt) enthalten und es gilt $m \in \mathcal{V}(x) = \overline{\{x\}}$.

Wir haben schon gesehen, dass der einem Schema unterliegende topologische Raum fast immer nicht Hausdorff ist. Es gilt allerdings die folgende schwächere Trennungseigenschaft, die auch *Kolmogorov-Eigenschaft* genannt wird.

Lemma 10.23. *Ein Schema X ist ein T_0-Raum. Mit anderen Worten gibt es für je zwei verschiedene Punkte x und y in X eine offene Menge $U \subseteq X$, die genau einen der beiden Punkte enthält.*

Beweis. Da jeder Punkt von X in einer affinen offenen Umgebung enthalten ist, können wir annehmen, dass $X = \operatorname{Spec}(A)$ affin ist. Es sind also x und y Primideale in dem Ring A und wir können annehmen, dass $x \nsubseteq y$, denn wenn $x \subseteq y$ und $y \subseteq x$, so wäre $x = y$. Also gibt es ein $f \in x \setminus y$ und wir setzen $U := D(f) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$. Dann gilt also $y \in U$ und $x \notin U$. $\square$

Definition 10.24.

(1) Ein Schema X heisst *lokal noethersch*, wenn es eine offene Überdeckung durch affine Schemata $\operatorname{Spec}(A_i)$ besitzt, wobei jeder Ring A_i noethersch ist.
(2) Ein Schema X heisst *noethersch*, wenn es lokal noethersch und quasikompakt ist.

Bemerkung 10.25. Da jedes affine Schema nach Satz 4.11 quasikompakt ist, ist jedes lokal noethersche affine Schema auch noethersch. Man bemerke auch, dass eine Lokalisierung eines noetherschen Rings wieder ein noetherscher Ring ist.

Lemma 10.26. *Ein affines Schema* $\operatorname{Spec}(A)$ *ist noethersch genau dann, wenn A ein noetherscher Ring ist.*

Beweis. Nach dem in Bemerkung 10.25 Gesagten ist $\operatorname{Spec}(A)$ noethersch, falls A noethersch ist.

Sei nun $\operatorname{Spec}(A)$ ein noethersches Schema. Wir betrachten ein Ideal $I \subseteq A$ und möchten zeigen, dass I endlich erzeugt ist. Es gibt eine offene affine Überdeckung von $\operatorname{Spec}(A)$ durch Spektra noetherscher Ringe. Da eine Lokalisierung eines noetherschen Rings wieder ein noetherscher Ring ist, können wir annehmen, dass $\operatorname{Spec}(A)$ durch (wegen der Quasikompaktheit endlich viele) affine offene Unterschemata der Form $D(f_1), \ldots, D(f_n)$ überdeckt ist, sodass alle $A[\frac{1}{f_i}]$ noethersche Ringe sind. Folglich sind alle Ideale $I[\frac{1}{f_i}] \subseteq A[\frac{1}{f_i}]$ endlich erzeugt, also

$$I[\tfrac{1}{f_i}] = \left(\frac{a_{i,1}}{f_i^{n_{i,1}}}, \ldots, \frac{a_{i,m_i}}{f_i^{n_{i,m_i}}} \right)$$

und wir betrachten das endlich erzeugte Ideal

$$J := (a_{1,1}, \ldots, a_{n,m_n}) \subseteq I.$$

Es gilt per Konstruktion, dass $J[\frac{1}{f_i}] = I[\frac{1}{f_i}]$ für alle Indizes i. Wir betrachten den A-Modul I/J. Dann gibt es für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) = D(f_1) \cup \ldots \cup D(f_n)$ einen Index i mit $\mathfrak{p} \in D(f_i)$, also mit anderen Worten $f_i \notin \mathfrak{p}$. Daher gilt $(I/J)_{\mathfrak{p}} \cong 0$, weil $(I/J)[\frac{1}{f_i}] \cong 0$. Damit ist $I/J = 0$ und daher $I = J$. $\square$

Wir möchten nun zeigen, dass ein noethersches Schema nur endlich viele Irreduzibilitätskomponenten (und damit auch nur endlich viele Zusammenhangskomponenten) hat.

Definition 10.27. Ein topologischer Raum X heißt *noethersch*, wenn jede absteigende Kette

$$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$$

abgeschlossener Teilmengen von X stationär wird.

Beispiel 10.28. Ein noethersches affines Schema $\operatorname{Spec}(A)$ hat einen noetherschen unterliegenden topologischen Raum, denn zu einer absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen korrespondiert eine aufsteigende Kette

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

von Idealen von A die stationär wird, da nach Lemma 10.26 der Ring A noethersch ist.

Lemma 10.29. *Sei X ein topologischer Raum und $\{U_i \hookrightarrow X\}_{i=1}^n$ eine endliche Überdeckung durch noethersche topologische Räume U_i, dann ist X ein noetherscher topologischer Raum.*

Beweis. Sei $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$ eine Kette abgeschlossener Teilmengen in X. Dann ist für alle Indizes i auch

$$(Z_1 \cap U_i) \supseteq (Z_2 \cap U_i) \supseteq (Z_3 \cap U_i) \supseteq \dots$$

eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen in U_i, die nach Voraussetzung ab einem $N(i)$ stationär wird. Setze N als das Maximum aller $N(i)$. Dann gilt für alle $j \geq N$, dass

$$Z_j = Z_j \cap X = Z_j \cap (\cup_i U_i) = \cup_i (Z_j \cap U_i) = \cup_i (Z_{j+1} \cap U_i) = Z_{j+1}$$

und die ursprüngliche Kette wird stationär. Also ist X ein noetherscher topologischer Raum. □

Korollar 10.30. *Ein noethersches Schema hat einen noetherschen unterliegenden topologischen Raum.*

Beweis. Dies folgt mit Beispiel 10.28 und Lemma 10.29. □

Beispiel 10.31. Die Umkehrung von Korollar 10.30 ist nicht unbedingt richtig. Der Ring

$$A := k[X_1, X_2, \dots]/(X_1^2, X_2^2, \dots)$$

ist nicht noethersch, da das (maximale) Ideal $(X_1, X_2, \dots)$ nicht endlich erzeugt ist. Es ist allerdings $\operatorname{Spec}(A) = \operatorname{Spec}(A/\operatorname{Nil}(A)) = \operatorname{Spec}(k)$ ein noetherscher topologischer Raum.

Lemma 10.32. *Sei X ein noetherscher topologischer Raum, dann gilt:*

(1) Jede Teilmenge von X ist ein noetherscher topologischer Raum.
(2) Der Raum X ist quasikompakt.
(3) Der Raum X hat nur endlich viele Irreduzibilitätskomponenten.

Beweis. Für Teil (1) sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge mit der Unterraumtopologie und betrachte eine Kette $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots$ abgeschlossener Teilmengen in Y. Die jeweiligen Abschlüsse in X bilden eine Kette $\overline{Z_1} \supseteq \overline{Z_2} \supseteq \overline{Z_3} \supseteq \dots$ abgeschlossener Teilmengen in X die nach Voraussetzung stationär wird. Nun gilt aber $Y \cap \overline{Z_j} = Z_j$ und daher wird die ursprüngliche Kette ebenfalls stationär.

Für (2) sei $\{U_i \hookrightarrow X\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung und betrachte die Teilmenge

$$\mathfrak{T}' := \{U \in \mathfrak{T} \mid U \text{ ist endliche Vereinigung von } U_i\text{s}\}$$

der Topologie auf X. Wir wollen zeigen, dass $X \in \mathfrak{T}'$. Jede Kette des Posets $(\mathfrak{T}', \subseteq)$ hat eine obere Schranke, da die komplementäre Kette eine absteigende Folge abgeschlossener Mengen in X ist und nach Voraussetzung stationär wird. Mit dem Lemma von Zorn hat $(\mathfrak{T}', \subseteq)$ also ein maximales Element M. Dieses M kann also als endliche Vereinigung von U_is geschrieben werden. Wir wollen zeigen, dass $M = X$. Falls aber $M \neq X$ und es ein Element $x \in X \setminus M$ gäbe, so wäre dieses in einer offenen Menge U_j enthalten, die wir mit M vereinigen könnten, was ein Widerspruch zur Maximalität von M wäre. Also ist $M = X$ und damit X quasikompakt.

Für (3) genügt es zu zeigen, dass X eine endliche Vereinigung irreduzibler Teilmengen ist. Betrachte die Teilmenge

$$\mathfrak{C}' := \{Z \in \mathfrak{C} \mid Z \text{ ist nicht endliche Vereinigung irreduzibler Teilmengen von } X\}$$

der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von X. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{C}' = \emptyset$. Falls diese Menge nichtleer wäre, so gäbe es nach der Voraussetzung und dem Lemma von Zorn ein minimales Element Z. Es ist also Z eine nicht irreduzible Teilmenge von X und daher eine Vereinigung von zwei abgeschlossenen Teilmengen Z_1 und Z_2, die wegen der Minimalität von Z beide in $\mathfrak{C}'$ liegen. Dieses ist ein Widerspruch. $\square$

Korollar 10.33. *Jedes noethersche Schema hat endlich viele Irreduzibilitätskomponenten.*

11. Faserprodukte

Definition 11.1. Sei S ein Schema und $X \to S$ und $Y \to S$ zwei Elemente in **Sch**$/S$. Ein *Faserprodukt* von X und Y über S ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

von Schemata sodass für jedes kommutative Diagramm ohne den gestrichelten Pfeil

(11.1)
$$\begin{tikzcd} T \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d] \\ & Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

ein eindeutiger Schemamorphismus t existiert, der das gesamte Diagramm kommutativ macht. Diese letzte Bedingung nennt man die *universelle Eigenschaft des Faserprodukts.*

Beispiel 11.2.

(1) Bertachtet man den zu Definition 11.1 analogen Begriff in der Kategorie **Set** der Mengen, so existiert ein Faserprodukt und ist gegeben durch die Menge
$$X \times_S Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$
mit den offensichtlichen Projektionen p_X und p_Y. Ist im Speziellen g eine injektive Abbildung so ist $X \times_S Y = f^{-1}(g(Y))$ genau das Urbild von $g(Y)$ (oder mit der üblichen Identifikation: das Urbild von Y) unter der Abbildung f.

(2) Betrachtet man den Begriff des Faserprodukts in der Kategorie **Top** der topologischen Räume, so existiert ein Faserprodukt und ist gegeben durch die in Punkt (1) definierte Menge zusammen mit der Unterraumtopologie von $X \times Y$.

Lemma 11.3. *Ein Faserprodukt von X und Y über S ist eindeutig (bis auf eindeutige Isomorphie), falls es existiert und daher sprechen wir im Folgendem von „dem“ Faserprodukt.*

Beweis. Dieser Beweis ist eine übliche Argumentation für die Eindeutigkeit kategorieller Konstrukte. Angenommen es ist

$$\begin{tikzcd} (X \times_S Y)' \arrow[r, "p'_X"] \arrow[d, "p'_Y"'] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

ein zweites Faserprodukt von X und Y über S, so gibt es ein kommutatives ungestricheltes Diagramm

$$\begin{tikzcd} (X \times_S Y)' \arrow[drr, bend left, "p'_X"] \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[ddr, bend right, "p'_Y"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d] \\ & Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

und damit einen eindeutigen Schemamorphismus t wie angedeutet, sodass alles kommutiert. Vertauscht man die Rollen der beiden Faserprodukte so gibt es analog einen eindeutigen Schemamorphismus $t'\colon X \times_S Y \to (X \times_S Y)'$, sodass das analoge Diagramm kommutiert. Schreibt man nun diese beiden Diagramme zusammen, so macht $t't\colon (X \times_S Y)' \to (X \times_S Y)'$ das gesamte Diagramm kommutativ, ebenso wie die Identität id. Die universelle Eigenschaft des Faserprodukts $(X \times_S Y)'$ verspricht aber einen eindeutigen solchen Schemamorphismus, also ist $t't = \mathrm{id}$. Vertauscht man anfänglich die Rollen der beiden Faserprodukte, so bekommt man analog $tt' = \mathrm{id}$ und die Behauptung ist gezeigt. □

Lemma 11.4. *Sei S ein Schema, dann definiert das Faserprodukt über S einen Funktor*

$$
\begin{array}{rccc}
- \times_S - \colon & \mathbf{Sch}/S \times \mathbf{Sch}/S & \to & \mathbf{Sch}/S \\
& (X, Y) & \mapsto & X \times_S Y \\
& (f, g) & \mapsto & f \times g
\end{array}
$$

wobei für zwei Morphismen $f\colon X \to X'$ und $g\colon Y \to Y'$ in der Kategorie $\mathbf{Sch}/S$ der Morphismus $f \times g\colon X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ gegeben ist durch die universelle Eigenschaft des Faserprodukts $X' \times_S Y'$ mit Hinblick auf das kommutative Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr, dashed, "f\times g"] & & X \arrow[dr, "f"] & \\
Y \arrow[drr, "g"'] & X' \times_S Y' \arrow[rr] \arrow[d] & & X' \arrow[d] \\
& Y' \arrow[rr] & & S.
\end{tikzcd}
$$

Es gibt außerdem die folgenden in Objekten X, Y und Z in $\mathbf{Sch}/S$ natürlichen Isomorphismen.

$$
\begin{array}{rcl}
X \times_S S & \cong & X \\
X \times_S Y & \cong & Y \times_S X \\
(X \times_S Y) \times_S Z & \cong & X \times_S (Y \times_S Z)
\end{array}
$$

(Es ist die Kategorie $\mathbf{Sch}/S$ mit dem Faserprodukt über S und der Einheit S eine symmetrische monoidale Kategorie.)

Beweis. Dieses folgt direkt aus der universellen Eingenschaft des Faserprodukts. □

Lemma 11.5. *Man betrachte das kommutative Diagramm*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\
S'' \arrow[r] & S' \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
$$

von Schemata, wobei das rechte Quadrat ein Faserprodukt ist. Dann ist das linke Quadrat ein Faserprodukt genau dann, wenn das äußere Rechteck ein Faserprodukt ist.

Beweis. Dieses folgt direkt aus der universellen Eingenschaft des Faserprodukts und ist eine Übungsaufgabe. □

Lemma 11.6. *Sind $S = \mathrm{Spec}(R)$ und $X = \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R)$, $Y = \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(R)$ affine S-Schemata, so existiert das Faserprodukt von X und Y über S und ist gegeben durch die Anwendung von* Spec *auf das kommutative Diagramm*

$$
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "s_B"] \arrow[d, "s_A"'] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & A \otimes_R B
\end{tikzcd}
$$

gegeben durch das Tensorprodukt.

Beweis. Ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[drr, bend left, "p"] \arrow[dr, bend right, "q"'] & & \\
& \mathrm{Spec}(A \otimes_R B) \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & \mathrm{Spec}(A) \arrow[d] \\
& \mathrm{Spec}(B) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(R)
\end{tikzcd}$$

gegeben, so korrespondieren nach Satz 9.20 die Schemamorphismen $t\colon T \to \mathrm{Spec}(A \otimes_R B)$ zu Ringabbildungen $A \otimes_R B \to \mathcal{O}_T(T)$ und die Behauptung, dass es eine solche eindeutige Ringabbildung gibt, die alles kommutativ macht, ist genau die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts. □

Lemma 11.7. *Sei S ein Schema, X, $Y \in \mathbf{Sch}/S$ und der Strukturmorphismus $j\colon Y \hookrightarrow S$ eine offene Immersion. Dann existiert das Faserprodukt*

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, hook, "j"] & S.
\end{tikzcd}$$

und sein unterliegender topologischer Raum ist das Urbild $f^{-1}(Y)$ mit der Unterraumtopologie von X. Außerdem ist p_X ebenfalls eine offene Immersion.

Beweis. Wir betrachten das topologische Faserprodukt

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(Y) \arrow[r, hook, "p_X"] \arrow[d] & {|X|} \arrow[d, "f"] \\
{|Y|} \arrow[r, hook] & {|S|}
\end{tikzcd}$$

und definieren die Struktur eines lokalgeringten Raums auf $f^{-1}(Y)$ durch Einschränkung

$$(X \times_S Y, \mathcal{O}_{X \times_S Y}) := (f^{-1}(Y), \mathcal{O}_{X|f^{-1}(Y)})$$

der Strukturgarbe von X. Dieses ist ein Schema nach Lemma 10.8. Ist nun ein anderes Schema T mit Abbildungen $p\colon T \to X$ und $q\colon T \to Y$ gegeben, sodass das Diagramm (11.1) kommutiert, so induziert dieses insbesondere ein kommutatives Diagramm (11.1) auf unterliegenden topologischen Räumen und wir bekommen durch die universelle Eigenschaft des Faserprodukts dort eine eindeutige Abbildung $t'\colon |T| \to |X \times_S Y|$ von topologischen Räumen, sodass das gesamte Diagramm auf unterliegenden topologischen Räumen kommutiert. Wir haben also die Situation

$$\begin{tikzcd}
{|T|} \arrow[drr, bend left, "|p|"] \arrow[dr, "t'"] & & \\
& {|X \times_S Y|} \arrow[r, hook, "|p_X|"] & {|X|}
\end{tikzcd}$$

auf topologischen Räumen gegeben und es genügt zu zeigen, dass t' einer eindeutigen Abbildung von Schemata unterliegt. Nun gilt aber für eine offene Menge $U \subseteq |X \times_S Y|$, dass

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{X \times_S Y}(U) &= \\
\mathcal{O}_X(U) &\xrightarrow{p^\sharp(U)} \mathcal{O}_T(|p|^{-1}(U)) \\
&= \mathcal{O}_T(t'^{-1}|p_X|^{-1}(U)) \\
&= \mathcal{O}_T(t'^{-1}(U)) \\
&= t'_*\mathcal{O}_T(U)
\end{aligned}$$

und dieser Garbenmorphismus ist also durch eine eindeutige Weise gegeben. □

Satz 11.8. *Sei S ein Schema und X, $Y \in \mathbf{Sch}/S$. Dann existiert das Faserprodukt*

$$\begin{tikzcd}
X \times_S Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"] & S.
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir haben die Existenz bereits in Lemma 11.6 gezeigt, falls X, Y, S affin sind.

Angenommen, das Faserprodukt existierte, wenn S und X beliebig sind und Y affin. Sei $\{V_k \hookrightarrow Y\}$ eine offene Überdeckung von Y durch affine Schemata V_k. Betrachte für jedes k das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(X \times_S V_k) \times_{V_k} (V_k \cap V_{k'}) \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d, dashed] & X \times_S V_k \arrow[r, dashed] \arrow[d] & X \times_S Y \arrow[r, dashed, "p_X"] \arrow[d, dashed, "p_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\
V_k \cap V_{k'} \arrow[r, hook, dashed] & V_k \arrow[r, hook] & Y \arrow[r, "g"] & S.
\end{tikzcd}$$

Wir wissen nach Voraussetzung, dass das ungestrichelte Rechteck für jeden Index k existiert und ein Faserprodukt ist. Natürlich wollen wir Satz 10.15 benutzen und $X \times_S V_k$ zu dem Schema $X \times_S Y$ verkleben. Betrachtet man einen zweiten Index k' und den Durchschnitt $V_k \cap V_k'$ (dieser muss nicht affin sein!), so existieren nach Lemma 11.7 die Faserprodukte $(X \times_S V_k) \times_{V_k} (V_k \cap V_{k'})$ und $(X \times_S V_k') \times_{V_k'} (V_k \cap V_{k'})$. Diese sind aber nach Lemma 11.5 jeweils durch einen eindeutigen Isomorphismus $\varphi_{k'k}$ isomorph zu $X \times_S (V_k \cap V_{k'})$ und wiederum durch die Eindeutigkeit ist die Kozykelbedingung erfüllt. Also können wir Satz 10.15 benutzen und das Schema $X \times_S Y$ konstruieren. Genau die im Beweis von Lemma 11.7 sieht man, dass dies tatsächlich dieses universelle Eigenschaft des Faserprodukts hat.

Durch Symmetrie von X und Y bleibt nur noch zu zeigen, dass das Faserprodukt $X \times_S Y$ existiert, wenn X und Y beide affin sind. Dazu wählen wir eine offene affine Überdeckung $\{S_i \hookrightarrow S\}$. Wir betrachten den Würfel

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_S Y \arrow[rr] \arrow[dd] & & X \arrow[dd] \\
X_i \times_{S_i} Y_i \arrow[ur, hook] \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_i \arrow[ur, hook] \arrow[dd] & \\
 & Y \arrow[rr] & & S \\
Y_i \arrow[ur, hook] \arrow[rr] & & S_i \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

wobei die rechte, die untere und die vordere Seite per Definition Faserprodukte sind. Wir möchten zeigen, dass auch die hintere Seite ein Faserprodukt ist. Dieses geht nun analog zu der obigen Betrachtung zum Zusammenkleben. $\square$

Korollar 11.9. *Sei S ein Schema und X, $Y \in \mathbf{Sch}/S$. Sei $\{S_i \hookrightarrow S\}$ eine offene Überdeckung, $X_i := X \times_S S_i$ und $Y_i := Y \times_S S_i$ die jeweiligen Faserprodukte und offene Überdeckungen $\{U_{ij} \hookrightarrow X_i\}$ und $\{V_{ik} \hookrightarrow Y_i\}$ dieser gegeben, so ist*

$$\{U_{ij} \times_{S_i} V_{ik} \hookrightarrow X \times_S Y\}$$

auch eine offene Überdeckung.

Bemerkung 11.10. Es ist der unterliegende topologische Raum $|X \times_S Y|$ eines Faserprodukts $X \times_S Y$ von Schemata nicht unbedingt das topologische Faserprodukt $|X| \times_{|S|} |Y|$ der jeweiligen unterliegenden topologischen Räume der beteiligten Schemata, da beispielsweise $|\mathbb{A}^2| = |\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1|$ nicht die Produkttopologie trägt.

Definition 11.11. Für ein S-Schema X und einen Punkt $s \in S$ heißt das $\operatorname{Spec}(k(s))$-Schema X_s, welches durch das Faserprodukt

$$\begin{tikzcd}
X_s \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}(k(s)) \arrow[r, "i_s"] & S
\end{tikzcd} \tag{11.2}$$

gegeben ist, die *Faser* von X an s, wobei i_s der kanonische Morphismus aus (10.2) ist.

Lemma 11.12. *Ist $f\colon X \to S$ ein S-Schema und $s \in S$ ein Punkt, so ist auch das dem Faserprodukt* (11.2) *unterliegende Diagramm von topologischen Räumen*

$$\begin{tikzcd} & {|X_s|} \arrow[r] \arrow[d] & {|X|} \arrow[d, "|f|"] \\ {*} \cong & {|\operatorname{Spec}(k(s))|} \arrow[r, "|i_s|"] & {|S|} \end{tikzcd}$$

ein Faserprodukt. Es gibt also mit anderen Worten einen Homöomorphismus

$$|X_s| \cong |f|^{-1}(s)$$

topologischer Räume induziert durch den Morphismus $X_s \to X$.

Beweis. Sei $Y \hookrightarrow S$ eine offene affine Umgebung von s. Wir haben in Lemma 11.7 gesehen, dass in diesem Fall $|X \times_S Y| = |f|^{-1}(Y)$ gilt, also die analoge Aussage des zu beweisenden Lemmas füer offene Immersionen. Wegen Lemma 11.5 angewandt auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd} {|X_s|} \arrow[r] \arrow[d] & {|X \times_S Y|} \arrow[r] \arrow[d] & {|X|} \arrow[d, "|f|"] \\ {|\operatorname{Spec}(k(s))|} \arrow[r] & {|Y|} \arrow[r, hook] & {|S|} \end{tikzcd}$$

können wir annehmen, dass S affin ist. Ebenso können wir annehmen, dass X affin ist, denn ist $\{j_i\colon U_i \hookrightarrow X\}$ eine offene Überdeckung, so ist nach Konstruktion des Faserprodukts $\{U_i \times_S \operatorname{Spec}(k(s)) \hookrightarrow X_s\}$ eine offene Überdeckung dessen und es genügte zu zeigen, dass $|U_i \times_S \operatorname{Spec}(k(s))| \cong |fj_i|^{-1}(\operatorname{Spec}(k(s)))$ gilt.

Seien also $S = \operatorname{Spec}(R)$ und $X = \operatorname{Spec}(A)$ und s ein Primideal in R und sei (mit einer Änderung der Bezeichnung) $\operatorname{Spec}(f)\colon \operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(R)$ der vormals mit f bezeichnete Schemamorphismus. Wir haben ein Diagramm (siehe (10.2))

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "l"] \arrow[d, "f"] & R_s \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "g"] & k(s) \arrow[d] \\ A \arrow[r, "l'"] & A \otimes_R R_s \arrow[r, "p'"] & A \otimes_R k(s). \end{tikzcd}$$

Da das Tensorprodukt auf kanonische Weise verträglich ist mit Lokalisierungen, gibt es einen Ringisomorphismus $A \otimes_R R_s \cong (f(R \setminus s))^{-1}A$ und mit Lemma 4.9 induziert $\operatorname{Spec}(l')$ einen Homöomorphismus

$$|\operatorname{Spec}(A \otimes_R R_s)| \cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap f(R \setminus s) = \emptyset\}.$$

Durch die Rechtsexaktheit des Tensorprodukts gibt es ein kommutatives ungestricheltes Diagramm

$$\begin{tikzcd} s_s \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & R_s \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "g"] & k(s) \arrow[d] \\ (g(s_s)) \arrow[r, hook, dashed] & A \otimes_R R_s \arrow[r, two heads, "p'"] & A \otimes_R k(s) \end{tikzcd}$$

mit einer surjektiven Abbildung p'. Nach einer bekannten Eigenschaft des Tensorprodukts ist der Kern des surjektiven Ringhomomorphismus p' gegeben durch das von $g(s_s)$ erzeugte Ideal $(g(s_s))$ in $A \otimes_R R_s$. Mit Lemma 4.9 induziert $\operatorname{Spec}(p')$ einen Homöomorphismus

$$|\operatorname{Spec}(A \otimes_R k(s))| \cong \mathcal{V}(g(s_s)).$$

Insgesamt ist also X_s homöomorph zu dem Unterraum

$$\begin{aligned} |\operatorname{Spec}(A \otimes_R k(s))| &\cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap f(R \setminus s) = \emptyset\} \cap \operatorname{Spec}(l')\mathcal{V}(g(s_s)) \\ &\cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap f(R \setminus s) = \emptyset\} \cap \operatorname{Spec}(l')\mathcal{V}(gl(s)) \\ &\cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap f(R \setminus s) = \emptyset\} \cap \operatorname{Spec}(l')\mathcal{V}(l'f(s)) \\ &\cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap f(R \setminus s) = \emptyset \text{ und } f(s) \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &\cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid f^{-1}(\mathfrak{p}) = s\} \\ &\cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \operatorname{Spec}(f)(\mathfrak{p}) = s\} \\ &\cong \operatorname{Spec}(f)^{-1}(s) \end{aligned}$$

auf die gewünschte Weise. □

Bemerkung 11.13. Nach dem vorherigen Lemma 11.12 können wir ein S-Schema $X \to S$ auffassen als eine Familie von $\operatorname{Spec}(k(s))$-Schemata X_s parametrisiert durch die Punkte s von S.

Beispiel 11.14. Sei k ein Körper und betrachte das $\mathbb{A}^1_k$-Schema

$$\operatorname{Spec}(k[X,Y,Z]/(XY-Z)) \mapsto \operatorname{Spec}(k[Z]) = \mathbb{A}^1_k$$

gegeben durch die Inklusion $k[Z] \hookrightarrow k[X,Y,Z] \twoheadrightarrow k[X,Y,Z]/(XY-Z)$. Betrachte den abgeschlossenen Punkt $s = (Z-z) \in \mathbb{A}^1_k$ mit $z \in k$. Dann ist $X_s = \operatorname{Spec}(A_s)$ mit

$$A_s = k[X,Y,Z]/(XY-Z) \otimes_{k[Z]} k[Z]/(Z-z) \cong k[X,Y]/(XY-z)$$

und X_s ist irreduzibel genau dann, wenn $z \neq 0$.

Beispiel 11.15. Sei k ein Körper und betrachte das $\mathbb{A}^1_k$-Schema

$$\operatorname{Spec}(k[X,Y]/(XY)) \mapsto \operatorname{Spec}(k[T]) = \mathbb{A}^1_k$$

gegeben durch $k[T] \to k[X,Y]/(XY)$ mit $T \mapsto X+Y+(XY)$. Betrachte den abgeschlossenen Punkt $s = (T-t) \in \mathbb{A}^1_k$ mit $t \in k$. Dann ist $X_s = \operatorname{Spec}(A_s)$ mit

$$A_s = k[X,Y]/(XY) \otimes_{k[T]} k[T]/(T-t) \cong k[X,Y]/(XY, X+Y-t) \cong k[X]/(X(X-t))$$

also $A_s \cong k[X]/(X^2)$ falls $t=0$ und $A_s \cong k \times k$ sonst nach dem Chinesischen Restsatz A.2.

Lemma 11.16. *Seien X und Y zwei S-Schemata. Dann ist die (topologische) Faser der kanonischen surjektiven Abbildung*

$$|X \times_S Y| \twoheadrightarrow |X| \times_{|S|} |Y|$$

an einem Punkt $(x,s,y) \in |X| \times_{|S|} |Y|$ gegeben durch den Raum $|\operatorname{Spec}(k(x) \otimes_{k(s)} k(y))|$.

Beweis. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & {|X \times_S Y|} \arrow[rr, "t"] \arrow[ddr, bend right] & & {|X| \times_{|S|} |Y|} \arrow[ddl, bend left] \\
{|\operatorname{Spec}(k(x)) \times_S Y|} \arrow[ur] \arrow[rr, "t'"] \arrow[ddr, bend right] & & {|\operatorname{Spec}(k(x))| \times_{|S|} |Y|} \arrow[ur] \arrow[ddl, bend left] & \\
 & & {|X|} & \\
 & {|\operatorname{Spec}(k(x))|} \arrow[ur, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

von topologischen Räumen, das dadurch entsteht, dass wir das hintere Dreieck entlang $|\operatorname{Spec}(k(x))| \to |X|$ zurückziehen. Alle vorkommenden Quadrate sind Faserprodukte topologischer Räume und das linke Quadrat wegen des vorherigen Lemmas 11.12. Es ist also die Faser von t an (x,s,y) die gleiche, wie die Faser von t' an diesem Punkt. Das analoge Argument für $|\operatorname{Spec}(k(y))| \to |Y|$ zeigt, dass wir nur die Faser der Abbildung

$$|\operatorname{Spec}(k(x)) \times_S \operatorname{Spec}(k(y))| \to |\operatorname{Spec}(k(y))| \times_{|S|} |\operatorname{Spec}(k(y))|$$

an (x,s,y) auszurechnen brauchen (Die Quelle dieser Abbildung ist übrigens schon isomorph zu der gesuchten Faser, da das Ziel der Abbildung einpunktig ist.). Um das gleiche Argument zu benutzen und weiter an $|\operatorname{Spec}(k(s))| \to |S|$ zurückzuziehen, müssen wir noch wissen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
{|\operatorname{Spec}(k(x))|} \arrow[r, equal] \arrow[d] & {|\operatorname{Spec}(k(x))|} \arrow[d] \\
{|\operatorname{Spec}(k(s))|} \arrow[r] & {|S|}
\end{tikzcd}$$

ein Faserprodukt ist. Dieses können wir mit Lemma 11.12 auch vor der Anwendung von $|-|$ zeigen. Sobald wir dieses gezeigt haben folgt, dass die gesuchte Faser von t genau die Faser von

$$|\operatorname{Spec}(k(x)) \times_{\operatorname{Spec}(k(s))} \operatorname{Spec}(k(y))| \to |\operatorname{Spec}(k(y))| \times_{|\operatorname{Spec}(k(s))|} |\operatorname{Spec}(k(y))|$$

ist, aber das ist genau die Quelle dieser Abbildung, da das Ziel eine einpunktige Menge ist.

Wir können wieder annehmen, dass $S = \mathrm{Spec}(R)$ und $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin sind. Es bleibt also zu zeigen, dass

$$k(x) \otimes_R k(s) \cong k(x)$$

gilt (Man beachte, dass sogar das Tensorprodukt zweier Körper über einem Körper nicht unbedingt ein Körper ist.). Betrachte die kanonische Abbildung $R \to R_s \twoheadrightarrow R_s/s_s = k(s)$ und $f\colon R \to A$. Wir schreiben $k(x) \otimes_R k(s) \cong (k(x) \otimes_R R_s) \otimes_{R_s} k(s)$. Es ist nun zunächst $k(x) \otimes_R R_s \cong k(x)$, denn dieses Tensorprodukt ist isomorph zur Lokalisierung des Rings $k(x)$ an dem Bild von $R \setminus s$ darin. Da in einem Körper soewieso schon jedes Element $\neq 0$ invertierbar ist, genügt es zu zeigen, dass dieses Bild keinen Nullteiler, also nicht die Null enthält. Es gibt aber mit der Voraussetzung, dass x auf s abgebildet wird, also $f^{-1}(x) = s$, ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ R_s \arrow[r] \arrow[d] & A_x \arrow[d] \\ k(s) \arrow[r] & k(x) \end{tikzcd} \tag{11.3}$$

und da alle Elemente in $R\setminus s$ auf Einheiten in $k(s)$ abgebildet werden, bleiben diese Einheiten in dem Bild von $k(s) \hookrightarrow k(x)$.

Es bleibt also zu zeigen, dass $k(x) \otimes_{R_s} k(s) \cong k(x)$. Betrachte dafür, wie im Beweis von Lemma 11.12, das Diagramm

$$\begin{tikzcd} s_s \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed] & R_s \arrow[r, two heads] \arrow[d] & k(s) \arrow[d] \\ (\text{Bild von } s_s) \arrow[r, hook, dashed] & k(x) \otimes_{R_s} R_s \arrow[r, two heads, "p'"] & k(x) \otimes_{R_s} k(s). \end{tikzcd}$$

Um zu zeigen, dass p' ein Isomorphismus ist, müssen wir also sehen, wieso das Bild von s_s in $k(x)$ Null ist. Dieses folgt aber direkt aus dem Diagramm (11.3). □

12. Modulgarben

Sei X ein topologischer Raum. Sind $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X)$ zwei Prägarben, so definiert die Zuordnung

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F} \times \mathcal{G}\colon & \mathrm{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathcal{S} \\ & U & \mapsto & \mathcal{F}(U) \times \mathcal{G}(U) \end{array}$$

mit dem Produkt der Einschränkungsabbildungen eine Prägarbe $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \in \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X)$ die eine Garbe ist, falls $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben sind.

Definition 12.1. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein $\mathcal{O}_X$*-Modul* ist eine Garbe von abelschen Gruppen $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}^{\mathbf{Ab}}(X)$ zusammen mit einem Garbenmorphismus

$$\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

von Mengen, der *Skalarmultiplikation* genannt wird, sodass für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Abbildung

$$\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

der abelschen Gruppe $\mathcal{F}(U)$ die Struktur eines $\mathcal{O}_X(U)$-Moduls gibt.

Eine Garbenabbildung $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen $\mathcal{O}_X$-Moduln heißt ein *Homomorphismus* von $\mathcal{O}_X$-Moduln (oder $\mathcal{O}_X$*-linear*), falls für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Abbildung $f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismus ist.

Es bezeichne $\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X)$ die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln.

Eine $\mathcal{O}_X$*-Algebra* ist eine Garbe von Ringen $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}^{\mathbf{Ring}}(X)$ zusammen mit einem Morphismus $\mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ von Ringgarben.

Ein $\mathcal{O}_X$*-Algebrenhomomorphismus* $f\colon F \to \mathcal{G}$ ist ein Morphismus von Ringgarben, sodass das Dreieck

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{F} \arrow[rr, "f"] & & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Es bezeichne $\mathbf{Alg}(\mathcal{O}_X)$ die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Algebren.

Beispiel 12.2.

(1) Sei X ein topologischer Raum, $ac\mathbb{Z}$ die konstante Garbe von Ringen auf X aus Definition 7.19. Betrachte den geringten Raum $(X, ac\mathbb{Z})$. Dann ist ein $ac\mathbb{Z}$-Modul $\mathcal{F}$ genau eine Garbe von abelschen Gruppen auf X. Genauer gibt es eine Äquivalenz $\mathbf{Mod}(ac\mathbb{Z}) \cong \mathbf{Sh}^{\mathbf{Ab}}(X)$ von Kategorien.
(2) Betrachtet man den gleichen geringten Raum $(X, ac\mathbb{Z})$ wie in Teil (1), so ist eine $ac\mathbb{Z}$-Algebra genau eine Garbe von Ringen Gruppen auf X. Genauer gibt es eine Äquivalenz $\mathbf{Alg}(ac\mathbb{Z}) \cong \mathbf{Sh}^{\mathbf{Ring}}(X)$ von Kategorien.
(3) Ist A ein Ring und $X = *$ ein einpunktiger topologischer Raum mit Ringgarbe $\mathcal{O}_X$ gegeben durch $\mathcal{O}_X(X) := A$, so entspricht ein $\mathcal{O}_X$-Modul genau einem A-Modul. Genauer gibt es eine Äquivalenz von Kategorien $\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X) \cong \mathbf{Mod}(A)$ und ebenso $\mathbf{Alg}(\mathcal{O}_X) \cong \mathbf{Alg}(A)$.
(4) Ist $(F, F^\sharp)\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung geringter Räume, so ist die zugehörige Abbildung $F^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to F_*\mathcal{O}_X$ von Garben auf Y eine $\mathcal{O}_Y$-Algebra.

Definition 12.3. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $x \in X$. Die Zuordnung

$$\begin{array}{cccc} (-)_x\colon & \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X) & \to & \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{X,x}) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \operatorname*{colim}_{x \in U \in \mathrm{Ouv}(X)^{op}} \mathcal{F}(U) \\ & f & \mapsto & f_x \end{array}$$

ist ein Funktor und heißt der *Halm von $\mathcal{F}$ an x*, analog zu Definition 7.10.

Definition 12.4. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein $\mathcal{O}_X$*-Untermodul* eines $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{F}$ ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$ zusammen mit einem Homomorphismus $\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln, der schnittweise injektiv ist. Wir schreiben in diesem Fall $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}$

Ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul des $\mathcal{O}_X$-Moduls $\mathcal{O}_X$ heißt eine *Idealgarbe*.

Im Folgenden listen wir einige Eigenschaften von und Konstruktionen in der Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Moduln auf. Sei hierfür stets $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul.

– (**Quotienten**) Ist $G \hookrightarrow \mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul, so ist die Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$$

nicht unbedingt eine Garbe. Ihre Garbifizierung ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ und heißt der *Quotient von $\mathcal{F}$ nach $\mathcal{G}$*. Da die Garbifizierung die Halme nicht ändert, gilt für einen Punkt $x \in X$, dass $(\mathcal{F}/\mathcal{G})_x \cong \mathcal{F}_x/\mathcal{G}_x$.

– (**Kerne**) Ist $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist die Prägarbe

$$U \mapsto \mathrm{Ker}(f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

eine Garbe und ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul von $\mathcal{F}$. Sei heißt der *Kern von f* und wird mit $\mathrm{Ker}(f)$ bezeichnet. Da in der Kategorie von abelschen Gruppen filtrierte Kolimiten mit Faserprodukten kommutieren, gilt für einen Punkt $x \in X$, dass $\mathrm{Ker}(f)_x \cong \mathrm{Ker}(f_x)$. Da f schnittweise injektiv ist genau dann, wenn f halmweise injektiv ist, ist dieses außerdem äquivalent zu $\mathrm{Ker}(f) = 0$.

– (**Bilder**) Ist $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist die Prägarbe

$$U \mapsto \mathrm{Im}(f(U)\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

nicht unbedingt eine Garbe. Ihre Garbifizierung ist ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathrm{Im}(f) \hookrightarrow \mathcal{G}$ und heißt das *Bild von f*. Es gilt für einen Punkt $x \in X$, dass $\mathrm{Im}(f)_x \cong \mathrm{Im}(f_x)$. Durch die

Kompatibilität von Quotienten, Kernen und Bildern mit Halmen und der entsprechenden Aussage für abelsche Gruppen, gibt es einen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus

$$\mathcal{F}/\operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im}(f).$$

– (**Exakte Folgen**) Eine Folge

$$\mathcal{F}' \xrightarrow{f'} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F}''$$

von Homomorphismen von $\mathcal{O}_X$-Moduln heißt *exakt*, falls $\operatorname{Im}(f') = \operatorname{Ker}(f)$. Nach den vorherigen Bemerkungen ist dieses äquivalent dazu, dass für alle $x \in X$ die Folge

$$\mathcal{F}' \xrightarrow{f'_x} \mathcal{F} \xrightarrow{f_x} \mathcal{F}''$$

von Homomorphismen von $\mathcal{O}_{X_x}$-Moduln exakt ist. Ist $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f'} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F}''$ eine exakte Folge von $\mathcal{O}_X$-Moduln und $U \subseteq X$ eine offene Menge, so ist die Folge

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)$$

exakt.

– (**Direkte Summen und Produkte**) Ist $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine Familie von $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist die Prägarbe

$$U \mapsto \prod_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(U)$$

eine Garbe und mit komponentenweiser Struktur ein $\mathcal{O}_X$-Modul, der mit $\prod_i \mathcal{F}_i$ bezeichnet wird. Für einen Punkt $x \in X$ ist der kanonische induzierte $\mathcal{O}_{X,x}$-Modulhomomorphismus $(\prod_i \mathcal{F}_i)_x \to \prod_i (\mathcal{F}_i)_x$ nicht unbedingt ein Isomorphismus. Die Prägarbe

$$U \mapsto \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}(U)$$

ist nicht unbedingt eine Garbe und dessen Garbifizierung ist (mit komponentenweiser Struktur) ein $\mathcal{O}_X$-Modul, der mit $\bigoplus_i \mathcal{F}_i$ bezeichnet wird. Für einen Punkt $x \in X$ ist $(\bigoplus_i \mathcal{F}_i)_x \to \bigoplus_i (\mathcal{F}_i)_x$ ein $\mathcal{O}_{X,x}$-Modulisomorphismus. Die kanonische $\mathcal{O}_X$-Untermodul Abbildung $\bigoplus_i \mathcal{F}_i \hookrightarrow \prod_i \mathcal{F}_i$ ist ein Isomorphismus, falls $\mathcal{I}$ eine endliche Indexmenge ist.

– (**Erzeugung von Untermoduln**) Sei $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ eine beliebige Familie von $\mathcal{O}_X$-Untermoduln $\mathcal{F}_i \hookrightarrow \mathcal{F}$. Man definiert den $\mathcal{O}_X$-Untermodul

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}_i := \operatorname{Im}(\textstyle\bigoplus_i \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{F}.$$

Dieses ist die Garbifizierung der durch $U \mapsto \sum_i \mathcal{F}_i(U)$ gegebenen Prägarbe. Da Bilder und direkte Summen kompatibel sind mit Halmen, gibt es für ein $x \in X$ einen $\mathcal{O}_{X,x}$-Modulhomomorphismus $(\sum_i \mathcal{F}_i)_x \cong \sum_i (\mathcal{F}_i)_x$. Außerdem definiert man

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}_i := \operatorname{Ker}(\mathcal{F} \to \textstyle\prod_i (\mathcal{F}/\mathcal{F}_i)) \hookrightarrow \mathcal{F}$$

und diese Garbe ist genau die durch $U \mapsto \bigcap_i \mathcal{F}_i(U)$ gegebene Prägarbe. Für $x \in X$ ist der kanonische $\mathcal{O}_{X,x}$-Modulhomomorphismus $(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{F}_i)_x \to \bigcap_{i\in\mathcal{I}} (\mathcal{F}_i)_x$ nicht unbedingt ein Isomorphismus. Dieses ist aber der Fall, wenn $\mathcal{I}$ eine endliche Indexmenge ist.

– (**Tensorprodukte**) Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist die Prägarbe

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

mit dem Tensorprodukt der Einschränkungsabbildungen als Einschränkungsabbildungen nicht unbedingt eine Garbe. Ihre Garbifizierung ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul (mit offensichtlicher Struktur) $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ und heißt das *Tensorprodukt von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$*. Es gilt für einen Punkt $x \in X$, dass $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x \cong \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$, da Tensorprodukte von abelschen Gruppen mit filtrierten Kolimiten verträglich sind.

Ist $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ eine Idealgarbe, so definiert man den $\mathcal{O}_X$-Untermodul

$$\mathcal{I}\mathcal{F} := \operatorname{Im}(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \to \mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{F},$$

bezüglich der Multiplikationsabbildung und für $x \in X$ gilt $(\mathcal{I}\mathcal{F})_x \cong \mathcal{I}_x\mathcal{F}_x$.

– (**Interner Hom**) Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln, so kann man zwei $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismen $f, f'\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ schnittweise addieren und mit einem Element $\lambda \in \mathcal{O}_X(X)$ durch $(\lambda f)(U) := \lambda_{|U} f(U)$ skalarmultiplizieren. Die Menge der $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismen zwischen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ wird also zu einem $\mathcal{O}_X(X)$-Modul

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Die Zuordnung

$$U \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U})$$

definiert mit Lemma 10.12 eine Garbe, also einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Für einen Punkt $x \in X$ ist der kanonische $\mathcal{O}_{X,x}$-Modulhomomorphismus

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

nicht unbedingt ein Isomorphismus. Dieses ist aber der Fall mit Endlichkeitsbedingungen an $\mathcal{F}$, wie wir später sehen werden. Es ist die Kategorie $\mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X)$ mit dem Tensorprodukt, der Einheit $\mathcal{O}_X$ und dem internen Hom $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}$ eine sonegannte abgeschlossen monoidale Kategorie, es gibt also einen in $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$, G und $\mathcal{H}$ natürlichen Isomorphismus

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}, \mathcal{H}) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H})).$$

– (**Erzeugung durch globale Schnitte**) Für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{F}(X) \\ f & \mapsto & f(X)(1) \end{array}$$

von $\mathcal{F}(X)$-Moduln, wobei die Umkehrabbildung ein Element $a \in \mathcal{F}(X)$ schickt auf die $\mathcal{O}_X$-Modulabbildung $f\colon \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$, die durch $f(U)\colon \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{F}(U))$ mit $1 \mapsto a_{|U}$ gegeben ist. Für eine beliebige Menge $\mathcal{I}$ haben wir folglich auch einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\textstyle\bigoplus_{\mathcal{I}} \mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \cong \prod_{\mathcal{I}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \cong \prod_{\mathcal{I}} \mathcal{F}(X)$$

von $\mathcal{F}(X)$-Moduln und wir sagen, dass eine Familie $(a_i)_{i\in\mathcal{I}}$ von Schnitten $a_i \in \mathcal{F}(X)$ den $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ erzeugt, wenn die korrespondierende Abbildung $\bigoplus_{\mathcal{I}} \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ schnittweise surjektiv ist. Dieses ist der Fall genau dann, wenn für alle $x \in X$ der $\mathcal{O}_{X,x}$-Modul $\mathcal{F}_x$ durch die Familie $(a_{i,x})_{i\in\mathcal{I}}$ erzeugt wird.

In Definition 9.2 und dem anschließenden Lemma 9.3 haben wir für eine stetige Abbildung $F\colon X \to Y$ das direkte Bild

$$\begin{array}{rccc} F_*\colon & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) & \to & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & \mathcal{F}(F^{-1}(-)) \end{array}$$

betrachtet. Dieser Funktor hat in den folgenden besonderen Fällen einer stetigen Abbildung F eine besondere Bezeichnung.

Beispiel 12.5.

(1) Betrachtet man einen topologischen Raum X und die stetige Abbildung $F\colon X \to *$, so gilt in diesem Fall

$$F_*(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$$

wobei wir die Identifikation $\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(*) \cong \mathcal{S}$ benutzen, die durch $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(*)$ gegeben ist. Dieses sind also die *globalen Schnitte*.

(2) Betrachtet man einen topologischen Raum X, einen Punkt $x \in X$, die stetige Abbildung $F\colon \{x\} \hookrightarrow X$ und ein Objekt $A \in \mathcal{S}$, so ist dadurch eine eindeutige Garbe auf $\{x\}$ gegeben, die ebenfalls mit A bezeichnet wird. In diesem Fall heißt $F_*(A)$ (oder eine dazu isomorphe Garbe) auch *Wolkenkratzergarbe* an x mit Wert A. Eine Wolkenkratzergarbe ist also ein spezielles direktes Bild. Man überlegt sich leicht, dass für den Halm der Wolkenkratzergarbe F_*A an einem Punkt $x' \in X$ gilt

$$(F_*A)_{x'} \cong \begin{cases} A & \text{falls } x' \in \overline{\{x\}}, \\ * & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $*$ das terminale Objekt der Kategorie $\mathcal{S}$ bezeichne.

(3) Ist $F\colon Z \hookrightarrow X$ die Inklusion eines abgeschlossenen Unterraums, so heißt $F_*(\mathcal{F})$ auch die *Ausdehung durch Null* von $\mathcal{F}$. Für den Halm dieser Garbe an einem Punkt $x' \in X$ gilt:

$$(F_*\mathcal{F})_{x'} \cong \begin{cases} \mathcal{F}_{x'} & \text{falls } x' \in Z, \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun möchten wir eine verwandte Konstruktion, das *inverse Bild*, definieren. Dieses haben wir schon in zwei Spezialfällen kennengelernt, nämlich als Halm (Definition 7.10) und als Einschränkung (Definition 10.1).

Definition 12.6. Sei $F\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Die Zuordnung

$$\begin{array}{rccc} F^+\colon & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(Y) & \to & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \\ & \mathcal{G} & \mapsto & \left(U \mapsto \operatorname*{colim}_{F(U)\subseteq V \in \mathrm{Ouv}(Y)^{op}} \mathcal{G}(V)\right) \end{array}$$

wobei $F^+(\mathcal{G})$ die offensichtlichen durch $\mathcal{G}$ induzierten Einschränkungsabbildungen besitzt und wobei eine Abbildung $f\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ auf die induzierte Abbildung $F^+(\mathcal{G}) \to F^+(\mathcal{G}')$ geschickt wird, ist ein Funktor und heißt das *inverse Bild* (unter F). Hier ist wieder, genau wie beim Halm,

$$\operatorname*{colim}_{F(U)\subseteq V \in \mathrm{Ouv}(Y)^{op}} \mathcal{G}(V) := \bigsqcup_{\substack{V \in \mathrm{Ouv}(Y) \\ F(U)\subseteq V}} \mathcal{G}(V)/_\sim$$

wobei $(s, V) \sim (t, V')$ genau dann, wenn eine in Y offene Menge $V'' \subseteq V \cap V'$ um $F(U)$ existiert mit $s_{|V''} = t_{|V''}$. Es bezeichne

$$\begin{array}{rccc} F^-\colon & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y) & \to & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) \\ & \mathcal{G} & \mapsto & a\mathcal{F}^+(\mathcal{G}) \end{array}$$

den durch die Garbifizierung gegebenen Funktor, der auch das *inverse Bild* genannt wird.

Beispiel 12.7.

(1) Betrachtet man einen topologischen Raum X, einen Punkt $x \in X$ und die stetige Abbildung $F\colon \{x\} \hookrightarrow X$, so gilt in diesem Fall

$$F^-(\mathcal{G}) \cong F^+(\mathcal{G}) \cong \mathcal{G}_x$$

durch direkten Vergleich der Definition 12.6 mit der Definition 7.10. Genauer gesagt, ist für eine Garbe $\mathcal{G}$ die Prägarbe $F^+(\mathcal{G})$ schon eine Garbe und wir benutzen die Identifikation $\mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(\{x\}) \cong \mathcal{S}$, die durch $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(\{x\})$ gegeben ist.

(2) Die Definition von $F^+(\mathcal{G})(U)$ bedeutet informell, dass wir gerne $F(U)$ in $\mathcal{G}$ einsetzen möchten (analog dazu, wie wir $F^{-1}(V)$ in $\mathcal{F}$ bei dem direkten Bild eingesetzt haben), dieses aber (im Gegensatz zu $F^{-1}(V)$ beim direkten Bild) kein Element von $\mathrm{Ouv}(Y)$ sein muss. Daher „approximieren“ wir $F(U)$ durch offene Mengen $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$ auf die beste Weise. Getreu dieser Sichtweise, ist die Beschreibung des inversen Bilds besonders einfach für offene Abbildungen $F\colon X \to Y$. In diesem Fall ist für eine offene Menge $U \subseteq X$ auch $F(U) \subseteq Y$ offen und der Kolimes in der Definition 12.6 hat dieses terminales Objekt. Daher gilt in diesem Fall

$$\begin{array}{rccc} F^+\colon & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(Y) & \to & \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(X) \\ & \mathcal{G} & \mapsto & \mathcal{G}(F(-)). \end{array}$$

Ebenso wie in Lemma 9.3 bewahrt für eine offene Einbettung $F\colon X \hookrightarrow Y$ das inverse Bild Garben und es gilt

$$\begin{array}{rccc} F^-\colon & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y) & \to & \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) \\ & \mathcal{G} & \mapsto & \mathcal{G}(F(-)). \end{array}$$

Dieses haben wir schon in Definition 10.1 gesehen. Ist genauer $F\colon U \hookrightarrow X$, so gilt für die Einschränkung $F^+ = (-)_{|U}$.

(3) Wir haben in einer Übung ein Beispiel gesehen, bei dem $F^+(\mathcal{G})$ für eine Garbe $\mathcal{G}$ keine Garbe war.

Bemerkung 12.8. YonedaLemma

Lemma 12.9. *Sei $F\colon X \to Y$, $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X)$ und $\mathcal{G} \in \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y)$. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(F^{-}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \quad \xrightarrow[\varphi]{\cong} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, F_*\mathcal{F})$$

oder mit anderen Worten eine Adjunktion

$$F^{-} : \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(Y) \rightleftarrows \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X) : F_*$$

und die entsprechende Aussage gilt auch für Prägarben.

Beweis. Wir definieren zunächst φ und deren Umkehrabbildung φ^{-1}. Sei also eine Abbildung $\alpha\colon F^{-}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ von Garben auf X gegeben und sei $V \subseteq Y$ eine offene Menge. Wir definieren $\varphi(\alpha)(V)$ als die Komposition

$$\mathcal{G}(V) \to F^{+}\mathcal{G}(F^{-1}(V)) \to F^{-}\mathcal{G}(F^{-1}(V)) \xrightarrow{\alpha(F^{-1}(V))} \mathcal{F}(F^{-1}(V)) = F_*(\mathcal{F}(V)).$$

wobei die erste Abbildung dadurch definiert ist, dass $FF^{-1}(V) \subseteq V$ und die zweite durch die Garbifizierung.

Für die Umkehrabbildung sei $\beta\colon \mathcal{G} \to F_*\mathcal{F}$ eine Abbildung von Garben auf Y. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, genügt es durch die universelle Eigenschaft der Garbifizierung eine Abbildung $F^{+}\mathcal{G} \to \mathcal{F}$ von Prägarben auf X zu konstruieren. Sei dafür $U \subseteq X$ offen und nehme ein Element $a \in F^{+}\mathcal{G}(U)$. Durch die Definition des Kolimes gibt es einen Repräsentanten $b \in \mathcal{G}(V)$ davon, wobei $V \subseteq Y$ offen ist mit $F(U) \subseteq V$. Es folgt, dass $U \subseteq F^{-1}(V)$ und wir schicken a auf das Bild von b unter der Komposition

$$\mathcal{G}(V) \xrightarrow{\beta(V)} F_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(F^{-1}(V)) \xrightarrow{\mathcal{F}((-)_{|U})} \mathcal{F}(U).$$

Es ist eine Übung zu zeigen, dass diese beiden Zuordnungen zueinander invers sind. □

Lemma 12.10. *Seien $F\colon X \to Y$ und $G\colon Y \to Z$ zwei stetige Abbildungen, dann gilt*

$$\begin{array}{rcl} (GF)_* & \cong & G_*F_* \\ (GF)^{+} & \cong & F^{+}G^{+} \\ (GF)^{-} & \cong & F^{-}G^{-} \end{array}$$

und aus der letzten Identität folgt für den Spezialfall $\{x\} \hookrightarrow X \to Y$, dass

$$(F^{-1}\mathcal{G})_x \cong \mathcal{G}_{F(x)}.$$

Beweis. Die erste Identität folgt direkt aus der Beobachtung, dass $(GF)^{-1} = F^{-1}G^{-1}$. Für die zweite Identität sei $\mathcal{H} \in \mathbf{PSh}^{\mathcal{S}}(Z)$ und $U \subseteq X$ offen. Nun gilt für $W \in \mathrm{Ouv}(Z)$, dass $GF(U) \subseteq W$ genau dann, wenn es eine offene Menge $V \subseteq Y$ um $F(U)$ gibt mit $G(V) \subseteq W$. Damit folgt die Behauptung. Die letzte Behauptung rechnet man entweder ebenso direkt nach oder benutzt das vorherige Lemma 12.9 um zu beobachten, dass

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}((GF)^{-}\mathcal{H}, \mathcal{F}) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(Z)}(\mathcal{H}, (GF)_*\mathcal{F}) \\ & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(Z)}(\mathcal{H}, G_*F_*\mathcal{F}) \\ & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(Y)}(G^{-1}\mathcal{H}, F_*\mathcal{F}) \\ & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(X)}(F^{-1}G^{-1}\mathcal{H}, \mathcal{F}) \end{array}$$

für alle $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}^{\mathcal{S}}(X)$ gilt, woraus die Behauptung mit dem Yoneda-Lemma 12.8 folgt. □

Bemerkung 12.11. Die letzte Identität in dem vorherigen Lemma besagt, dass sich das inverse Bild auf gute Weise mit Halmen verträgt. Außer in speziellen Fällen wie denen in Beispiel 12.7, verträgt sich das inverse Bild normalerweise nicht gut mit Schnitten. Das direkte Bild ist pre Definition verträglich mit Schnitten, aber aus Halmen nicht unbedingt gut zu kontrollieren, außer in speziellen Fällen wie denen in Beispiel 12.5.

Bemerkung 12.12. Betrachten wir eine Abbildung $(F, F^{\sharp})\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ geringter Räume, so ist $F^{\sharp}$ eine Abbildung

$$F^{\sharp}\colon \mathcal{O}_Y \to F_*\mathcal{O}_X$$

von Garben auf Y, wozu nach Lemma 12.9 eine Abbildung

$$F^{-}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$$

von Garben auf X adjungiert ist. Um $F^\sharp$ zu beschrieben, genügt es oft, diese adjungierte Abbildung auf Halmen an den Punkten $x \in X$ zu verstehen, die nach Lemma 12.10 durch Abbildungen

$$\mathcal{O}_{Y,F(x)} \;\cong\; (F^{-1}\mathcal{O}_Y)_x \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

von Ringen gegeben sind (Die Forderung, dass dieses Abbildungen lokaler Ringe sind, definiert gerade die Unterkategorie **LRS** der lokalgeringten Räume.).

Nun möchten wir das direkte und das inverse Bild anstatt für eine stetige Abbildung $F\colon X \to Y$ und Garben für eine Abbildung $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von geringten Räumen und $\mathcal{O}_X$-Moduln definieren. Es sei also $f = (F, F^\sharp)$ mit $F\colon X \to Y$ und $F^\sharp\colon \mathcal{O}_Y \to F_*\mathcal{O}_X$ eine Abbildung geringter Räume. Zunächst möchten wir das *direkte Bild*

$$f_*\colon \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X) \to \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_Y) \tag{12.1}$$

definieren. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ zwei Garben auf X und $V \subseteq Y$ eine offene Menge, so gilt

$$F_*(\mathcal{F} \times \mathcal{F}')(V) = (F \times \mathcal{F}')(F^{-1}(V)) = \mathcal{F}(F^{-1}(V)) \times \mathcal{F}'(F^{-1}(V)) = F_*(\mathcal{F})(V) \times F_*(\mathcal{F}')(V)$$

und daher gilt $F_*(\mathcal{F} \times \mathcal{F}') = F_*\mathcal{F} \times F_*\mathcal{F}'$. Da F_* ein Funktor ist, trägt für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ die Garbe $F_*(\mathcal{F})$ eine $F_*(\mathcal{O}_X)$-Modulstruktur. Durch Komposition mit $F^\sharp$ trägt $F_*(\mathcal{F})$ auch eine $\mathcal{O}_Y$-Modulstruktur. Diese Konstruktion definiert den Funktor (12.1).

Bemerkung 12.13. Für zwei $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ und eine offene Menge $V \subseteq Y$ ist die kanonische Abbildung

$$\mathcal{F}(F^{-1}(V)) \times \mathcal{F}'(F^{-1}(V)) \to (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}')(F^{-1}(V))$$

$\mathcal{O}_X(F^{-1}(V)) = F_*(\mathcal{O}_X)(V)$-bilinear und durch Komposition mit $F^\sharp$ auch $\mathcal{O}_Y(V)$-bilinear. Daher liefert die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts eine Abbildung

$$F_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} F_*(\mathcal{F}') \to F_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}')$$

von $\mathcal{O}_Y$-Moduln, die aber unbedingt weder injektiv noch surjektiv ist.

Analog zu Lemma 12.10 gilt für eine weitere Abbildung $g\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ von geringten Räumen, dass $(gf)_* \cong g_*f_*$.

Nun möchten wir das *inverse Bild*

$$f^*\colon \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_Y) \to \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X) \tag{12.2}$$

definieren. Sind $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ zwei Garben auf Y, so gilt $F^+(\mathcal{G} \times \mathcal{G}') \cong \mathcal{F}^+(\mathcal{G}) \times \mathcal{F}^+(\mathcal{G}')$ und auch $F^-(\mathcal{G} \times \mathcal{G}') \cong \mathcal{F}^-(\mathcal{G}) \times \mathcal{F}^-(\mathcal{G}')$, da Garbifizierung mit Produkten verträglich ist. Genau wie beim direkten Bild, trägt für einen $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{G}$ die Garbe $F^-(\mathcal{G})$ also eine $F^-(\mathcal{O}_Y)$-Modulstruktur. Nun definiert aber die mit Lemma 12.9 zu $F^\sharp$ adjungierte Abbildung $F^-(\mathcal{O}_Y) \to \mathcal{O}_X$ auf $\mathcal{O}_X$ die Struktur einer $F^-(\mathcal{O}_Y)$-Algebra. Wir setzen das inverse Bild von $\mathcal{G}$ als den $\mathcal{O}_X$-Modul

$$f^*(\mathcal{G}) := F^-\mathcal{G} \otimes_{F^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Diese Konstruktion definiert den Funktor (12.2).

Beispiel 12.14. Ist $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ eine Abbildung geringter Räume, so gilt, dass $f^*(\mathcal{O}_Y) \cong \mathcal{O}_X$.

Bemerkung 12.15. Für zwei $\mathcal{O}_Y$-Moduln $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ und eine offene Menge $U \subseteq X$ ist die kanonische Abbildung

$$F^-(\mathcal{G})(U) \times F^-(\mathcal{G}')(U) \to F^-(\mathcal{G} \times \mathcal{G}')(U) \to F^-(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}')(U)$$

$F^-(\mathcal{O}_Y)(U)$-bilinear und induziert daher eine $F^-(\mathcal{O}_Y)$-Modulabbildung

$$F^-(\mathcal{G}) \otimes_{F^-(\mathcal{O}_Y)} F^-(\mathcal{G}') \xrightarrow{\cong} F^-(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}'),$$

die ein Isomorphismus ist. Dieses kann man auf Halmen testen, wobei man die Verträglichkeit dieser mit Tensorprodukten und die letzte Identität von Lemma 12.10 benutzt. Damit bekommt man einen natürlichen Isomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Moduln

$$\begin{aligned}
f^*(\mathcal{G}) \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\mathcal{G}') &\cong (F^-\mathcal{G} \otimes_{F^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} (F^-\mathcal{G}' \otimes_{F^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X) \\
&\cong (F^-\mathcal{G} \otimes_{F^-\mathcal{O}_Y} F^-\mathcal{G}') \otimes_{F^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \\
&\cong (F^-(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}')) \otimes_{F^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \\
&\cong f^*(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{G}').
\end{aligned}$$

Analog zu Lemma 12.10 gilt für eine weitere Abbildung $g\colon (Y, \mathcal{O}_Y) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ von geringten Räumen und einen $\mathcal{O}_Z$-Modul $\mathcal{H}$, dass

$$\begin{array}{rcl} (gf)^*(\mathcal{H}) & \cong & (GF)^-\mathcal{H} \otimes_{(GF)^-\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_X \\ & \cong & (F^-G^-\mathcal{H} \otimes_{F^-G^-\mathcal{O}_Z} F^-\mathcal{O}_Y) \otimes_{F^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \\ & \cong & F^-(G^-\mathcal{H} \otimes_{G^-\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Y) \otimes_{F^-\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X \\ & \cong & f^*(G^-\mathcal{H} \otimes_{G^-\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Y) \\ & \cong & (f^*g^*)(\mathcal{H}). \end{array}$$

Satz 12.16. *Sei $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{F} \in \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X)$ und $\mathcal{G} \in \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_Y)$. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow[\varphi]{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

von $\mathcal{O}_Y(Y)$-Moduln (wobei der $\mathcal{O}_X(X)$-Modul auf der linken Seite durch die Abbildung $F^\sharp(Y)\colon \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ als $\mathcal{O}_Y(Y)$-Modul betrachtet wird) und insbesondere eine Adjunktion

$$f^* : \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_Y) \rightleftarrows \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X) : f_*.$$

Beweis. Es ist eine leichte Übung zu zeigen, dass es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{F^-\mathcal{O}_Y}(F^-\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

gibt, wobei für den zweiten Isomorphismus Lemma 12.9 benutzt wird. □

Wir möchten nun eine analoge Version der in Korollar 9.22 betrachteten Äquivalenz

$$\Gamma : \mathbf{Aff} \rightleftarrows \mathbf{Ring}^{op} : \mathrm{Spec}$$

für Moduln über einem Ring bekommen und werden, völlig analog zur Konstruktion der Strukturgarbe, einen volltreuen Funktor

$$\tilde{\cdot}\colon \mathbf{Mod}(A) \hookrightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)})$$

konstruieren, der allerdings überraschenderweise keine Äquivalenz von Kategorien definiert. Um tatsächlich eine Äquivalenz von Kategorien zu bekommen, muss man sich auf der linken Seite auf die „quasikohärenten" $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}$-Moduln einschränken.

Definition 12.17. Sei A ein Ring und M ein A-Modul. Genau wie in Definition 8.1 setzen wir $X := \mathrm{Spec}(A)$ und betrachten für eine offene Menge $U \subseteq X$ die multiplikative Teilmenge

$$S_U := A \setminus \bigcup_{\mathfrak{p} \in U} \mathfrak{p}$$

von A. Dann ist die Zuordnung

$$\begin{array}{rccl} \tilde{M}^{pre}\colon & \mathrm{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & S_U^{-1}M \end{array}$$

eine Prägarbe und mit der offensichtlichen Abbildung ist $\tilde{M}^{pre}(U)$ ein $\mathcal{O}_X^{pre}(U)$-Modul. Die Garbifizierung $\tilde{M}$ von $\tilde{M}^{pre}$ ist ein $\mathcal{O}_X$-Modul und heißt der *zu M gehörige $\mathcal{O}_X$-Modul* oder der *zu M assoziierte $\mathcal{O}_X$-Modul.*

Beispiel 12.18. Ist $X = \mathrm{Spec}(A)$ ein affines Schema, so gibt es eine Isomorphie $\mathcal{O}_X \cong \tilde{A}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln.

Genau wie in Lemma 8.2 zeigt man für ein $\mathfrak{p} \in X$, dass

$$\tilde{M}^{pre}_{\mathfrak{p}} \cong \tilde{M}_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}} \tag{12.3}$$

und genau wie in Lemma 8.3, dass für $f \in A$ gilt

$$M[\tfrac{1}{f}] \cong \tilde{M}^{pre}(D(f)). \tag{12.4}$$

Der Beweis von Satz 8.7 lässt sich ebenfalls wörtlich übertragen und die Einschränkung $\phi_*(\tilde{M}^{pre})$ ist eine $\mathfrak{B}$-Garbe. Hierraus folgt insbesondere, dass $M[\frac{1}{f}] \cong \tilde{M}(D(f))$.

Satz 12.19. *Sei A ein Ring mit zugehörigem affinen Schema $X = \operatorname{Spec}(A)$, M ein A-Modul und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann gibt es eine natürliche Bijektion*

$$\begin{array}{rccc} \nu\colon & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{Hom}_A(M, \mathcal{F}(X)) \\ & f & \mapsto & f(X) \end{array}$$

oder mit anderen Worten eine Adjunktion

$$\tilde{\cdot} : \mathbf{Mod}(A) \rightleftarrows \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X) : \Gamma$$

wobei $\Gamma(\mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$ den Funktor der globalen Schnitte *bezeichne. Es ist außerdem der Funktor $\tilde{\cdot}\colon \mathbf{Mod}(A) \hookrightarrow \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X)$ injektiv auf Objekten und damit eine (koreflexive) Unterkategorie.*

Beweis. Es ist klar, dass ν eine natürliche Abbildung zwischen den angegebenen Abbildungsmengen ist. Um die Bijektivität zu zeigen, möchten wir eine Umkehrabbildung dazu konstruieren. Sei also $g\colon M \to \mathcal{F}(X)$ eine Abbildung von A-Moduln. Wir möchten einen Morphismus $f\colon \tilde{M} \to \mathcal{F}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln definieren. Nach Satz 8.11 genügt es, dies auf den basisoffenen Mengen $D(s)$ für $s \in A$ kompatibel mit den Einschränkungen zu tun. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "l_s"'] & \mathcal{F}(X) \arrow[d, "(-)_{|D(s)}"] \\ M[\frac{1}{s}] \arrow[r, dashed] & \mathcal{F}(D(s)) \end{tikzcd} \tag{12.5}$$

welches wir auf die angedeutete Weise vervollständigen möchten. Es ist nun aber $\mathcal{F}(D(s))$ ein $\operatorname{Spec}(A)(D(s)) \cong A[\frac{1}{s}]$-Modul. Daher ist die skalare Multiplikation $s\cdot\colon \mathcal{F}(D(s)) \to \mathcal{F}(D(s))$ bijektiv und nach der universellen Eigenschaft der Lokalisierung von Moduln, existiert ein eindeutiger A-Modulhomomorphismus, wie angedeutet.

Durch Einsetzen von $D(1) = X$ sehen wir zunächst, dass die Zuordnung $g \mapsto f \mapsto f(X)$ die Identität ist. Es ist aber ebenfalls klar, dass $f \mapsto f(X) = g \mapsto f$ die Identität ist, da in dem obigen Diagramm keine Wahl für den induzierten Morphismus möglich ist.

Es gilt $\Gamma\tilde{M} \cong M$ nach (12.4) mit $D(1) = X$ womit die Injektivität von $\tilde{\cdot}$ auf Objekten folgt. □

Bevor wir das Bild des Funktors $\tilde{\cdot}$ identifizieren, müssen wir noch etwas über dessen Kompatibilität mit den üblichen Konstruktionen für Moduln sagen.

Lemma 12.20. *Sei A ein Ring und $X := \operatorname{Spec}(A)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) Eine Folge

$$M' \to M \to M''$$

von A-Moduln ist exakt genau dann, wenn die Folge

$$\tilde{M}' \to \tilde{M} \to \tilde{M}''$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln exakt ist.

(2) Für einen A-Modulhomomorphismus f gilt

$$\widetilde{\operatorname{Ker}}(f) \cong \operatorname{Ker}(\tilde{f}) \quad \textit{und} \quad \widetilde{\operatorname{Im}}(f) \cong \operatorname{Im}(\tilde{f}).$$

(3) Für eine Familie $(M_i)_{i \in \mathcal{I}}$ von A-Moduln gilt

$$\widetilde{\bigoplus_i M_i} \cong \bigoplus_i \tilde{M}_i.$$

Beweis. Für (1) beachtet man, dass die Folge $\tilde{M}' \to \tilde{M} \to \tilde{M}''$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln per Definition exakt ist genau dann, wenn sie halmweise exakt ist. Nach (12.3) ist dieses also der Fall genau dann, wenn für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$ die Folge $M'_\mathfrak{p} \to M_\mathfrak{p} \to M''_\mathfrak{p}$ von $A_\mathfrak{p}$-Moduln exakt ist. Aus der Kommutativen Algebra ist bekannt, dass dieses der Fall ist genau dann, wenn die Folge $M' \to M \to M''$ von A-Moduln exakt ist.

Aus der ersten Äquivalenz folgt unmittelbar (2).

Für die dritte Aussage betrachtet man den Funktor $\tilde{\cdot}$ angewendet auf jede der Inklusionen $M_i \to \bigoplus_i M_i$. Die universelle Eigenschaft der direkten Summe liefert eine $\mathcal{O}_X$-Modulabbildung $\bigoplus_i \tilde{M}_i \to \widetilde{\bigoplus_i M_i}$ welche ein Isomorphismus ist, da sie halmweise ein Isomorphismus ist, weil Halme und Lokalisierungen mit direkten Summen verträglich sind. □

Um die folgende Definition zu motivieren, beobachtet man, dass es für einen A-Modul M immer Indexmengen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ und eine exakte Folge

$$\bigoplus_{\mathcal{L}} A \to \bigoplus_{\mathcal{K}} A \xrightarrow{f} M \to 0 \tag{12.6}$$

von A-Moduln gibt (Man wähle für den linken Teil eine Surjektion $\bigoplus_{\mathcal{L}} A \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(f)$).

Definition 12.21. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ heißt *quasikohärent*, wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow X\}$ gibt und für jede Überdeckungsmenge U_i Indexmengen $\mathcal{K}_i$, und $\mathcal{L}_i$ und eine exakte Folge

$$\bigoplus_{\mathcal{L}_i} \mathcal{O}_{X|U_i} \to \bigoplus_{\mathcal{K}_i} \mathcal{O}_{X|U_i} \xrightarrow{f} \mathcal{F}_{|U_i} \to 0 \tag{12.7}$$

von $\mathcal{O}_{X|U_i}$-Moduln. Es bezeichne $\mathbf{QCoh}(X)$ die volle Unterkategorie von $\mathbf{Mod}(X)$ bestehend aus den quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln.

Bemerkung 12.22. Quasikohärenz ist eine lokale Eigenschaft in der folgenden Weise. Ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $\{U_j \hookrightarrow X\}$ eine offene Überdeckung von X, so ist $\mathcal{F}$ quasikohärent genau dann, wenn jede Einschränkung $\mathcal{F}_{|U_j}$ quasikohärent ist. Dabei ist klar, dass aus der Quasikohärenz von allen $\mathcal{F}_{|U_j}$ die Quasikohärenz von $\mathcal{F}$ folgt. Für die andere Richtung benutzt man, dass die Einschränkungen $(-)_{|U_j}$ als inverse Bilder mit direkten Summen kommutieren und rechtsexakt sind (siehe auch den Beweis von Lemma 12.31.(1)).

Beispiel 12.23.

(1) Wir haben in (12.6) gesehen, dass für $X := \mathrm{Spec}(A)$ der $\mathcal{O}_X$-Modul $\tilde{M}$ für einen A-Modul M quasikohärent ist.
(2) Für ein Beispiel eines nicht quasikohärenten Moduls betrachte $X = \coprod_{\mathbb{N}} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ und die durch die universelle Eigenschaft definierte Abbildung $f \colon X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, die die Identität auf jedem Sumanden ist. Wir behaupten, dass der $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$-Modul $f_*(\mathcal{O}_X)$ nicht quasikohärent ist. Wäre dieses der Fall, so gäbe es nach Korollar 12.25 unten einen $\mathbb{Z}$-Modul M mit $\tilde{M} \cong f_*(\mathcal{O}_X)$. Wegen $f_*(\mathcal{O}_X)(\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})) = \mathcal{O}_X(X) \cong \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ hätte dieser $\mathbb{Z}$-Modul die Form $M = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$.

   Die Abbildung f korrespondiert mit Satz 9.20 zu der Abbildung $\mathbb{Z} \to \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ induziert durch die universelle Eigenschaft des Produkts. Wir betrachten die offene Menge $D(s) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ und beobachten $f^{-1}(D(s)) = \coprod_{\mathbb{N}} D(s) \to D(s)$. Setze zur Abkürzung $U := \coprod_{\mathbb{N}} D(s)$. Nun gilt

$$\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{s}] \cong \mathcal{O}_{X|U}(U) \cong \mathcal{O}_X(f^{-1}(D(s))) = f_*(\mathcal{O}_X)(D(s)) \cong \tilde{M}(D(s)) \cong \left(\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}\right)[\tfrac{1}{s}],$$

   aber Lokalisierung vertauscht nicht mit unendlichen Produkten.

Satz 12.24. *Sei X ein Schema und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(1) Für jedes offene affine $U := \mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow X$ gibt es einen A-Modul M mit $\mathcal{F}_{|U} \cong \tilde{M}$.
(2) Es gibt eine offene affine Überdeckung $\{\mathrm{Spec}(A_i) \hookrightarrow X\}$ und für jeden Index i einen A_i-Modul M_i mit $\mathcal{F}_{U_i} \cong \tilde{M}_i$.
(3) $\mathcal{F}$ ist quasikohärent.
(4) Für jedes offene affine $\mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow X$ und jedes $s \in A$ ist die kanonische Abbildung

$$\mathcal{F}(\mathrm{Spec}(A))[\tfrac{1}{s}] \to \mathcal{F}(D(s))$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Es ist klar, dass (2) aus (1) folgt. Ebenso folgt sofort (3) aus (2) mit (12.6). Um zu zeigen, dass (1) aus (4) folgt, können wir uns zunächst auf den affinen Fall $X = \mathrm{Spec}(A)$ beschränken. Wir setzen nun $M := \mathcal{F}(X)$. Nach Satz 12.19 gibt es eine Abbildung $\tilde{M} \to \mathcal{F}$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Schaut man sich die Konstruktion dieser Abbildung an, genauer Diagramm 12.5, so sehen wir, dass diese auf basisoffenen Mengen nach Bedingung (4) ein Isomorphismus ist, was $\tilde{M} \cong \mathcal{F}$ zeigt.

Nun zeigen wir, dass die Bedingung (3) die Bedingung (4) impliziert. Wir können uns wieder auf den affinen Fall $X = \operatorname{Spec}(A)$ beschränken, da Quasikohärenz nach Bemerkung 12.22 eine lokale Eigenschaft ist. Wir haben gerade gesehen, dass Bedingung (4) gilt, falls $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$ für einen A-Modul M. Nun möchten wir den allgemeinen Fall darauf zurückführen. Da das affine Schema X nach Satz 4.11 quasikompakt ist, gibt es endlich viele Elemente $s_1, \ldots, s_n \in A$ mit $X = \cup_{i=1}^n D(s_i)$ und sodass für Indexmengen $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{L}_i$ die Folge

$$\bigoplus_{\mathcal{L}_i} \tilde{A}[\tfrac{1}{s_i}] \to \bigoplus_{\mathcal{K}_i} \tilde{A}[\tfrac{1}{s_i}] \to \mathcal{F}_{|D(s_i)} \to 0$$

von $\mathcal{O}_{D(s_i)}$-Moduln exakt ist, da wir vorausgesetzt haben, dass $\mathcal{F}$ quasikohärent ist und diese Eigenschaft nach Bemerkung 12.22 lokal ist. Nach Satz 12.19 kommt die erste Abbildung in dieser Folge von einer Abbildung $f_i \colon \bigoplus_{\mathcal{L}_i} A[\frac{1}{s_i}] \to \bigoplus_{\mathcal{K}_i} A[\frac{1}{s_i}]$ von $A[\frac{1}{s_i}]$-Moduln und mit Teil (1) von Lemma 12.20 ist $\mathcal{F}_{|D(s_i)} = \tilde{M}_i$, wobei M_i der Kokern von f_i ist. Es erfüllt also $\mathcal{F}_{|D(s_i)}$ die Bedingung (4). Ebenso zeigt man, dass $\mathcal{F}_{|D(s_i) \cap D(s_j)} = \mathcal{F}_{D(s_i s_j)}$ die Bedingung (4) erfüllen. Nun bekommt man das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(X)[\frac{1}{s}] \arrow[r] \arrow[d] & \prod_i \mathcal{F}(D(s_i))[\frac{1}{s}] \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i,j} \mathcal{F}(D(s_i s_j))[\frac{1}{s}] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}(D(s)) \arrow[r] & \prod_k \mathcal{F}(D(ss_i)) \arrow[r] & \prod_{i,j} \mathcal{F}(D(ss_i s_j))
\end{tikzcd}$$

wobei die obere Zeile die Lokalisierung weg von s der üblichen exakten Folge für die Garbenbedingung ist. Diese ist wieder exakt, da die vorkommenden Produkte endlich sind und also mit Lokalisierung vertauschen. Die untere Zeile ist ebenfalls exakt wegen der Garbenbedingung. Da wir schon beobachtet haben, dass die rechten beiden vertikalen Abbildungen Isomorphismen sind, ist es auch die linke wegen des Fünferlemmas. $\square$

Korollar 12.25. *Sei A ein Ring mit zugehörigem affinen Schema $X = \operatorname{Spec}(A)$. Die Zuordnung aus Satz 12.19 schränkt ein zu einer Äquivalenz*

$$\tilde{\ } : \mathbf{Mod}(A) \rightleftarrows \mathbf{QCoh}(\mathcal{O}_X) : \Gamma$$

von Kategorien.

Lemma 12.26. *Sei X ein Schema. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(1) Kerne und Bilder von Morphismen zwischen quasikohärenten Moduln sind wieder quasikohärent.
(2) Direkte Summen von quasikohärenten Moduln sind wieder quasikohärent.
(3) Summen und endliche Durchschnitte von quasikohärenten Untermoduln in einem quasikohärenten Modul sind quasikohärent.
(4) Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln, so ist auch das Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ quasikohärent und es gilt für eine offene affine Teilmenge $\operatorname{Spec}(A) \hookrightarrow X$, dass

$$(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})(\operatorname{Spec}(A)) \cong \mathcal{F}(\operatorname{Spec}(A)) \otimes_{\mathcal{O}_X(\operatorname{Spec}(A))} \mathcal{G}(\operatorname{Spec}(A)).$$

Beweis. Behauptungen (1),(2) und (3) folgen direkt aus Satz 12.24 und Lemma 12.20. Für die letzte Behauptung (4) zeigen wir zunächst, dass es für ein affines Schema $X = \operatorname{Spec}(A)$ und A-Moduln M und N einen Isomorphismus

$$\tilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \tilde{N} \cong (M \otimes_A N)^{\sim}$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln gibt. Das linke Tesorprodukt ist definiert als die Garbifizierung der Prägarbe $\tilde{M}(-) \otimes_{\mathcal{O}_X(-)} \tilde{N}(-)$ und auf basisoffenen Mengen gibt es einen funktoriellen und mit Einschränkungen kompatiblen Isomorphismus

$$\tilde{M}(D(s)) \otimes_{\mathcal{O}_X(D(s))} \tilde{N}(D(s)) \cong M[\tfrac{1}{s}] \otimes_{A[\frac{1}{s}]} N[\tfrac{1}{s}] \cong (M \otimes_A N)[\tfrac{1}{s}].$$

Dieses zeigt die Zwischenbehauptung. Da $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ quasikohärent sind, sind sie nach dem vorherigen Satz 12.24 lokal auf $\operatorname{Spec}(A)$ von der Form $\tilde{M}$ und $\tilde{N}$. Nach der obigen Beobachtung ist das Tensorprodukt von $\tilde{M}$ und $\tilde{N}$ auch im Bild von $\tilde{\ }$ und insbesondere quasikohärent. Also ist auch $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ quasikohärent. $\square$

Genau wie wir in Satz 10.14 Garben auf einem topologischen Raum miteinander verklebt haben, möchten wir nun auch $\mathcal{O}_X$-Moduln auf einem geringten Raum miteinander verkleben. Dieses geht tatsächlich vollständig analog zu der Situation bei Garben. Die folgende Definition ist daher komplett analog zu der Definition 10.13.

Definition 12.27. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathfrak{U}_X := \{U_i \hookrightarrow X\}_{i\in\mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung. Ein *Verklebedatum* $(\mathcal{F}_i, \varphi_{ij})$ *für* $\mathcal{O}_X$*-Moduln auf* $\mathfrak{U}_X$ ist eine Familie

$$\mathcal{F}_i \colon \mathrm{Ouv}(U_i)^{op} \to \mathbf{Ab}$$

von $\mathcal{O}_{U_i}$-Moduln zusammen mit $\mathcal{O}_{U_i\cap U_j}$-Modulisomorphismen

$$\varphi_{ij} \colon \mathcal{F}_{i|U_i\cap U_j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_{j|U_i\cap U_j}$$

die die Kozykelbedingung (10.3) erfüllen. Ein Morphismus von solchen Verklebedaten definiert man wie in Definition 10.13. Die Verklebedaten für $\mathcal{O}_X$-Moduln auf $\mathfrak{U}_X$ bilden zusammen mit ihren Morphismen eine Kategorie, die mit $\mathbf{Mod}(\mathfrak{U}_X)$ bezeichnet wird.

Auf analoge Weise definiert man die Kategorie $\mathbf{QCoh}(\mathfrak{U}_X)$ der Verklebedaten für quasikohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln.

Ebenso vollständig analog zu Satz 10.14 zeigt man den folgenden Satz. (Mit technischen Worten könnte man wieder ungefähr sagen, dass der Funktor $\mathbf{Mod}(-) \colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Cat}$ und der Funktor $\mathbf{QCoh}(-) \colon \mathrm{Ouv}(X)^{op} \to \mathbf{Cat}$ jeweils einen Stack definieren. Mit dieser Formulierung ergeben sich sofort interessante Fragen nach einer Verallgemeinerung von Satz 12.28: Was passiert, wenn wir anstelle einer offenen Überdeckung, geschrieben als einen einzelnen Morphismus $\mathfrak{U}_X = \coprod_i U_i \to X$, andere Morphismen von Schemata zulassen und anstelle der Einschränkung in der Definition 12.27 das zugehörige inverse Bild betrachten? Ein bedeutener Satz in dieser Richtung stammt von Grothendieck: Quasikohärente Moduln erfüllen sogar Abstieg (es gilt also die analoge Version von Satz 12.28) bezüglich einer sogenannten étalen Überdeckung.)

Satz 12.28. *Sei* $(X, \mathcal{O}_X)$ *ein geringter Raum und* $\mathfrak{U}_X := \{U_i \hookrightarrow X\}_{i\in\mathcal{I}}$ *eine offene Überdeckung. Der Funktor*

$$\begin{array}{rccl} gd_{\mathfrak{U}_X} \colon & \mathbf{Mod}(\mathcal{O}_X) & \to & \mathbf{Mod}(\mathfrak{U}_X) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & (\mathcal{F}_{|U_i}, (\mathcal{F}_{|U_i})_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{=} (\mathcal{F}_{|U_j})_{U_i\cap U_j}) \end{array}$$

ist voll, treu und essentiell surjektiv und damit eine Äquivalenz von Kategorien. Durch die in Bemerkung 12.22 erklärte Lokalität der Quasikohärenzeigenschaft schränkt diese Äquivalenz ein zu einer Äquivalenz

$$gd_{\mathfrak{U}_X} \colon \quad \mathbf{QCoh}(\mathcal{O}_X) \quad \to \quad \mathbf{QCoh}(\mathfrak{U}_X)$$

von Kategorien.

Der folgende Satz sagt mit anderen und bisher nicht als bekannt vorausgesetzten Worten, dass ein quasikohärenter Modul auf einem affinen Schema keine höhere Čech-Kohomologie hat. Es gibt sogar eine Umkehrung zu diesem Satz (zumindest für quasikompakte und quasiseparierte Schemata), die das *Kriterium von Serre für Affinität* genannt wird.

Satz 12.29. *Sei* $X = \mathrm{Spec}(A)$ *ein affines Schema und*

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f'} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{F}'' \to 0$$

eine exakte Folge von $\mathcal{O}_X$*-Moduln. Sei außerdem* $\mathcal{F}'$ *quasikohärent. Dann ist auch*

$$0 \to \mathcal{F}'(X) \to \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X) \to 0$$

eine exakte Folge. Eine exakte Folge von $\mathcal{O}_X$*-Moduln auf einem affinen Schema ist also exakt genau dann, wenn sie schnittweise exakt ist.*

Beweis. Nach Satz 12.24 gilt $\mathcal{F}' \cong \tilde{M}$ für einen A-Modul M. Wir wissen bereits, dass der globale Schnittfunktor linksexakt ist und müssen daher nur zeigen, dass die Abbildung

$$f(X) \colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X)$$

von A-Moduln surjektiv ist. Sei dazu $b \in \mathcal{F}''(X)$ ein globaler Schnitt zu dem wir ein Urbild $\bar{a} \in \mathcal{F}(X)$ finden möchten. Durch die Quasikompaktheit von X nach Satz 4.11 und die vorausgesetzte halmweise Surjektivität von f gibt es eine endliche basisoffene Überdeckung $\{U_i := D(s_i) \hookrightarrow X\}_{i=0}^n$ von X und Elemente $a_i \in \mathcal{F}(U_i)$ mit $f(U_i)(a_i) = b_{|U_i}$.

Wir zeigen zunächst, dass es für jedes i einen globalen Schnitt $\bar{a}_i \in \mathcal{F}(X)$ gibt mit $f(X)(\bar{a}_i) = s_i^{d_i} b$ für irgendwelche Exponenten d_i. Dann können wir annehmen dass alle diese $d_i = d$ gleich sind, indem wir jeweils mit s_i geeignet oft multiplizieren. Da $D(s_0) \cup \ldots \cup D(s_n) = X$, gilt nach Korollar 4.4 auch $D(s_0^d) \cup \ldots \cup D(s_n^d) = X$ und daher $(s_0^d, \ldots, s_n^d) = A$. Es gibt also Elemente $t_i \in A$ mit $1 = \sum_{i=0}^n t_i s_i^d$. Dann setzen wir

$$\bar{a} := \sum_{i=0}^n t_i \bar{a}_i,$$

welches ein gewünschtes Urbild ist, weil

$$\begin{aligned} f(X)(\bar{a}) &= f(X)(\textstyle\sum_{i=0}^n t_i \bar{a}_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^n t_i f(X)(\bar{a}_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^n t_i s_i^d b \\ &= b. \end{aligned}$$

Sei also ein Index i gewählt. Wir wollen zeigen, dass es ein $\bar{a}_i \in \mathcal{F}(X)$ mit $f(X)(\bar{a}_i) = s_i^{d_i} b$ gibt. Sei j ein zweiter Index. Es sind, eingeschränkt auf $U_{ij} := U_i \cap U_j$, die Elemente $a_{i|U_{ij}}$ und $a_{j|U_{ij}}$ beides Urbilder von $b_{|U_{ij}}$ und wegen der schnittweisen Linksexaktheit gilt daher

$$a_{i|U_{ij}} - a_{j|U_{ij}} = f'(U_{ij})(c_j)$$

für ein $c_j \in M[\frac{1}{s_i s_j}]$. Die Restriktionsabbildung von $\mathcal{F}'$ ist gerade die Lokalisierungsabbildung $M[\frac{1}{s_j}] \to M[\frac{1}{s_i s_j}]$. Es gibt einen Index m_j, sodass $s_i^{m_j} c_j \in M[\frac{1}{s_j}]$ und wir wählen m so groß, dass $s_i^m c_j \in M[\frac{1}{s_j}]$ gilt für alle j. Nun betrachten wir für jedes j das Element

$$u_j := f'(U_j)(s_i^m c_j) + s_i^m a_j \in \mathcal{F}(U_j),$$

wobei wir die Multiplikation mit Elementen aus $\mathcal{O}_X(X) = A$ nicht mit einer Einschränkungsbezeichnung versehen. Jedes dieser u_j ist ein Urbild von $s_i^m b_{|U_j}$ unter $f(U_j)$, da wegen der Exaktheit der erste Summand jeweils auf Null abgebildet wird. Wir wollen nun mit der Garbenbedingung von $\mathcal{F}$ diese u_j zu dem gesuchten Element $\bar{a}_i$ zusammenkleben. Es ist allerdings nicht richtig, dass für zwei Indizes (j,k) die Differenz $u_{j|U_{jk}} - u_{k|U_{jk}}$ Null ist. Daher betrachten wir den Schnitt $U := U_i \cap U_j \cap U_k$ und erhalten

$$\begin{aligned} u_{j|U} - u_{k|U} &= s_i^m\big(\ (f'(U)(c_{j|U}) + a_{j|U})\ -\ (f'(U)(c_{k|U}) + a_{k|U})\ \big) \\ &= s_i^m\big(\ ((a_{i|U} - a_{j|U}) + a_{j|U})\ -\ ((a_{i|U} - a_{k|U}) + a_{k|U})\ \big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da $U_i = D(s_i)$ gibt es also für jedes Paar (j,k) ein m'_{jk} mit $s_i^{m'_{jk}}(u_{j|U_{ij}} - u_{k|U_{ij}}) = 0$. Da es wieder nur endlich viele solche Paare gibt, wählen wir ein gemeinsames solches m' und können also die Elemente $s_i^{m'} u_j$ zu einem Element $\bar{a}_i$ zusammenkleben, welches unter $f(X)$ auf $s_i^{m'+m} b$ abgebildet wird (hier benutzen wir die Eindeutigkeitseigenschaft von $\mathcal{F}''$). Wir setzen also $d_i := m' + m$ und haben die Behauptung gezeigt. □

Lemma 12.30. *Sei $\varphi\colon A \to B$ eine Ringabbildung und $f\colon X = \operatorname{Spec}(B) \to Y = \operatorname{Spec}(A)$ die zugehörige Abbildung von affinen Schemata. Sei außerdem M ein A-Modul und N ein B-Modul.*

(1) *Ist $\operatorname{res}_\varphi\colon \mathbf{Mod}(B) \to \mathbf{Mod}(A)$ die Restriktion von Skalaren, die einen B-Modul via φ als A-Modul auffasst, so gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$f_*(\tilde{N}) \cong \operatorname{res}_\varphi(N)^\sim$$

von $\mathcal{O}_Y$-Moduln. Das direkte Bild entspricht also der Restriktion von Skalaren.

(2) *Es gibt einen natürlichen Isomorphismus*

$$f^*(\tilde{M})(M \otimes_A B)^\sim$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Das inverse Bild entspricht also dem Tensorprodukt.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Behauptung (1). Für ein Element $s \in A$ gilt $f^{-1}(D(s)) = D(\varphi(s))$. Daher gibt es einen mit Einschränkungen verträglichen natürlichen Isomorphismus

$$\begin{aligned} f_*(\tilde{N})(D(s)) &\cong \tilde{N}(D(\varphi(s))) \\ &\cong N[\tfrac{1}{\varphi(s)}] \\ &\cong \operatorname{res}_\varphi(N)[\tfrac{1}{s}] \\ &\cong \operatorname{res}_\varphi(N)^\sim(D(s)). \end{aligned}$$

Dieses zeigt das Gewünschte.

Für die zweite Behauptung betrachten wir den natürlichen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\tilde{M}), \mathcal{F}) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\tilde{M}), \tilde{N}) && \text{(Satz 12.24)} \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\tilde{M}, f_*\tilde{N}) && \text{(Satz 12.16)} \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\tilde{M}, \operatorname{res}_\varphi(N)^\sim) && \text{(Teil (1))} \\ &\cong \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{res}_\varphi(N)) && \text{(Satz 12.19)} \\ &\cong \operatorname{Hom}_B(M \otimes_A B, N) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}((M \otimes_A B)^\sim, \mathcal{F}) && \text{(Satz 12.19)} \end{aligned}$$

für alle quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$. Dann folgt die Behauptung mit dem Yoneda-Lemma 12.8 und (1) des folgenden Lemmas 12.31. □

Lemma 12.31. *Sei $f\colon (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Morphismus von Schemata.*

(1) Das inverse Bild f^* bewahrt quasikohärente Moduln und schränkt somit zu einem Funktor

$$f^*\colon \mathbf{QCoh}(Y) \to \mathbf{QCoh}(X)$$

ein.

(2) Ist X ein noetherscher topologischer Raum so bewahrt das direkte Bild f_* quasikohärente Moduln und schränkt somit zu einem Funktor

$$f_*\colon \mathbf{QCoh}(X) \to \mathbf{QCoh}(Y)$$

ein.

Beweis. Für Behautung (1) sei $\mathcal{G} \in \mathbf{QCoh}(Y)$. Dies bedeutet, dass es eine offene Überdeckung $\{V_j \hookrightarrow Y\}$ gibt und

$$\bigoplus \mathcal{O}_{Y|V_j} \to \bigoplus \mathcal{O}_{Y|V_j} \to \mathcal{G}_{|V_j} \to 0 \tag{12.8}$$

jeweils eine exakte Folge von $\mathcal{O}_{Y|V_j}$-Moduln ist. Es ist $\{U_j \hookrightarrow X\}$ mit $U_j := f^{-1}(V_j)$ eine offene Überdeckung von X. Wir wollen zeigen, dass es eine exakte Folge

$$\bigoplus \mathcal{O}_{X|U_j} \to \bigoplus \mathcal{O}_{X|U_j} \to (f^*\mathcal{G})_{|U_j} \to 0$$

von $\mathcal{O}_{X|U_j}$-Moduln gibt, womit (1) gezeigt wäre. Zunächst gilt $f^*(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X$. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} U_j \arrow[r, hook, "i'_j"] \arrow[d, "f'_j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ V_j \arrow[r, hook, "i_j"] & Y. \end{tikzcd}$$

Es gilt $(-)_{|U_j} = i'^*_j$. Mit $i'^*_j f^* \cong (fi'_j)^* \cong (i_j f'_j)^* = f'^*_j i^*_j$ müssen wir also zeigen, dass es eine exakte Folge

$$\bigoplus f'^*_j \mathcal{O}_{Y|V_j} \to \bigoplus f'^*_j \mathcal{O}_{Y|V_j} \to f'^*_j \mathcal{G}_{|V_j} \to 0$$

von $\mathcal{O}_{X|U_j}$-Moduln gibt. Dieses folgt aber aus der Anwendung des rechtsexakten und mit direkten Summen kommutierenden Funktors f'^*_j auf (12.8). Dieses zeigt Behauptung (1).

Für die Behauptung (2) sei $\mathcal{F}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Wir können annehmen, dass $Y = \operatorname{Spec}(B)$ affin ist, denn Quasikohärenz ist nach Bemerkung 12.22 lokal auf Y zu zeigen. (Wir betrachten dann anstelle von X das offene Unterschema $f^{-1}(\operatorname{Spec}(B)) \hookrightarrow X$, welchem ebenfalls ein noetherscher topologischer Raum unterliegt, und wissen, dass $\mathcal{F}_{|f^{-1}(\operatorname{Spec}(B))}$ quasikohärent ist). Sei $\{U_i \hookrightarrow X\}$ eine nach Lemma 10.32 existente endliche offene affine Überdeckung von X. Bezeichnet $f_i\colon U_i \hookrightarrow X \to Y$ die Komposition, so wissen wir nach Lemma 12.30, dass $f_{i,*}(\mathcal{F}_{|U_i})$ quasikohärent ist. Da $\mathcal{F}$ eine Garbe ist, gibt es für jedes offene $U \subseteq X$ eine exakte Folge

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U \cap U_i) \longrightarrow \prod_{i,j} \mathcal{F}(U \cap U_i \cap U_j)$$

und daher insbesondere für ein offenes $V \subseteq Y$ eine exakte Folge

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) & \longrightarrow & \prod_i \mathcal{F}(f_i^{-1}(V)) & \longrightarrow & \prod_{i,j} \mathcal{F}(f_{ij}^{-1}(V)) \\ & \| & & \| & & \| \\ & f_*(\mathcal{F})(V) & \longrightarrow & \bigoplus_i f_{i,*}(\mathcal{F}_{|U_i})(V) & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} f_{ij,*}(\mathcal{F}_{|U_{ij}})(V). \end{array}$$

Man beachte, dass der Schnitt $U_{ij} := U_i \cap U_j$ zweier affiner offener Unterschema U_i und U_j von X nicht unbedingt wieder ein affines Schema sein muss und wir nicht unmittelbar fertig sind mit Lemma 12.26, welches besagte, dass der Kern $f_*(\mathcal{F})$ von einer Abbildung quasikohärenter Moduln wieder quasikohärent ist. Nach Lemma 10.32 ist aber jedes U_{ij} ein quasikompaktes Schema und hat daher eine offene affine Überdeckung durch endlich viele Mengen $\{U_{ijk} \hookrightarrow U_{ij}\}$. Genau wie eben mit $f_{ij,*}$ anstelle von f_* gibt es also eine exakte Folge dafür und insbesondere eine injektive Abbildung

$$f_{ij,*}(\mathcal{F}_{|U_{ij}})(V) \longleftrightarrow \bigoplus_k f_{ijk,*}(\mathcal{F}_{|U_{ijk}})(V).$$

Daher ist auch die Folge

$$0 \longrightarrow f_*(\mathcal{F})(V) \longrightarrow \bigoplus_i f_{i,*}(\mathcal{F}_{|U_i})(V) \longrightarrow \bigoplus_{i,j,k} f_{ijk,*}(\mathcal{F}_{|U_{ijk}})(V)$$

exakt und $f_*\mathcal{F}$ als Kern einer Abbildung quasikohärenter Moduln wieder quasikohärent. □

Bemerkung 12.32. Wir haben in Beispiel 12.23 gesehen, dass f_* nicht unbedingt quasikohärente Moduln bewahren muss.

Definition 12.33. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Die Teilmenge

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$$

von X, versehen mit der Unterraumtopologie, heißt der *Träger* von $\mathcal{F}$.

Beispiel 12.34. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokalgeringter Raum, so ist

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X) = \{x \in X \mid \mathcal{O}_{X,x} \neq 0\} = X,$$

da ein lokaler Ring niemals der Nullring ist.

Bemerkung 12.35. Es ist $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ nicht unbedingt eine abgeschlossene Teilmenge von X (Manchmal wird der Support als der Abschluss von $\operatorname{Supp}(\mathcal{F})$ definiert.). Dieses ist allerdings der Fall, wenn man für $\mathcal{F}$ gewisse Endlichkeitseigenschaften („von endlichem Typ") fordert, die wir noch genauer kennenlernen werden.

Bemerkung 12.36. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe abelscher Gruppen auf einem topologischen Raum X. Für einen globalen Schnitt $f \in \mathcal{F}(X)$ betrachtet man auch die Teilmenge

$$\operatorname{Supp}(f) = \{x \in U \mid f_x \neq 0\}$$

von X die als *Träger des Schnittes* f bezeichnet wird. Dieses Teilmenge ist stets abgeschlossen, da ein Keim per Definition des Halms $= 0$ ist genau dann, wenn dieses schon auf einer offenen Umgebung der Fall ist. Im Spezialfall der Strukturgarbe $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ eines lokalgeringten Raums $(X, \mathcal{O}_X)$ haben wir in Lemma 9.18 die offene Teilmenge $D(f) \subset X$ betrachtet. Es gibt eine Inklusion

$$\begin{array}{rcl} D(f) & := & \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \\ & = & \{x \in X \mid f_x \text{ liegt nicht im maximalen Ideal des lokalen Rings } \mathcal{O}_{X,x}\} \\ & = & \{x \in X \mid f_x \text{ ist eine Einheit in dem lokalen Ring } \mathcal{O}_{X,x}\} \\ & \subseteq & \{x \in U \mid f_x \neq 0\} \\ & = & \operatorname{Supp}(f), \end{array}$$

die nicht unbedingt eine Gleichheit ist.

13. Abgeschlossene Immersionen und Separiertheit

Wir haben in Definition 10.3 den Begriff einer offenen Immersion von lokalgeringten Räumen kennengelernt. Es ist leider etwas komplizierter eine abgeschlossene Immersion zu definieren. Ist $U \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ ein offener Unterraum von $\operatorname{Spec}(A)$, so ist wegen der Identifikation $U(D(s)) \cong \operatorname{Spec}(A)(D(s)) \cong A[\frac{1}{s}]$ die Unterschemastruktur darauf schon eindeutig festgelegt. Die abgeschlossenen Unterräume $Z \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ sind per Definition der Zariskitopologie gerade von der Form $\mathcal{V}(I)$ für ein Ideal $I \subseteq A$, es definieren aber verschiedene Ideale (wie zum Beispiel I und I^2) den gleichen abgeschlossenen Unterraum. Um eine zu Definition 10.3 analoge Definition einer abgeschlossenen Immersion zu machen, müssen wir also ein Analogon zu dem dort vorkommenden $(V, \mathcal{O}_{Y|V})$ finden.

Definition 13.1. Ein Morphismus $(F, F^\sharp)\colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ von Schemata heißt eine *abgeschlossene Immersion*, falls $F\colon Z \hookrightarrow X$ eine abgeschlossene Einbettung ist und falls es einen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \cong F_*\mathcal{O}_Z$ für eine $\mathcal{O}_X$-Idealgarbe $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ gibt. Eine Isomorphieklasse solcher abgeschlossener Immersionen heißt ein *abgeschlossenes Unterschema* von $(X, \mathcal{O}_X)$ und wird oft mit einem seiner Repräsentanten identifiziert.

Bemerkung 13.2. Es folgt direkt aus dem Fünferlemma angewandt auf die exakte Folge

$$0 \to \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \to 0$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln, dass die Idealgarbe $\mathcal{I}$ in der Definition 13.1 für eine gegebene abgeschlossene Immersion eindeutig ist (bis auf Isomorphie von $\mathcal{O}_X$-Moduln).

Bemerkung 13.3. Definition 10.3 für eine offene Immersion lässt sich wie folgt umformulieren: Ein Morphismus $(F, F^\sharp)\colon (U, \mathcal{O}_U) \to (X, \mathcal{O}_X)$ von Schemata heißt eine *offene Immersion*, falls $F\colon U \hookrightarrow X$ eine offene Einbettung ist und falls es einen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus $\mathcal{O}_{X|U} \cong F_*\mathcal{O}_U$ gibt.

Ist $f\colon Z \to X$ eine abgeschlossene Immersion, so beschreibt das folgende Lemma den topologischen Raum Z und die Idealgarbe $\mathcal{I}$ aus Definition 13.1 auf eine andere Weise.

Lemma 13.4. *Es ist $(F, F^\sharp)\colon (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$ eine abgeschlossene Immersion genau dann, wenn F eine abgeschlossene Einbettung ist und $F^\sharp$ halmweise surjektiv. In diesem Fall gilt außerdem*

$$\begin{array}{rcll} Z & \cong & \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) & \quad \textit{und} \\ \mathcal{I} & \cong & \operatorname{Ker}(F^\sharp) & \quad \textit{und} \\ \mathcal{O}_Z & \cong & F^-(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}). & \end{array}$$

Beweis. Ist $(F, F^\sharp)$ eine abgeschlossene Immersion, so betrachten wir das kommutative Diagramm von $\mathcal{O}_X$-Moduln mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathcal{O}_X \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}(F^\sharp) \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "F^\sharp"] & F_*\mathcal{O}_Z \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Es existiert folglich der gestrichelte Pfeil und ist ein Isomorphismus von nach dem Fünferlemma. Insbesondere ist $F^\sharp$ halmweise surjektiv, da $\mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ halmweise surjektiv ist. Ist umgekehrt $F^\sharp$ halmweise surjektiv, und damit die untere Zeile in dem obigen Diagramm exakt, so folgt $\mathcal{O}_X/\operatorname{Ker}(F^\sharp) \cong F_*\mathcal{O}_Z$ nach dem Homomorphiesatz. Für die verbleibende Aussage $Z \cong \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ betrachten wir den Halmfunktor $(-)_x$ für $x \in X$ und behaupten, dass

$$(F_*\mathcal{O}_Z)_x = \begin{cases} \mathcal{O}_{Z,z} & \text{falls } x = F(z) \\ 0 & \text{falls } x \notin F(Z) \end{cases}$$

gilt. Hierraus folgte $Z \cong \operatorname{Supp}(F_*\mathcal{O}_Z) \cong \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$, da ein lokaler Ring nicht der Nullring ist. Für die Behauptung betrachten wir die Definition des Halms.

$$(F_*\mathcal{O}_Z)_x = \operatorname*{colim}_{x \in U \in \operatorname{Ouv}(X)^{op}} (F_*\mathcal{O}_Z)(U) \;=\; \operatorname*{colim}_{x \in U \in \operatorname{Ouv}(X)^{op}} \mathcal{O}_Z(F^{-1}(U))$$

Ist nun $x \notin F(Z)$, so ist $U := X \setminus F(Z)$ eine offene Umgebung von x in X und $F^{-1}(U) = \emptyset$. Mit $\mathcal{O}_Z(\emptyset) = 0$ folgt der zweite Fall. Ist hingegen $x = F(z)$ für ein $z \in Z$, so behaupten wir

$$\operatorname*{colim}_{F(z)\in U\in \mathrm{Ouv}(X)^{op}} \mathcal{O}_Z(F^{-1}(U)) \;\cong\; \operatorname*{colim}_{z\in W\in \mathrm{Ouv}(Z)^{op}} \mathcal{O}_Z(W) \cong \mathcal{O}_{Z,z}.$$

Ist $F(z) \in U \in \mathrm{Ouv}(X)$, so ist $z \in F^{-1}(U) \in \mathrm{Ouv}(Z)$. Ist umgekehrt $z \in W \in \mathrm{Ouv}(Z)$, so gibt es eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $U \cap F(Z) \cong F(W)$ (und daher natürlich auch $F(z) \in U$) und $F^{-1}(U) \cong F^{-1}(U \cap F(Z)) \cong F^{-1}(F(U)) \cong W$.

Für den letzten behaupteten Isomorphismus erinnern wir uns zunächst daran, dass nach Definition einer abgeschlossenen Immersion $\mathcal{O}_X/I \cong F_*\mathcal{O}_Z$ gilt. Anwenden des inversen Bildes F^- liefert $F^-(\mathcal{O}_X/I) \cong F^-F_*\mathcal{O}_Z$. Nun zeigt man komplett analog zu dem obigen Fall des Halms, dass $F^-F_*\mathcal{O}_Z \cong \mathcal{O}_Z$ gilt für die abgeschlossene Einbettung F. □

Satz 13.5. *Für ein affines Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$ gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\textit{Ideale von } A\right\} & \rightleftarrows & \left\{\begin{array}{c}\textit{Abgeschlossene}\\ \textit{Unterschemata von } X\end{array}\right\} \\
I & \longmapsto & \mathrm{Spec}(A/I) \hookrightarrow X \\
\mathrm{Ker}(F^\sharp(X)) & \longleftarrow\!\shortmid & (F, F^\sharp)\colon Z \hookrightarrow X
\end{array}$$

Insbesondere ist ein abgeschlossenes Unterschema eines affinen Schemas wieder affin.

Beweis. Die Abbildung $I \mapsto \mathrm{Spec}(A/I)$ ist wohldefiniert, da nach Lemma 4.9 die Abbildung $\mathrm{Spec}(A/I) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(A)$ ein abgeschlossener Unterraum ist, $F^\sharp(X)\colon A \twoheadrightarrow A/I$ surjektiv und nach Lemma 13.4 also ein abgeschlossenes Unterschema definiert. Außerdem ist die Komposition $I \mapsto \mathrm{Spec}(A/I) \mapsto \mathrm{Ker}(F^\sharp(X))$ dann offenber die Identität.

Sei nun ein abgeschlossenes Unterschema $(F, F^\sharp)\colon Z \hookrightarrow X$ gegeben. Daher ist die A-Modulabbildung

$$\varphi := F^\sharp(X)\colon A = \mathcal{O}_X(X) \twoheadrightarrow (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})(X) \cong (F_*\mathcal{O}_Z)(X) \cong \mathcal{O}_Z(Z)$$

surjektiv und sicherlich $I := \mathrm{Ker}(F^\sharp(X)) \subseteq A$ ein Ideal. Wir möchten zeigen, dass $(F, F^\sharp)$ zu dem abgeschlossenen Unterschema $\mathrm{Spec}(A/I) \hookrightarrow X$ isomorph ist. Es gibt es ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, two heads] & & \mathcal{O}_Z(Z) \\
& A/I \arrow[ur, hook, "\varphi'"'] &
\end{tikzcd}$$

von Ringen zu dem nach Satz 9.20 ein Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X & & Z \arrow[ll, hook'] \arrow[dl] \\
& \mathrm{Spec}(A/I) \arrow[ul, hook] &
\end{tikzcd}$$

von Schemata korrespondiert. Indem wir φ durch φ' und X durch $\mathrm{Spec}(A/I)$ ersetzen, können wir annehmen, dass φ ein Ringisomorphismus ist und müssen also zeigen, dass $(F, F^\sharp)\colon Z \hookrightarrow X$ ein Isomorphismus von Schemata ist.

Dafür zeigen wir zunächst, dass $F\colon Z \to X = \mathrm{Spec}(A)$ ein Homöomorphismus ist. Nach Voraussetzung ist F abgeschlossen und injektiv und es genügt die Surjektivität zu zeigen. Nach Definition der abgeschlossenen Mengen in X gilt $F(Z) = \mathcal{V}(I) = \cap_{f\in I}\mathcal{V}(f)$ mit Lemma 4.3. Wir möchten zeigen, dass für $f \in A$ mit $F(Z) \subseteq \mathcal{V}(f)$ schon $V(f) = X$ folgt, woraus man die Surjektivität abliest. Es gilt $\mathcal{V}(f) = X$ genau dann, wenn $f^N = 0$ für einen Exponenten N. Da φ injektiv ist, genügt es ein N zu finden, sodass $\varphi(f^N) = 0$ gilt. Sei $(W, \mathcal{O}_{Z|W})$ ein offenes affines Unterschema von Z und betrachte die Komposition

$$\begin{array}{ccccc}
A & \to & \mathcal{O}_Z(Z) & \to & \mathcal{O}_{Z|W}(W) \cong \mathcal{O}_Z(W) \\
f & \mapsto & \varphi(f) & \mapsto & \varphi(f)_{|W}.
\end{array} \tag{13.1}$$

Diese Abbildung $\varphi(-)_{|W}$ von Ringen induziert durch Korollar 9.22 gerade die Abbildung $Fi\colon W \hookrightarrow Z \to X$ auf Schemata. Daher gilt $(Fi)^{-1}(\mathcal{V}(f)) = \mathcal{V}(\varphi(f)_{|W})$ und aus der Voraussetzung $F(Z) \subseteq \mathcal{V}(f)$ folgt $W \subseteq \mathcal{V}(\varphi(f)_{|W}) \subseteq W$. Daher ist das Element $\varphi(f)_{|W}$ nilpotent durch anwenden von $\mathcal{I}$ nach Korollar 5.3. Da X als affines Schema quasikompakt ist mit

Satz 4.11, gilt dieses ebenso für den abgeschlossenen Unterraum Z und wir können Z durch endlich viele offene affine Unterschemata W wie oben überdecken und ein gemeinsames N finden. Damit bekommen wir durch die Eindeutigkeit in der Garbenbedingung von $\mathcal{O}_Z$, dass $\varphi(f)^N = \varphi(f^N) = 0$ und also die gesuchte Homöomorphie.

Wir müssen noch zeigen, dass die $\mathcal{O}_X$-Modulabbildung $F^\sharp\colon \mathcal{O}_X \to F_*\mathcal{O}_Z$ injektiv (und daher bijektiv) ist (Wir wissen bisher nur, dass sie auf globalen Schnitten injektiv ist.). Dieses testen wir halmweise. Sei also $x \in X$. Dann gibt es ein $z \in Z$ mit $x = F(z)$. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \cong \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "\varphi=F^\sharp(X)"] \arrow[d] & (F_*\mathcal{O}_Z)(X) \cong \mathcal{O}_Z(Z) \arrow[d] \\ A_x \cong \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "F^\sharp_x"] & (F_*\mathcal{O}_Z)_x \end{tikzcd}$$

und möchten das Verschwinden von $\mathrm{Ker}(F^\sharp_x)$ zeigen. Dieses wäre durch die Exaktheit der Lokalisierung sofort klar, wenn die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_Z(Z) \otimes_A A_x \to (F_*\mathcal{O}_Z)_x$ ein Isomorphismus wäre. Um dieses zu zeigen, möchten wir jede offene Umgebung von x zu einer offenen Umgebung $x \in D(s)$ verfeinern, sodass gilt

$$\mathcal{O}_Z(Z) \otimes_A A[\tfrac{1}{s}] \cong \mathcal{O}_Z(F^{-1}(D(s))) = (F_*\mathcal{O}_Z)(D(s)),$$

wozu wir eine endliche affine offene Überdeckung $\{W_i \hookrightarrow Z\}$ hernehmen und zeigen, dass

$$\mathcal{O}_Z(W_i) \otimes_A A[\tfrac{1}{s}] \cong \mathcal{O}_Z(F^{-1}(D(s)) \cap W_i)$$

gilt und mit Einschränkungen auf W_{ij} verträglich ist. Hierraus folgt mit der Garbenbedingung von $\mathcal{O}_Z$ und der Exaktheit der Lokalisierung die Behauptung. Genau wie im ersten Teil haben wir ein Faserprodukt

$$\begin{tikzcd} D(\varphi(s)_{|W_i}) \cong (Fi)^{-1}(D(s)) \arrow[r] \arrow[d, hook] & D(s) \arrow[d, hook] \\ W_i \arrow[r, "Fi"] & X \end{tikzcd}$$

und bekommen

$$\mathcal{O}_Z(W_i) \otimes_A A[\tfrac{1}{s}] \cong \mathcal{O}_Z(D(\varphi(s)_{|W_i})) \cong \mathcal{O}_Z(F^{-1}(D(s)) \cap W_i)$$

auf eine mit Schnitten kompatible Weise. $\square$

Satz 13.6. *Für ein Schema X gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Quasikohärente} \\ \textit{Idealgarben von } \mathcal{O}_X \end{array} \right\} & \rightleftarrows & \left\{ \begin{array}{c} \textit{Abgeschlossene} \\ \textit{Unterschemata von } X \end{array} \right\} \\ \mathcal{I} & \longmapsto & (\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}), F^-(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})) \hookrightarrow X \\ \mathrm{Ker}(F^\sharp) & \longleftarrow\!\shortmid & (F, F^\sharp)\colon Z \hookrightarrow X \end{array}$$

wobei $F\colon \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) \hookrightarrow X$ die abgeschlossene Einbettung bezeichne.

Beweis. Zunächst zeigen wir, dasss die Abbildung von links nach rechts wohldefiniert ist. Ersteinmal ist $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ eine abgeschlossene Teilmenge von X und damit F eine abgeschlossene Einbettung. Ist $x \in X \setminus \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ gilt also $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x = 0$ und daher $\mathcal{I}_x \cong \mathcal{O}_{X,x}$ mittels der kanonischen Inklusion. Da $1 \in \mathcal{O}_{X,x}$ gibt es also eine offene Umgebung U um x und ein Element $a \in \mathcal{I}(U)$ mit $a_x = 1$. Dieses bedeutet aber, dass es eine offene Umgebung $V \subseteq U$ um x gibt mit $a_{|V} = 1$. Es ist also auch $a_y = 1$ für alle Keime a_y an Punkten $y \in V$ und damit $x \in V \subseteq X \setminus \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$. Daher ist $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$ abgeschlossen.

Angenommen, es wäre $(\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}), F^-(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ ein Schema. Die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_X \to F_*F^-(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ ist auf Halmen surjektiv (dieses ist eine Übung) und damit ist nach Lemma 13.4 die Abbildung $\mathcal{I} \mapsto (F, F^\sharp)$ wohldefiniert. Dann ist aber auch die Komposition $\mathcal{I} \mapsto (F, F^\sharp) \mapsto \mathrm{Ker}(F^\sharp)$ nach Lemma 13.4 die Identität (bis auf Isomorphie).

Angenommen, es wäre für eine abgeschlossene Immersion $(F, F^\sharp)$ die Idealgarbe $\mathrm{Ker}(F^\sharp)$ quasikohärent. Dann wäre auch die Komposition $(F, F^\sharp) \mapsto \mathrm{Ker}(F^\sharp) \mapsto (F, F^\sharp)$ nach Lemma 13.4 die Identität (bis auf Isomorphie).

Für die verbleibenden Behauptungen, dass das Bild von der Abbildung von links nach rechts ein Schema ist und dass das Bild der Abbildung von rechts nach links eine quasikohärente Idealgarbe ist, können wir lokal auf X argumentieren, da diese beiden Bedingungen lokal sind. Wir nehmen also an, dass $X = \operatorname{Spec}(A)$. Ist nun $\mathcal{I}$ quasikohärent, so gilt $\mathcal{I} = \tilde{I}$ für ein Ideal $I \subseteq A$ nach Satz 12.24. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \neq \mathcal{I}_\mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid A_\mathfrak{p} \neq I_\mathfrak{p}\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\} \\ &= \mathcal{V}(I) \end{aligned}$$

und $F^-(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}) = (A/I)^\sim$ und daher wird $\mathcal{I}$ auf $\operatorname{Spec}(A/I) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ abgebildet. Ist umgekehrt $Z \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A)$ ein abgeschlossenes Unterschema, so ist dieses nach Satz 13.5 von der Form $\operatorname{Spec}(A/I) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(A)$. Dann ist $\mathcal{I} = \operatorname{Ker}(\tilde{A} \to (A/I)^\sim)$ und daher insbesondere quasikohärent nach Lemma 12.26. □

Wir haben in Lemma 11.7 gesehen, dass das Faserprodukt, also das „Zurückziehen" einer offenen Immersion wieder eine solche ist. Das folgende Lemma zeigt, dass dieses auch für abgeschlossene Immersionen der Fall ist.

Lemma 13.7. *Sei S ein Schema, X, $Y \in \mathbf{Sch}/S$ und der Strukturmorphismus $i\colon Y \hookrightarrow S$ eine abgeschlossene Immersion. Betrachtet man das Faserprodukt*

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, hook, "j"] & S, \end{tikzcd}$$

so ist sein unterliegender topologischer Raum das Urbild $f^{-1}(Y)$ mit der Unterraumtopologie von X. Außerdem ist p_X ebenfalls eine abgeschlossene Immersion mit zugehöriger quasikohärenter Idealgarbe $\mathcal{I} := \operatorname{Im}(f^*\mathcal{J} \to f^*\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_X)$, wenn $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_S$ die zu j gehörige quasikohärente Idealgarbe bezeichne.

Beweis. Wir begründen zunächst, dass p_X eine abgeschlossene Immersion mit zugenöriger quasikohärenter Idealgarbe $\mathcal{I}$ ist. Da die Eigenschaft, eine abgeschlossene Immersion zu sein lokal auf dem Ziel einer Abbildung ist, können wir annehmen, dass $S = \operatorname{Spec}(R)$ und $X = \operatorname{Spec}(A)$ affin sind. Mit Satz 13.5 ist dann auch $Y = \operatorname{Spec}(R/J)$ für ein Ideal $J \subseteq A$ mit $\tilde{J} = \mathcal{J}$. Damit ist $X \times_S Y \cong \operatorname{Spec}(A \otimes_R R/I) = A/(\text{Bild von } J \text{ in } A)$ und p_X also induziert durch den surjektiven Ringhomomorphismus $A \twoheadrightarrow A/(\text{Bild von } J \text{ in } A)$. Mit Lemma 12.30.(2) bekommen wir dann das angegebene $\mathcal{I}$.

Nun möchten wir die topologischen Räume identifizieren. Es ist nach Anwenden des rechtsexakten Funktors f^* auf die per Definition exakte Folge $\mathcal{J} \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S/\mathcal{J} \to 0$ von $\mathcal{O}_S$-Moduln auch die Folge

$$f^*(\mathcal{J}) \to f^*(\mathcal{O}_S) = \mathcal{O}_X \to f^*(\mathcal{O}_S/\mathcal{J}) \to 0$$

von $\mathcal{O}_X$-Moduln exakt. Daher gilt

$$f^*(\mathcal{O}_S/\mathcal{J}) \cong \mathcal{O}_X/\operatorname{Ker} \cong \mathcal{O}_X/\operatorname{Im} = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$$

nach dem Homomorphiesatz. Nun, behaupten wir, gilt für das topologische Urbild, dass

$$f^{-1}(Y) = f^{-1}(\operatorname{Supp}(\mathcal{O}_S/\mathcal{J})) = \operatorname{Supp}(f^*(\mathcal{O}_S/\mathcal{J})) \cong \operatorname{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}).$$

Für die zweite Gleichung in dieser Kette bleibt noch zu zeigen, dass $\{x \in X \mid \mathcal{G}_{f(x)} \neq 0\} = \{x \in X \mid (f^*\mathcal{G})_x \neq 0\}$ gilt, wobei $\mathcal{G}$ (beziehungsweise $f^*\mathcal{G}$) (und damit auch alle ihre Halme, da Lokalisierung exakt ist) endlich erzeugte $\mathcal{O}_S$ (beziehungsweise $\mathcal{O}_X$) Moduln sind.

Sei $\mathcal{G}_{f(x)} = 0$. Dieses ist nach Lemma 12.10 äquivalent zu $(f^-\mathcal{G})_x = 0$ und daher ist auch $(f^*\mathcal{G})_x \cong (f^-\mathcal{G} \otimes_{f^-\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X)_x \cong 0 \otimes_{(f^-\mathcal{O}_S)_x} \mathcal{O}_{X,x} \cong 0$.

Ist umgekehrt $\mathcal{G}_{f(x)} \neq 0$, so genügt es für $(f^*\mathcal{G})_x \neq 0$ nach dam Nakayama Lemma A.28 zu zeigen, dass $(f^*\mathcal{G})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \neq 0$ gilt. Wir wissen nach dem gleichen Lemma, dass

$\mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,f(x)}} k(f(x)) \neq 0$. Nun folgt die Behauptung aus der Isomorphie

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,f(x)}} k(f(x)) &\cong \mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,f(x)}} k(f(x)) \otimes_{k(f(x))} k(x) \\
&\cong \mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,f(x)}} k(x) \\
&\cong \mathcal{G}_{f(x)} \otimes_{\mathcal{O}_{S,f(x)}} \mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \\
&\cong ((f^{-}\mathcal{G})_x \otimes_{(f^{-}\mathcal{O}_S)_x} \mathcal{O}_{X,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \\
&\cong (f^{-}\mathcal{G} \otimes_{f^{-}\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_X)_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \\
&\cong (f^{*}\mathcal{G})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im zweiten Schritt, genau wie im Beweis von Lemma 11.16, benutzt, dass für eine Abbildung $f\colon \operatorname{Spec}(k(x)) \to \operatorname{Spec}(R)$ von Schemata, das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}(k(x)) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \operatorname{Spec}(k(x)) \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec}(k(f(x))) \arrow[r] & \operatorname{Spec}(R)
\end{tikzcd}$$

ein Faserprodukt ist, also $k(f(x)) \otimes_R k(x) \cong k(x)$ gilt. □

Man erinnere sich daran, dass ein Ring A reduziert heißt, falls 0 sein einziges nilpotentes Element ist und ein Integritätsbereich, wenn er nicht der Nullring ist und wenn 0 sei einziger Nullteiler ist.

Definition 13.8. Ein Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt

(1) *reduziert*, falls $\mathcal{O}_{X,x}$ ein reduzierter Ring ist für alle $x \in X$,
(2) *integer*, falls X reduziert und irreduzibel ist.

Lemma 13.9. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema. Dann gilt:*

(1) X ist reduziert, genau dann wenn $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert ist für alle offenen $U \subseteq X$.
(2) X ist integer, genau dann wenn $\mathcal{O}_X(U)$ ein Integritätsbereich ist für alle offenen $U \subseteq X$ mit $U \neq \emptyset$.

Außerdem gilt:

(3) Ist X integer, so ist $\mathcal{O}_{X,x}$ ein Integritätsbereich für alle $x \in X$.

Beweis. Zunächst zeigen wir (1). Sei X reduziert, $U \subseteq X$ offen und $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $f^n = 0$. Dann gilt auch $f_x^n = 0 \in \mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in U$. Da diese Ringe reduziert sind, folgt $f_x^n = 0$ für alle $x \in U$, also auch auf kleinen Umgebungen U_x um x. Durch die Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{O}_X$ folgt $f = 0$.

Sei umgekehrt jeder Ring $\mathcal{O}_X(U)$ reduziert und $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit $f_x^n = 0$, dann gilt diese Gleichung auch in $\mathcal{O}_X(U)$ für eine kleine offene Umgebung U um x. Dann folgt für den Repräsentant $f \in \mathcal{O}_X(U)$ von f_x, dass $f = 0$, also auch $f_x = 0$.

Für (2) sei X integer. Da Reduziertheit eine lokale Eigenschaft ist und nach Lemma 4.17 jede nichtleere offene Teilmenge von X auch irreduzibel, ist jedes nichtleere offene Unterschema von X integer. Also genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{O}_X(X)$ ein Integritätsbereich ist. Ein irreduzibler topologischer Raum ist per Definition nichtleer, also ist $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{O}_X(X) \neq 0$ (X hat eine Überdeckung durch affine Unterschemata $\neq 0$, die jeweils 1 als globalen Schnitt haben, der offensichtlich mit Einschränkungen kompatibel ist, da Ringabbildungen die Eins aus die Eins schicken ud somit zu einem globalen Schnitt von X verklebt.) Seien also $f, g \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $fg = 0$. Wir wollen zeigen $f = 0$ oder $g = 0$. Sei $W = \operatorname{Spec}(A) \neq \emptyset$ eine affine offene Teilmenge von X. Dann gilt $f_{|W} g_{|W} = 0$ und daher $W = \mathcal{V}(0) = \mathcal{V}(f_{|W} g_{|W}) = \mathcal{V}(f_{|W}) \cup \mathcal{V}(g_{|W})$ nach Lemma 4.3. Da W nach Lemma 4.17 irreduzibel, können wir beispielsweise $W = \mathcal{V}(f_{|W})$ annehmen. Dieses bedeutet aber nach Korollar 5.3, dass $f_{|W} \in \operatorname{Nil}(A) = 0$, da A reduziert ist. Sei nun $U \neq \emptyset$ eine beliebige affine offene Teilmenge von X. Wenn wir zeigen, dass $f_{|U} = 0$ folgte durch Betrachtung einer Überdeckung von X durch solche U mit der Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{O}_X$, dass $f = 0$ und wir wären fertig. Es genügt wieder zu zeigen, dass $\mathcal{V}(f_{|U}) = U$. Nach Lemma 4.17 ist U irreduzibel, der Schnitt $U \cap W$ nichtleer und offen in U und damit dicht in U. Daher genügt es zu zeigen, dass $U \cap W \subseteq \mathcal{V}(f_{|U})$, denn dann folgt nach Abschluss $U \subseteq \mathcal{V}(f_{|U}) \subseteq U$. Wir wissen aber schon, dass $f_{|U\cap W} = 0$, also $f_x = 0$ für alle $x \in U \cap W$ und es gilt $\mathcal{V}(f_{|U}) = \{x \in U \mid f_{|U} \in x\} = \{x \in U \mid f_x = 0\}$.

Ist umgekehrt jedes $\mathcal{O}_X(U)$ ein Integritätsbereich, so ist X reduziert nach (1). Angenommen X wäre nicht irreduzibel. Dann gäbe es nach Lemma 4.17 zwei nichtleere offene

Teilmengen U und V mit leerem Durchschnitt. Dann wäre $\mathcal{O}_X(U \cup V) \cong \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{O}_X(V)$ nach der Garbenbedingung und die rechte Seite sicherlich kein Integritätsbereich. Also ist X integer.

Es folgt (3) aus (2), da jede (nichttriviale) Lokalisierung eines Integritätsbereiches wieder ein Integritätsbereich ist. □

Beispiel 13.10. Es folgt, dass ein affines Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$ reduziert (oder integer) ist genau dann, wenn A ein reduzierter Ring (oder ein Integritätsbereich) ist. Wir haben in Korollar 5.5 und Korollar A.17 gesehen, dass das affine Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$ irreduzibel ist, genau dann, wenn $\mathrm{Nil}(A)$ ein Primideal ist (und folglich der generische Punkt $\eta \in X$). Im speziellen Fall, dass X integer ist, ist der generische Punkt $\eta \in X$ das Nullideal (0).

Lemma 13.11. *Sei X ein Schema. Es gibt ein eindeutiges reduziertes abgeschlossenes Unterschema $i\colon X_{\mathrm{red}} \hookrightarrow X$ von X mit dem gleichen topologischen Raum $|X_{\mathrm{red}}| = |X|$. Diese Zuordnung definiert einen Funktor $(-)_{\mathrm{red}}\colon \mathbf{Sch} \to \mathbf{Sch}$ der rechtsadjungiert ist zur Inklusion der vollen Unterkategorie $\mathbf{Sch}_{\mathrm{red}}$ der reduzierten Schemata, es ist also*

$$i : \mathbf{Sch}_{\mathrm{red}} \leftrightarrows \mathbf{Sch} : (-)_{\mathrm{red}}$$

eine Adjunktion. Ist, mit anderen Worten, eine Abbildung $f\colon X \to Y$ von einem reduzierten Schema X gegeben, so faktorisiert diese eindeutig und in einer natürlichen Weise als

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed] & & Y \\ & Y_{\mathrm{red}} \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

(siehe Bemerkung 7.18).

Beweis. Sei $\mathcal{N}\mathrm{il}$ die Garbifizierung der Prägarbe

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{N}\mathrm{il}^{pre}\colon & \mathrm{Ouv}(X)^{op} & \to & \mathbf{Ab} \\ & U & \mapsto & \mathrm{Nil}(\mathcal{O}_X(U)) \end{array}$$

die das *Nilradikal* des Schemas X genannt wird. Offenbar ist X reduziert genau dann, wenn $\mathcal{N}\mathrm{il} \cong 0$. Ist $X = \mathrm{Spec}(A)$ affin, so gilt für eine basisoffene Menge $D(s) \subseteq X$, dass

$$\mathcal{N}\mathrm{il}^{pre}(D(s)) = \mathrm{Nil}(A[\tfrac{1}{s}]) = \mathrm{Nil}(A)[\tfrac{1}{s}],$$

da (für ein nicht nilpotentes Element s) $a \in A$ nilpotent ist genau dann, wenn dieses für sein Bild $\frac{a}{1} \in A[\frac{1}{s}]$ gilt. In diesem affinen Fall gilt also $\mathcal{N}\mathrm{il} \cong \mathrm{Nil}(A)^{\sim}$ und für beliebiges X ist $\mathcal{N}\mathrm{il}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Insbesondere definiert $X/\mathcal{N}\mathrm{il}$ nach Satz 13.6 ein abgeschlossenes Unterschema $X_{\mathrm{red}} \hookrightarrow X$, dass reduziert ist und den gleichen topologischen Raum hat wie X.

Für die Eindeutigkeit, sei $X' \hookrightarrow X$ ein weiteres abgeschlossenes Unterschema mit dem gleichen topologischen Raum $|X'| = |X|$. Nach Definition einer abgeschlossenen Immersion gibt es einen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus $\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_{X'}$ für eine Idealgarbe $\mathcal{I}$ von X. Sei $\mathrm{Spec}(A) \hookrightarrow X$ ein affines offenes Unterschema. Bilden wir das Faserprodukt

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(A/I) \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d, hook, dashed] & \mathrm{Spec}(A) \arrow[d, hook] \\ X' \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

wo wissen wir, dass dieses durch $\mathrm{Spec}(A/I)$ für ein Ideal $I \subseteq A$ (genauer $I \cong \mathcal{I}(\mathrm{Spec}(A))$) gegeben ist (siehe auch Lemma 13.7). Ausserdem ist $|\mathrm{Spec}(A/I)| \cong |\mathrm{Spec}(A)|$ nach Lemma 11.7 und der Voraussetzung $|X'| = |X|$. Es gilt also mit Lemma 4.9, für die topologischen Räume, dass $\mathcal{V}(I) \cong \mathrm{Spec}(A/I) \cong \mathrm{Spec}(A)$ und mit Satz 5.2 folgt $I = \sqrt{I} = \mathrm{Nil}(A)$, wobei die erste Gleichung gilt, da das Schema X' und somit auch das offene Unterschema $\mathrm{Spec}(A/I)$ reduziert sind. Diese Gleichung ist offensichtlich kompatibel mit Einschränkungen und wir bekommen einen Isomorphismus $\mathcal{I} \cong \mathcal{N}\mathrm{il}$ von $\mathcal{O}_X$-Moduln, welcher die Eindeutigkeit liefert.

Für die letzte eindeutige Faktorisierungsaussage überlegt man sich zunächst, dass ein Morphismus, der das abgebildete Dreieck an der gestrichelten Stelle kommutativ macht, eindeutig ist, falls er existiert. Dieses liegt an der Injektivität von $i\colon Y_{\mathrm{red}} \to Y$ auf topologischen Räumen und der halmweisen Surjektivität von $i^\sharp$. Die Existenz eines solchen

Morphismus liegt, nachdem man sich mit Korollar 10.16 auf die affine Situation reduziert hat, an der folgenden Eigenschaft für Ringabbildungen. Ist $\alpha\colon A \to B$ eine Ringabbildung, so gilt $\alpha(\mathrm{Nil}(A)) \subseteq \mathrm{Nil}(B)$ für die jeweiligen Nilradikale und es gibt also eine induzierte Ringabbildung $\bar{\alpha}\colon A/\mathrm{Nil}(A) \to B/\mathrm{Nil}(B)$. □

Lemma 13.12. *Sei X ein Schema und $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann gibt es ein eindeutiges reduziertes abgeschlossenes Unterschema $i\colon Z_{\mathrm{red}} \hookrightarrow X$ von X mit unterliegendem topologischen Raum $|Z_{\mathrm{red}}| = Z$.*

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma 13.11 gibt es maximal eine Schemastruktur auf $|Z|$, sodass $Z \hookrightarrow X$ ein abgeschlossenes Unterschema ist.

Für die Existenz sei $\{U_i \hookrightarrow X\}$ eine affine offene Überdeckung mit $U_i = \mathrm{Spec}(A_i)$. Es ist $Z \cap U_i$ eine abgeschlossene Teilmenge in U_i und ist also von der Form $\mathcal{V}(I_i)$ für ein Ideal $I_i \subseteq A_i$. Es ist (siehe Beispiel 13.10) $Z_{i,\mathrm{red}} := \mathrm{Spec}(A_i/\sqrt{I_i})$ ein reduziertes Schema mit topologischen Raum $Z \cap U_i$. Für alle Paare (i,j) ist $Z_{ij,\mathrm{red}} := (Z \cap U_{ij}, \mathcal{O}_{Z_{i,\mathrm{red}}|Z\cap U_{ij}}) \hookrightarrow Z_{i,\mathrm{red}}$ ein reduziertes offenes Unterschema mit topologischem Raum $Z \cap U_{ij}$. Umgekehrt ist auch $Z_{ji,\mathrm{red}} := (Z \cap U_{ji}, \mathcal{O}_{Z_{j,\mathrm{red}}|Z\cap U_{ji}}) \hookrightarrow Z_{j,\mathrm{red}}$ ein offenes Unterschema mit dem gleichen topologischen Raum. Es gilt $Z_{ij,\mathrm{red}} = Z_{ji,\mathrm{red}}$ (dieses ist eine Übungsaufgabe) und die Kozykelbedingung ist daher erfüllt. Mit Satz 10.15 verkleben die Schemata $Z_{i,\mathrm{red}}$ zu einem Schema Z_{red} mit topologischem Raum Z. Nun betrachtet man das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z_{i,\mathrm{red}} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & U_i \arrow[d, hook] \\ Z_{\mathrm{red}} \arrow[r, dashed] & X \end{tikzcd}$$

Mit Korollar 10.16 existiert der gestrichelte Pfeil (und macht das obige Diagramm zu einem Faserprodukt). Die gestrichelte Abbildung ist ebenfalls eine abgeschlossene Immersion, da man diese Eigenschaft eines Schemamorphismus auf einer offenen Überdeckung des Ziels testen kann. □

Wir haben in Beispiel 13.10 gesehen, dass für ein integres affines Schema $X = \mathrm{Spec}(A)$ der generische Punkt gerade das Nullideal von A ist. Es ist daher also der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\eta} = k(\eta) = A_{(0)} = \mathrm{Quot}(A)$ ein Körper. Ein beliebiges integres (sogar nur irreduzibles) Schema X hat nach Satz 10.21 einen eindeutigen generischen Punkt η. Um den lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ zu bestimmen, können wir uns auf eine affine offene Umgebung von η zurückziehen. (Es ist sogar jedes nichtleere offene Unterschema eine Umgebung des generischen Punkts nach Lemma 4.19.) Es folgt, dass für ein irreduzibles Schema X der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,\eta}$ ein Körper ist.

Definition 13.13. Sei X ein integres Schema mit generischem Punkt η. Dann heißt der Körper $K(X) := \mathcal{O}_{X,\eta}$ der *Funktionenkörper* von X.

Es ist nach dem folgenden Lemma besondes einfach, die Strukturgarbe eines integren Schemas zu beschrieben.

Lemma 13.14. *Sei X ein integres Schema und $x \in U \subseteq V$ offene Teilmengen von X, sowie $\{U_i \hookrightarrow U\}$ eine offene Überdeckung. Dann sind jeweils die beiden Abbildungen*

$$\mathcal{O}_X(V) \xhookrightarrow{(-)_{|U}} \mathcal{O}_X(U) \xhookrightarrow{(-)_\eta} \mathcal{O}_{X,\eta} = K(X)$$

injektiv und folglich auch die induzierte Abbildung $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow K(X)$. Weiterhin gilt

$$\bigcap_i \mathcal{O}_X(U_i) = \mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{x\in U} \mathcal{O}_{X,x}$$

wobei der Schnitt im Funktionenkörer $K(X)$ betrachtet wird.

Beweis. Da für eine injektive Komposition von Abbildungen immer auch die erste dieser eine Injektion ist, genügt es fuer die erste Behauptung zu zeigen, dass $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\eta}$ injektiv ist. Sei also $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mit $f_\eta = 0$. Es genügt nach der Eindeutigkeitseigenschaft der Garbe $\mathcal{O}_X$ zu zeigen, dass die Einschränkungen f_{U_i} auf einer offenen affinen Überdeckung $\{\mathrm{Spec}(A_i) \hookrightarrow U\}$ verschwinden, wobei A_i nach Lemma 13.9 ein Integritätsbereich ist. Die Behauptung folgt dann aus der Injektivität von $A_i \hookrightarrow \mathrm{Quot}(A_i) = K(X)$.

Die erste Gleichung der zweiten Behauptung folgt direkt aus der Garbeneigenschaft von $\mathcal{O}_X$ bezüglich der Überdeckung $\{U_i \hookrightarrow U\}$. Das dort vorkommende Equalizer-Diagramm können wir wegen der ersten Behauptung innerhalb von $K(X)$ interpretieren. Für die zweite Gleichung können wir ein affines $X = \operatorname{Spec}(A)$ anehmen und wissen mit Korollar 8.8, dass

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X^{pre}(X) = (A \setminus \cup_{\mathfrak{p}\in X}\mathfrak{p})^{-1}A = \cap_{\mathfrak{p}\in X}(A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A = \cap_{\mathfrak{p}\in X} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{p}\in X} \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}. \quad \square$$

Beispiel 13.15. Das vorherige Lemma 13.14 ist falsch, wenn das Schema X nicht reduziert ist. Ist beispielsweise $X = \operatorname{Spec}(A)$ ein irreduzibles affines Schema mit generischem Punkt η, so betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X,\eta} \arrow[d, equal] \\ \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(U) \arrow[r, hook] & \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}},\eta_{\mathrm{red}}} \end{tikzcd}$$

wobei die rechte vertikale Abbildung die Identität ist, da Lokalisierung mit Radikalen von Idealen vertauscht. Ist nun X irreduzibel aber nicht reduziert, so kann die Komposition

$$\mathcal{O}_X(X) = A \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(X_{\mathrm{red}}) = A_{\mathrm{red}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,\eta}$$

nicht injektiv sein, da die erste vorkommende Abbildung nicht injektiv ist.

Für ein konkreteres Beispiel betrachten wir $X = \operatorname{Spec}(A)$ mit $A = k[X,Y]/(XY, X^2)$ und zugehörigem reduzierten Schema $X_{\mathrm{red}} = \operatorname{Spec}(k[X,Y]/(X)) = \operatorname{Spec}(k[Y])$. Es ist X also irreduzibel aber nicht reduziert. Die Abbildung $A = \mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(D(Y)) = A[\frac{1}{Y}]$ ist nicht injektiv, da das Element X auf Null geschickt wird.

Bemerkung 13.16. Es sei daran erinnert, dass ein topologischer Raum Hausdorff heißt, wenn zwei verschiedene seiner Punkte disjunkte offene Umgebungen haben. Wir betrachten die (injektive) Diagonale

$$\begin{array}{cccc} \Delta\colon & X & \to & X \times X \\ & x & \mapsto & (x,x) \end{array}$$

und beobachten, dass X Hausdorff ist genau dann, wenn $\Delta(X)$ eine abgeschlossene Menge (und mit der Unterraumtopologie also ein abgeschlossener Unterraum) in $X \times X$ ist. Dieses sieht man wie folgt: Sei zunächst X Hausdorff. Wir zeigen, dass jeder Punkt (x,y) im Komplement $X \times X \setminus \Delta(X)$ eine in $X \times X$ offene Umgebung darin hat. Für einen solchen Punkt gilt $x \neq y$. Nach Voraussetzung gibt es offene disjunkte Umgebungen $U_x, U_y \subseteq X$ davon. Per Definition der Produkttopologie ist $U_x \times U_y$ eine offene Menge in $X \times X$, die disjunkt von $\Delta(X)$ ist.

Ist nun umgekehrt $\Delta(X)$ abgeschlossen und sind $x \neq y$ zwei Punkte, so liegt (x,y) in der offenen Teilmenge $X \times X \setminus \Delta(X)$ von $X \times X$. Nach Definition der Produkttopologie, gibt es also offene Mengene $U_x \subseteq X$ und $U_y \subseteq X$ mit $(x,y) \in U_x \times U_y \subseteq X \times X \setminus \Delta(X)$. Dieses sind die gesuchten disjunkten Umgebungen in X.

Wir haben schon gesehen, dass der einem Schema unterliegende topologische Raum fast nie Hausdorff ist. Um ein schematheoretisches Analogon zu diesem Begriff zu definieren, benutzen wir die obige andere Charakterisierung und den zu einer abgeschlossen Einbettung analogen Begriff der abgeschlossenen Immersion.

Definition 13.17. Eine Morphismus $X \to S$ von Schemata heißt *separiert*, falls die durch die universelle Eigenschaft des Faserprodukts (bezüglich $(\mathrm{id}, \mathrm{id})$) definierte Diagonalabbildung

$$\Delta\colon X \to X \times_S X$$

eine abgeschlossene Immersion ist. Ein Schema heißt X separiert, wenn der eindeutige Schemamorphismus $X \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ separiert ist.

Bemerkung 13.18. Bezeichnen $p, q\colon |X \times_S X| \to |X|$ die beiden Projektionen, so ist die Inklusion

$$\Delta(X) \subseteq \{(x,y) \in |X \times_S X| \mid q(x) = p(y)\}$$

im Gegensatz zu der analogen Situation bei topologischen Räumen nicht unbedingt eine Gleichheit. Ist beispielsweise $X = \operatorname{Spec}(\mathbb{C})$ und $S = \operatorname{Spec}(\mathbb{R})$, so gilt

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{R}[X]/(X^2+1) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[X]/(X^2+1) \cong \mathbb{C}[X]/(X+1)(X-1) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

nach dem Chinesischen Restsatz A.2. Daher besteht der unterliegende topologische Raum von $X \times_S X = \operatorname{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ aus zwei Punkten, während $|X|$ und damit auch $|\Delta(X)|$ einpunktig ist.

Lemma 13.19. *Ein Morphismus von affinen Schemata ist separiert und insbesondere ist jedes affine Schema separiert.*

Beweis. Ist $\operatorname{Spec}(A) = X \to S = \operatorname{Spec}(k)$ ein Morphismus affiner Schemata, so ist die Abbildung $\Delta\colon X \to X \times_S X$ per Konstruktion gerade gegeben durch die Multiplikation

$$\begin{array}{rcl} A \times_k A & \to & A \\ a \otimes a' & \mapsto & aa' \end{array} \tag{13.2}$$

welche offenbar surjektiv ist. Damit ist Δ eine abgeschlossene Immersion. $\square$

Lemma 13.20. *Ein Schema X ist separiert genau dann, wenn für alle affinen offenen Teilmengen U und V auch der Schnitt $U \cap V$ affin ist und die kanonische Abbildung*

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(V) & \to & \mathcal{O}_X(U \cap V) \\ f \otimes g & \mapsto & f_{|U\cap V}\, g_{U\cap V} \end{array}$$

surjektiv.

Beweis. Wir haben ein Faserprodukt

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, "h"] \arrow[d] & U \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} V \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} X \end{tikzcd}$$

wobei die beiden vertikalen Pfeile offene Immersionen sind. Die Abbildung (13.2) ist nun gerade die Abbildung $h^\sharp$. Es ist $U \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} V$ ein affines Schema. Ist nun X separiert und daher Δ eine abgeschlossene Immersion, so gilt dieses auch fuer h nach Lemma 13.7. Daher ist nach Satz 13.5 auch $U \cap V$ ein affines Schema und die Abbildung (13.2) surjektiv.

Für die Umkehrung sei $\{U_i \hookrightarrow X\}$ eine offene affine Überdeckung von X. Nach Voraussetzung sind alle Schnitte $U \cap V$ affine und die Abbildung (13.2) surjektiv. Dieses bedeutet, dass die Abbldung h eine abgeschlossene Immersion ist nach Satz 13.5. Schliesslich ist auch Δ eine abgeschlossene Immersion, da man dieses lokal auf dem Ziel testen kann und $\{U_i \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} U_j \hookrightarrow X \times_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})} X\}$ eine offene Überdeckung ist. $\square$

Beispiel 13.21. Mit dem vorherigen Lemma kann man zeigen, dass die Doppelpunktgerade X, die durch Verkleben von $U_1 := \operatorname{Spec}(k[X])$ und $U_2 := \operatorname{Spec}(k[Y])$ entlang

$$\begin{array}{rrcl} \varphi_{ij}\colon & U_{12} = U_1 \setminus \{0\} \cong \operatorname{Spec}(k[X, X^{-1}]) & \xrightarrow{\cong} & \operatorname{Spec}(k[Y, Y^{-1}]) \cong U_2 \setminus \{0\} = U_{21} \\ & X & \mapsto & Y. \end{array}$$

gebildet wird, nicht separiert (und nach Lemma 13.19 insbesondere nicht affin) ist.

Satz 13.22. *Sei S ein Schema und seien $f, g\colon X \to Y$ zwei Morphismen in $\mathbf{Sch}/S$ von einem reduzierten Schema X in ein separiertes Schema $Y \to S$. Falls es eine dichte offene Teilmenge $U \subseteq X$ gibt mit $f_{|U} = g_{|U}$, dann folgt schon $f = g$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $f(x) = g(x)$ auf topologischen Räumen gilt für alle $x \in X$. Wir betrachten den durch die universelle Eigenschaft des Faserprodukts gegebenen Morphismus $(f, g)\colon X \to Y \times_S Y$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] \arrow[ddrrr, bend left, "f"] \arrow[dddrr, bend right, "f"'] & & & \\ & Y \arrow[dr, "\Delta"] & & \\ & & Y \times_S Y \arrow[r, "pr_1"] \arrow[d, "pr_2"'] & Y \arrow[d] \\ & & Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

zeigt $\Delta \circ f = (f, f)$. Es gilt $(f, f)_{|U} = (f, g)_{|U}$, also $(f, g)(U) \subseteq \Delta(Y)$ und daher $U \subseteq (f, g)^{-1}(\Delta(Y))$. Nun ist aber (f, g) stetig und $\Delta(Y)$ nach Voraussetzung abgeschlossen. Also ist $X = (f, g)^{-1}(\Delta(Y))$, weil U dicht war und damit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$.

Wir müssen noch zeigen, dass die Abbildungen auf den zugehörigen Ringgarben gleich sind. Dafür können wir $X = \mathrm{Spec}(A)$ und $Y = \mathrm{Spec}(B)$ affin annehmen. Also sind f und g mit Korollar 9.22 durch Ringmorphismen $\alpha, \beta \colon B \to A$ induziert. Wir wollen zeigen, dass $\alpha = \beta$. Sei also $b \in B$ und betrachte $a := \alpha(b) - \beta(b)$. Nach Voraussetzung gilt $a_{|U} = 0$, also $U \subseteq \mathcal{V}(a)$. Es folgt $\mathrm{Spec}(A) = \mathcal{V}(a)$, da U dicht ist und nach Satz 5.2 also $a \in \mathrm{Nil}(A)$. Weil X und damit auch A reduziert sind, folgt $a = 0$ und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Anhang A. Ringe und Ideale

Unsere Standardreferenz für kommutative Algebra ist das Buch [1]. Begriffe wie zum Beispiel *Ring* oder *Modul* werden wir nicht explizit definieren sondern die Definitionen aus [1] benutzen. Es sei aber daran erinnert, dass ein *Ring* A bei uns immer kommutativ ist und ein Einselement besitzt, also ein (folglich eindeutiges) Element $1 \in A$ mit $1a = a$ für alle $a \in A$. Es ist also insbesondere der *Nullring* (0) ein Ring, und zwar der einzige mit $1 = 0$. Ein Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$ hat per Definition insbesondere die Eigenschaft, dass er die Eins von A auf die Eins von B abbildet, also $f(1) = 1$ gilt. Es ist das Bild eines Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$ ein Unterring von B, der Kern von f ist aber nicht unbedingt ein Unterring von A. Eine A-Algebra ist ein Ring B zusammen mit einem Ringhomomorphismus $f\colon A \to B$. (Man kann also Elemente aus B mit Elementen aus A „skalarmultiplizieren" durch $a \cdot b := f(a)b$. Es ist B insbesondere ein A-Modul). Jeder Ring ist eine $\mathbb{Z}$-Algebra. Ein A-Algebrenhomomorphismus $f\colon B \to B'$ ist ein Ringhomomorphismus, sodass das Dreieck

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B \arrow[rr, "f"] & & B' \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ein A-Algebrenhomomorphismus $A[X_1, \ldots, X_n] \to B$ ist festgelegt durch die Bilder $X_j \to g_j$ und man schreibt $A[g_1, \ldots, g_j] \subseteq B$ für dessen Bild (welches auch eine A-Algebra ist).

Ein *Ideal* I in einem Ring A ist eine additive Untergruppe, sodass gilt

$$a \in A \text{ und } x \in I \Rightarrow ax \in I.$$

Für ein Ideal $I \subseteq A$ gilt $I = A$ genau dann, wenn $1 \in I$. Ein Ideal $I \subseteq A$ ist insbesondere ein A-Modul und alle Untermoduln des A-Moduls A sind genau die Ideale von A. Ist M ein A-Modul und $G \subseteq M$ eine Menge von Elementen, so ist

$$AG := \{a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n \in M \mid a_j \in A \text{ und } g_j \in G\}$$

der *von G erzeugte Untermodul von M*. Ein A-Modul M heisst *endlich erzeugt (als Modul)*, falls $g_1, \ldots, g_n \in M$ existieren mit $M = A\{g_1, \ldots, g_n\}$. Eine A-Algebra B heisst *von endlichem Typ* (oder *endlich erzeugt als Algebra*), falls $g_1, \ldots, g_n \in B$ existieren mit $B = A[g_1, \ldots, g_j]$ und *endlich*, wenn B endlich erzeugt ist als A-Modul. Natürlich gilt hier die Implikation

$$\text{endlich} \implies \text{von endlichem Typ.}$$

Beispiel A.1. Es ist $A[X]$ eine A-Algebra von endlichem Typ aber sie ist nicht endlich, da $A[X] = A \oplus A \oplus \ldots$ als A-Modul.

Ein beliebiger Durchschnitt von Untermodul eines A-Moduls M ist wieder ein Untermodul und es gilt

$$AG = \bigcap_{\substack{N \subseteq M \text{ Untermodul} \\ G \subseteq N}} N,$$

also ist AG der kleinste Untermodul von M, der G enthält. In dem Spezialfall $M = A$ heisst $(G) := AG$ das *von G erzeugte Ideal*. Ein Ideal I heisst also *endlich erzeugt*, falls es Elemente $i_1, \ldots, i_n \in I$ gibt mit $I = (i_1, \ldots, i_n) := A\{i_1, \ldots, i_n\}$. Ein Ring A heisst *noethersch*, wenn jede aufsteigende Idealkette stationär wird. Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes Ideal endlich erzeugt ist.

In Gegensatz zum Durchschnitt ist eine Vereinigung von Untermoduln nicht unbedingt ein Untermodul und deren Summe ist der kleinste Untermodul, der die Vereinigung enthält: Ist $\{N_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie von Untermoduln von M, so definiert man deren *Summe* als

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i \in I} N_i &:= A(\cup_{i \in I} N_i) \\ &= \{a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n \in M \mid a_j \in A \text{ und } g_j \in (\cup_{i \in I} N_i)\} \\ &= \{a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n \in M \mid a_j \in A \text{ und } g_j \in N_i\} \\ &= \{x_1 + \ldots + x_n \in M \mid x_j \in N_i\} \\ &= \text{„alle endlichen Summen aus Elementen aus den } N_j\text{"}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist auf diese Weise eine Summe von Idealen definiert und es gilt im Spezialfall

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Für eine endliche Menge $I_1, I_2, \ldots, I_n$ von Idealen definiert man außerdem deren *Produkt* als

$$I_1 \cdot \cdots \cdot I_n := A\{i_1 i_2 \cdots i_n \in A \mid i_j \in I_j\}.$$

Es folgt im Speziellen, dass $I^n = \{i_1 \cdots i_n \in A \mid i_j \in I\}$ und

$$(x_1, \ldots, x_n)(y_1, \ldots, y_m) = (x_1 y_1, x_1 y_2, \ldots, x_n y_m).$$

Die beiden betrachteten Operationen für Ideale sind assoziativ und kommutativ und es gilt $I(\sum_j J_j) = \sum_j I J_j$ sowie $I_1 \cdot \cdots \cdot I_n \subseteq I_1 \cap \ldots \cap I_n$. Ideale $I, J \subseteq A$ heissen *koprim*, falls $I + J = A$.

Ist $\{A_i\}_{i \in I}$ eine Familie von Ringen, so definiert man deren *direktes Produkt* als die Produktmengeenge $\prod_{i \in I} A_i$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation. Das direkte Produkt mit Nullringen ist (bis auf Isomorphie von Ringen) irrelevant. Sind jeweils Ideale $I_i \subseteq A_i$ gegeben, so ist deren Produkt ein Ideal in $\prod A_i$ und ist I endlich, so sind dies genau die Ideale im Produkt.

Satz A.2 (Chinesischer Restsatz)**.** *Sind $I_1 \ldots, I_n$ paarweise koprime Ideale in A, so gilt $I_1 \cdot \cdots \cdot I_n = I_1 \cap \ldots \cap I_n$. Außerdem ist der Ringhomomorphismus*

$$\begin{array}{rcl} A \big/ \bigcap_i I & \longrightarrow & A/I_1 \times \ldots \times A/I_n \\ x + \cap_i I & \mapsto & (x + I_1, \ldots, x + I_n) \end{array}$$

ein Isomorphismus.

Ein Element $x \in A$ heisst *Einheit*, wenn es ein (folglich eindeutiges) $y \in A$ gibt mit $xy = 1$. Ein Ring $\neq 0$ in dem jedes Element $\neq 0$ eine Einheit ist, heisst *Körper*. Für ein Ideal $I \subseteq A$ gilt

$$\begin{array}{rcl} I \text{ ist } \textit{Maximalideal} & \iff & A/I \text{ ist ein Körper} \\ & \iff & (0) \text{ ist Maximalideal in } A/I \\ & \iff & I \neq A \text{ und kein Ideal liegt echt zwischen } I \text{ und } A. \end{array}$$

Ein Element $x \in A$ heisst *Nullteiler*, wenn es ein $y \neq 0$ in A gibt mit $xy = 0$. Ein Ring $\neq 0$ in dem es keine Nullteiler $\neq 0$ gibt, heisst *Integritätsbereich*. Für ein Ideal $I \subseteq A$ gilt

$$\begin{array}{rcl} I \text{ ist } \textit{Primideal} & \iff & A/I \text{ ist ein Integritätsbereich} \\ & \iff & (0) \text{ ist Primideal in } A/I \\ & \iff & I \neq A \text{ und } xy \in I \Rightarrow x \in I \vee y \in I \\ & \iff & I \neq A \text{ und } JK \subseteq I \Rightarrow J \subseteq I \vee K \subseteq I. \end{array}$$

Ein Element $x \in A$ heisst *nilpotent*, wenn es $n > 0$ gibt mit $x^n = 0$. Ein Ring in dem es keine Nilpotenten $\neq 0$ gibt, heisst *reduzierter Ring*. Für ein Ideal $I \subseteq A$ definiert man das zugehörige *Radikalideal* als $\sqrt{I} := \{x \in A \mid x^n \in I \text{ für } n > 0\}$, es heisst $\mathrm{Nil}(A) := \sqrt{(0)}$ das *Nilradikal* von A und $A_{\mathrm{red}} := A/\operatorname{Nil}(A)$ der zu A gehörige *reduzierte Ring*. Ein Ring A ist genau dann reduziert, wenn $A \cong A_{\mathrm{red}}$. Es gilt

$$\begin{array}{rcl} I \text{ ist } \textit{Radikalideal} & \iff & A/I \text{ ist ein reduzierter Ring} \\ & \iff & (0) \text{ ist Radikalideal in } A/I \\ & \iff & \text{Die Inklusion } I \subseteq \sqrt{I} \text{ ist eine Gleichheit} \\ & \iff & x^n \in I \text{ für ein } n > 0 \Rightarrow x \in I. \end{array}$$

Für ein Element $x \in A \neq 0$ gelten die Implikationen

$$\text{Einheit} \implies \text{kein Nullteiler} \implies \text{nicht nilpotent},$$

für einen Ring A die Implikationen

$$\text{Körper} \implies \text{Integritätsbereich} \implies \text{reduzierter Ring}$$

und für ein Ideal $I \subseteq A$ die Implikationen

$$\text{Maximalideal} \implies \text{Primideal} \implies \text{Radikalideal}.$$

Beispiel A.3. Sei A ein Ring und $f = a_nX^n + \cdots + a_0 \in A[X]$ ein Polynom, dann gilt

$$\begin{array}{lcl} f \text{ ist Einheit} & \Leftrightarrow & a_0 \text{ ist Einheit und } a_1, \ldots, a_n \text{ nilpotent,} \\ f \text{ ist Nullteiler} & \Leftrightarrow & \text{es gibt ein } y \neq 0 \text{ in } A \text{ mit } fy = 0, \\ f \text{ ist Nilpotent} & \Leftrightarrow & \text{alle } a_0, \ldots, a_n \text{ sind nilpotent} \end{array}$$

und folglich gilt beispielsweise $\mathrm{Nil}(A[X]) = \mathrm{Nil}(A)[X]$.

Summen und Produkte von radikalen, primen oder maximalen Idealen haben jeweils nicht unbedingt die gleiche Eigenschaft. Ebenso sind Durchschnitte von maximalen und primen Idealen nicht unbedingt wieder von dieser Form. Es gilt allerdings für Ideale $I_1, \ldots, I_n$ die Formel

$$\sqrt{I_1} \cap \ldots \cap \sqrt{I_n} = \sqrt{I_1 \cap \ldots \cap I_n} = \sqrt{I_1 \cdot \cdots \cdot I_n}.$$

Für positive Exponenten gilt $\sqrt{(g_1^{\alpha_1}, \ldots, g_n^{\alpha_n})} = \sqrt{(g_1, \ldots, g_n)}$ und $\sqrt{\mathfrak{p}^\alpha} = \mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$. Außerdem ist ein beliebiger Durchschnitt von Radikalidealen ein Radikalideal. Unterringe von Körpern sind nicht unbedingt wieder Körper, wie das Beispiel $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ zeigt. Hingegen sind Unterringe (ungleich Null) von Integritätsbereichen wieder solche und Unterrige reduzierter Ringe wieder reduziert.

Die maximalen Ideale in einem endlichen direkten Produkt $A_1 \times \ldots \times A_n$ von Ringen sind von der Form $A_1 \times \ldots \times \mathfrak{m}_j \times \ldots \times A_n$ wobei $\mathfrak{m}_j \subseteq A_j$ Maximalideal ist. Die analoge Aussage gilt auch für Primideale und Radikalideale. Es gilt $\sqrt{I_1 \times \ldots \times I_n} = \sqrt{I_1} \times \ldots \times \sqrt{I_n}$. Die Einheiten des direkten Produktrings sind die Produkte der Einheiten und die analoge Aussage gilt auch für Nilpotente. Bei einem nichttrivialen direkten Produkt (also mit mehr als einem Faktor ohne Nullring) sind alle Elemente Nullteiler.

Ringhomomorphismen schicken Einheiten auf Einheiten und es können Nichteinheiten zu Einheiten werden, wie das Beispiel $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ zeigt. Ringhomomorphismen müssen nicht unbedingt Nullteiler auf Nullteiler schicken wie das Beispiel $3 \in \mathbb{Z}/6 \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$ zeigt und nicht unbedingt Nichtnullteiler auf Nichtnullteiler wie das Beispiel $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/2$ zeigt. Ringhomomorphismen schicken Nilpotente auf Nilpotente und es können Nichtnilpotente zu Nilpotenten werden. Urbilder von Idealen unter Ringhomomorphismen sind wieder Ideale. Das Gleiche gilt für Radikalideale und Primideale, jedoch nicht für Maximalideale, wie das Beispiel $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \supseteq (0)$ zeigt. Bilder von Idealen unter Ringhomomorphismen sind nicht unbedingt wieder Ideale. Dies ist aber beispielsweise richtig, wenn der Ringhomomorphismus surjektiv ist. Surjektive Ringhomomorphismen $f\colon A \twoheadrightarrow B$ sind (bis auf Isomorphie von Ringen) genau die Quotientenabbildungen mit $B \cong A/I$ und $f(x) = x + I$ für ein Ideal $I \subseteq A$. Die Quotientenabbildung f kommutiert mit Summen von Idealen und es gilt im Speziellen $(x_1, \ldots, x_n) + I = (x_1 + I, \ldots, x_n + I)$.

Satz A.4 (Idealkorrespondenz für Quotienten)**.** *Ist $f\colon A \twoheadrightarrow A/I$ mit $a \mapsto a + I$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, so gibt es eine inklusionserhaltende Bijektion*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideale } J \subseteq A, \\ \textit{die } I \textit{ enthalten} \end{array} \right\} \underset{f^{-1}(K) \leftarrow\!\shortmid K}{\overset{J \mapsto f(J)}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideale von} \\ A/I \end{array} \right\}$$

die auf maximale, prime und radikale Ideale einschränkt.

Da ein maximales Ideal auch ein Primideal ist, könnte man dieses auch als *maximales Primideal unter dem Ideal $I = A$* bezeichnen. Analog definiert man für ein gegebenes Ideal $I \subseteq A$ und ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$

$$\mathfrak{p} \text{ ist } \textit{minimales Primideal über } I \iff I \subseteq \mathfrak{p} \text{ und kein Primideal liegt echt dazwischen.}$$

Ein *minimales Primideal von A* ist ein minimales Primideal über dem Ideal (0).

Satz A.5. *Jeder Ring $A \neq 0$ hat mindestens ein maximales Ideal. Für ein Ideal $I \neq A$ in einem Ring A gibt es mindestens ein minimales Primideal über I.*

Bemerkung A.6. Es ist vielleicht lohnenswert sich einmal eine Anwendung des Lemmas von Zorn genauer anzuschauen, also zum Beispiel dessen Anwendung im Beweis des ersten Teils des vorherigen Satzes:

- Es sei ein (nichtleeres) *Poset P* gegeben, also zum Beispiel eine Teilmenge der Potenzmenge. In dem hiesigen Fall ist dieses die Menge der echten Ideale.

- Eine total geordnete Teilmenge T von P heisst eine *Kette* und alle diese in P sollen eine obere Schranke in P besitzen. Im hiesigen Fall ist dies eine Kette von Idealen $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots$ und deren Vereinigung $\cup I_j$ ist, wie man leicht sieht, ein echtes Ideal.
- Also hat P nach dem Lemma von Zorn (mindestens) ein maximales Element, es gibt also kein groesseres Element in P. Im hiesigen Fall ist dies ein maximales Ideal.

Korollar A.7. *Ein Element eines Ringes A ist eine Einheit genau dann, wenn es in keinem Maximalideal enthalten ist.*

Ein Ring A mit genau einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ heisst *lokaler Ring* und man schreibt dafür auch $(A, \mathfrak{m})$. Insbesondere ist ein Körper ein lokaler Ring mit maximalem Ideal (0). Ein Ring A mit genau einem minimalen Primideal $\mathfrak{p}$ heisst *irreduzibel*. Insbesondere ist ein Integritätsbereich irreduzibel mit minimalem Primideal (0).

Lemma A.8 (Primvermeidung)**.** *Wenn ein Ideal $J \subseteq A$ in einer Vereinigung von endlich vielen Primidealen $I_1, \ldots, I_n \subseteq A$ enthalten ist, so ist J schon in einem der I_j enthalten.*

Eine *multiplikative Teilmenge* eines Ringes A ist eine Teilmenge $S \subseteq A$ mit $1 \in S$ und $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$. Die *Lokalisierung von A an S* ist der Ring $S^{-1}A$ zusammen mit dem Ringhomomorphismus $l_S : A \to S^{-1}A$ gegeben durch die Eigenschaft, dass jeder Ringhomomorphismus $f \colon A \to B$ sodass alle Elemente von $f(S)$ invertierbar sind, eindeutig über l_S faktorisiert, also das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "l_S"'] & & B \\ & S^{-1}A \arrow[ur, dotted, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Diese Lokalisierung existiert und ist gegeben durch

$$\begin{array}{rcl} l_S \colon A & \to & A \times S/{\sim} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1}, \end{array}$$

wobei $[(x,s)] =: \frac{x}{s} \sim \frac{x'}{s'} := [(x', s')]$ genau dann, wenn $\exists t \in S$ mit $t(xs' - sx') = 0$. Die Lokalisierungsabbildung l_S ist injektiv genau dann, wenn S keine Nullteiler enthält. Außerdem gilt

$$S^{-1}A = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \in S \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Nil}(A) \cap S \neq \emptyset.$$

Die Einheiten von $S^{-1}A$ sind genau die Elemente $\frac{x}{s}$, sodass es ein $y \in A$ gibt mit $xy \in S$. Sind $S \subseteq S'$ zwei multiplikative Teilmengen von A, so gibt es nach der obigen universellen Eigenschaft einen Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} S^{-1}A & \to & S'^{-1}A \\ \frac{x}{s} & \mapsto & \frac{x}{s} \end{array}$$

der mit den Lokalisierungsabbildungen l_S und $l_{S'}$ ein kommutatives Dreieck bildet.

Bemerkung A.9. Für einen Ring A gibt es einen A-Algebrenisomorphismus

$$\begin{array}{rcl} S^{-1}A & \to & A[X_s \mid s \in S] \big/ (X_s s - 1 \mid s \in S) \\ \frac{x}{s} & \mapsto & xX_s. \end{array}$$

Analog zu der obigen Situation für Ringe, definiert man für einen A-Modul M die *Lokalisierung von M an S* als den $S^{-1}A$-Modul $S^{-1}M$ zusammen mit dem A-Modulhomomorphismus

$$\begin{array}{rcl} l_S \colon M & \to & M \times S/{\sim} \\ m & \mapsto & \frac{m}{1}. \end{array}$$

Ist insbesondere $I \subseteq A$ ein Ideal, so ist $S^{-1}I \subseteq S^{-1}A$ ein Ideal und gegeben durch

$$S^{-1}I = \{\tfrac{x}{s} \in S^{-1}A \mid x \in I \text{ und } s \in S\} = (S^{-1}A) l_S(I).$$

Es kommutiert $S^{-1}(-)$ mit endlichen Summen, Produkten, endlichen Durchschnitten und Radikalen von Idealen. Insbesondere gilt $\mathrm{Nil}(S^{-1}A) = S^{-1}\,\mathrm{Nil}(A)$.

Lemma A.10 (Quotient und Lokalisierung)**.** *Ist $S \subseteq A$ multiplikativ und $A \twoheadrightarrow A/I$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, dann ist die Teilmenge $\bar{S} := S + I$ von A/I multiplikativ und der kanonische Ringhomomorphismus*

$$\begin{array}{ccc} \bar{S}^{-1}(A/I) & \xrightarrow{\cong} & S^{-1}A\big/_{S^{-1}I} \\ \frac{x+I}{s+I} & \mapsto & \frac{x}{s} + S^{-1}I \end{array}$$

ist ein Isomorphismus.

Es gibt die beiden folgenden wichtigen Spezialfälle einer Lokalisierung:
Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so heisst

$$A_{\mathfrak{p}} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}A = \{\tfrac{x}{f} \mid x \in A \text{ und } f \in A \setminus \mathfrak{p}\}$$

die *Lokalisierung von A an $\mathfrak{p}$*. Der Ring $A_{\mathfrak{p}}$ ist ein lokaler Ring mit dem maximalem Ideal $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} := (A \setminus \mathfrak{p})^{-1}\mathfrak{p} = \{\frac{x}{f} \mid x \in \mathfrak{p}, f \in A \setminus p\}$. Die Lokalisierungsabbildung $A \to A_{\mathfrak{p}}$ ist injektiv, wenn beispielsweise A ein Integritätsbereich ist. Es gilt immer $A_{\mathfrak{p}} \neq 0$. Sind $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$ zwei Primideale so gilt $A \setminus \mathfrak{p} \subseteq A \setminus \mathfrak{p}'$ und es gibt nach obiger Betrachtung einen Ringhomomorphismus $A_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}'}$. Ist A ein Integritätsbereich (und also (0) ein Primideal) so heisst die Lokalisierung $\mathrm{Quot}(A) := A_{(0)}$ der *Quotientenkörper von A*. In diesem Fall sind alle Lokalisierungen nach Primidealen Unterringe von $\mathrm{Quot}(A)$.
Ist $f \in A$ ein Element, so heisst

$$A[\tfrac{1}{f}] := \{1, f, f^2, \ldots\}^{-1}A = \{\tfrac{x}{f^n} \mid x \in A \text{ und } n \geq 0\}$$

die *Lokalisierung von A weg von f* und ist nicht unbedingt ein lokaler Ring. Es ist die Lokalisierungsabbildung $A \to A[\frac{1}{f}]$ injektiv genau dann, wenn f kein Nullteiler ist. Es gilt außerdem

$$A[\tfrac{1}{f}] = 0 \iff f \text{ ist nilpotent.}$$

Für Elemente $f, f' \in A$ liefert die universelle Eigenschaft einen Ringhomomorphismus $A[\frac{1}{f}] \to A[\frac{1}{ff'}]$ mit $\frac{x}{f^n} \mapsto \frac{xf'^n}{(ff')^n}$. Dieser stimmt (bis auf Isomorphie von Ringen) mit der Lokalisierungsabbildung $A[\frac{1}{f}] \to A[\frac{1}{f}][\frac{1}{f'/1}] \cong A[\frac{1}{ff'}]$ überein, d.h. eine Lokalisierung weg von einem Produkt von Elementen kann man „sukzessive“ durchführen.

Bemerkung A.11. Für eine multiplikative Teilmenge $S \subseteq A$ eines Rings A induzieren die kanonischen A-Algebrenhomomorphismen $A[\frac{1}{f}] \to S^{-1}A$ für $f \in S$ einen A-Algebrenisomorphismus

$$\mathrm{colim}_{f \in S}\, A[\tfrac{1}{f}] \xrightarrow{\cong} S^{-1}A,$$

mit Strukturabbildungen $A[\frac{1}{f}] \to A[\frac{1}{g}]$ falls $f|g$ (also $g = ff'$) wie oben für den Kolimes.

Satz A.12 (Idealkorrespondenz für Lokalisierungen)**.** *Ist $l_S \colon A \to S^{-1}A$ eine Lokalisierung, so gibt es eine inklusionserhaltende (aber nicht unbedingt bijektive) Zuordnung*

$$\left\{ \textit{Ideale } J \subseteq A \right\} \underset{l_S^{-1}(K) \leftarrow\!\shortmid K}{\overset{J \mapsto S^{-1}J}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideale} \\ \textit{von } S^{-1}A \end{array} \right\}$$

mit $S^{-1}(-) \circ l_S^{-1} = \mathrm{id}$ und $(J \cap S \neq \emptyset) \Leftrightarrow (S^{-1}J = S^{-1}A)$ die einschränkt auf eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideale } J \subseteq A \\ \textit{mit } J = J^s \end{array} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{c} \textit{Ideale} \\ \textit{von } S^{-1}A \end{array} \right\}$$

wobei $J^s := \{x \in A \mid sx \in J \text{ für ein } s \in S\}$ die Saturierung *ist und die auf minimale, prime und radikale Ideale einschränkt. Für ein Primideal $J \subseteq A$ mit $J \cap S = \emptyset$ gilt $J = J^s$, sodass man hierfür die obige Bijektion schreiben kann als:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Primideale } J \subseteq A \\ \textit{mit } J \cap S = \emptyset \end{array} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{c} \textit{Primideale} \\ \textit{von } S^{-1}A \end{array} \right\}$$

In den beiden Spezialenfällen, der Lokalisierung an einem Primideal $\mathfrak{p}$ und der Lokalisierung weg von einem Element f liefert der vorherige Satz insbesondere also die Bijektionen:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Primideale } J \subseteq A \\ \text{mit } J \subseteq \mathfrak{p}\end{array}\right\} \overrightarrow{\longleftarrow} \left\{\begin{array}{c}\text{Primideale} \\ \text{von } A_{\mathfrak{p}}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Primideale } J \subseteq A \\ \text{mit } f \notin J\end{array}\right\} \overrightarrow{\longleftarrow} \left\{\begin{array}{c}\text{Primideale} \\ \text{von } A[\frac{1}{f}]\end{array}\right\}$$

Für zwei Primideale $\mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}$ wurde oben der kanonische Ringhomomorphismus $A_{\mathfrak{p}} \to A_{\mathfrak{p}'}$ erwähnt. Dieser stimmt (bis auf Isomorphie von Ringen) mit der Lokalisierungsabbildung $A_{\mathfrak{p}} \to (A_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}'_{\mathfrak{p}}} \cong A_{\mathfrak{p}'}$ überein, d.h. eine Lokalisierung nach in einander enthaltenen Primidealen kann man „sukzessive" durchführen. Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ gilt

$$k(\mathfrak{p}) := \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p}) := (A/\mathfrak{p})_{(0)} \cong A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$$

und heisst der *Restklassenkörper von* $\mathfrak{p}$.

Beispiel A.13. Es gilt mit dem *Laurent-Polynomring* $A[X, X^{-1}] := A[X][\frac{1}{X}]$

$$\begin{aligned}(A[X,Y]/(XY-1))_{(X-1,Y-1)} &\cong A[X,X^{-1}]_{(X-1,X^{-1}-1)} \\ &\cong A[X,X^{-1}]_{(X-1)} \\ &\cong A[X]_{(X-1)}[\tfrac{1}{x}] \\ &\cong A[X]_{(X-1)} \\ &\cong A[X-1]_{(X-1)} \\ &\cong A[X]_{(X)}.\end{aligned}$$

Die erste Isomorphie folgt mit Bemerkung A.9. Die zweite Isomorphie folgt, da wegen der Gleichung $X^{-1} - 1 = -X^{-1}(X-1)$ gilt, dass $(X-1, X^{-1}-1) = (X-1)$. Die vierte Isomorphie gilt, da $\frac{1}{x} \in A[X]_{(X-1)}$, weil $X-1$ nicht X teilt. Die fünfte Isomorphie gilt, da für jedes $a \in A$ die Unteralgebra-Inklusion $A[X-a] \subseteq A[X]$ eine Gleichheit ist, weil $X^n = ((X-a)+a)^n = (X-a)^n + \cdots + a^n$. Die letzte Isomorphie folgt aus der Isomorphie $A[X] \cong A[X-a]$.

Für ein Element $p \in A$ gilt

$$\begin{array}{rcl} p \text{ ist } \textit{Primelement} & \Longleftrightarrow & p \neq 0 \text{ und } p \text{ ist keine Einheit und} \\ & & p|xy \Rightarrow p|x \text{ oder } p|y \\ & \Longleftrightarrow & (p) \neq (0) \text{ und } (p) \text{ ist Primideal.} \\[1ex] p \text{ ist } \textit{irreduzibles Element} & \Longleftrightarrow & p \neq 0 \text{ und } p \text{ ist keine Einheit und} \\ & & p = xy \Rightarrow x \text{ ist Einheit oder } y \text{ ist Einheit} \\ (\Longleftarrow \text{ falls } A \text{ Integritätsbereich}) & \Longrightarrow & (p) \neq (0) \text{ und } (p) \text{ ist maximal} \\ & & \text{unter den echten Hauptidealen} \\ \big(\text{falls } A \text{ Hauptidealring} & \Longleftrightarrow & (p) \neq (0) \text{ und } (p) \text{ ist Maximalideal}\big). \end{array}$$

In einem Integritätsbereich ist ein Primelement auch irreduzibel. Die Umkehrung gilt beispielsweise in einem faktoriellen Ring. Ist A ein faktorieller Ring, so gilt dieses auch für den Polynomring $A[X_1, \ldots, X_n]$.

Satz A.14 (Satz über das Nilradikal)**.** *Für jeden Ring A gilt*

$$\mathrm{Nil}(A) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq A \\ \text{Primideal}}} \mathfrak{p}.$$

Beweis. Ist $x \in \mathrm{Nil}(A)$, also $x^n = 0$ für ein $n > 0$, und $\mathfrak{p}$ ein Primideal, so gilt $x^n = 0 \in \mathfrak{p}$, also auch $x \in \mathfrak{p}$. Für die andere Inklusion sei $x \in \cap\mathfrak{p}$. Angenommen, x ist nicht nilpotent. Dann ist die Lokalisierung $l_S \colon A \to A[\frac{1}{x}] \neq 0$ nicht Null und nach Satz A.5 gibt es ein Primideal $\mathfrak{q} \subseteq A[\frac{1}{x}]$ darin. Durch die Idealkorrespondenz für Lokalisierungen ist $l_S^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq A$ ein Primideal welches x nicht enthält. Dies ist ein Widerspruch und daher ist x nilpotent. $\square$

Korollar A.15. *In einem Ring A gilt für ein Element*

$$\text{enthalten in minimalem Primideal} \implies \text{Nullteiler}$$

und die Umkehrung, falls A reduziert ist.

Beweis. Da die Aussagen für den Nullring klar sind, sei also $A \neq 0$ ein Ring. Sei $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal und $x \in \mathfrak{p}$. Wir wollen zeigen, dass x ein Nullteiler ist. Durch die Idealkorrespondenz für Lokalisierungen ist $\mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ das einzige Primideal in der Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$. Da $\frac{x}{1} \in \mathfrak{p}_\mathfrak{p}$ ist es nach dem Satz über das Nilradikal nilpotent, also $(\frac{x}{1})^n = 0$ für ein $n > 0$. Dies bedeutet, dass ein $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ existiert mit $tx^n = 0$. Da $t \neq 0$ folgt, dass x ein Nullteiler ist.

Sei nun A reduziert und x ein Nullteiler, also $xy = 0$ für $y \neq 0$. Wir wollen zeigen, dass x in einem minimalen Primideal enthalten ist. Es gilt nach dem Satz über das Nilradikal

$$y \notin 0 = \mathrm{Nil}(A) = \textstyle\bigcap_{\mathfrak{p} \text{ Primideal}} \mathfrak{p} \;=\; \bigcap_{\mathfrak{p} \text{ minimales Primideal}} \mathfrak{p},$$

es gibt also ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$ mit $y \notin \mathfrak{p}$. Da $0 = xy \in \mathfrak{p}$ folgt $x \in \mathfrak{p}$. □

Beispiel A.16. In dem nicht-reduzierten Ring $k[X,Y]/(X^2, XY)$ ist (X) das einzige minimale Primideal und es ist Y ein Nullteiler.

Korollar A.17. *Für einen Ring A gilt*

$$\begin{aligned} A \text{ ist irreduzibel} \quad &\iff \quad A \text{ hat genau das minimale Primideal } \mathrm{Nil}(A) \\ &\iff \quad \mathrm{Nil}(A) \text{ ist Primideal.} \end{aligned}$$

Beweis. Ist A irreduzibel und hat also nur ein minimales Primideal $\mathfrak{p}$, so ist nach dem Satz über das Nilradikal $\mathrm{Nil}(A) = \mathfrak{p}$ und insbesondere ist $\mathrm{Nil}(A)$ ein (minimales) Primideal.

Sei umgekehrt $\mathrm{Nil}(A)$ ein Primideal. Nach dem Satz über das Nilradikal wäre $\mathrm{Nil}(A)$ in jedem anderen möglichen minimalen Primideal enthalten und daher kann es keine anderen minimalen Primideale geben. Also ist $\mathrm{Nil}(A)$ das einzige minimale Primideal und insbesondere A irreduzibel. □

Ein Quotient und eine Lokalisierung eines noetherschen Rings ist wieder ein noetherscher Ring.

Lemma A.18. *In einem noetherschen Ring A gibt es nur endlich viele minimale Primideale über einem gegebenen Ideal $I \neq A$.*

Beweis. Der Satz A.5 zeigt, dass es mindestens ein Primideal über einem gegebenen Ideal $I \neq A$ gibt. Angenommen es gibt ein Ideal $I \neq A$ mit unendlich vielen minimalen Primidealen darüber. Dann ist die Menge solcher Ideale nichtleer und ist

$$I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots$$

eine Kette von Idealen (mit jeweils unendlich vielen minimalen Primidealen über jedem I_j), so stabilisiert sich diese, da A noethersch ist, und hat somit eine obere Schranke. Mit dem Lemma von Zorn gibt es also ein maximales Element I der Menge von Idealen $\neq A$ mit unendlich vielen minimalen Primidealen darüber. Es kann I kein Primideal sein, sonst wäre es sein einziges minimales Primideal über I. Also gibt es $x, y \in A$ mit $xy \in I$, aber $x \notin I$ und $y \notin I$. Setze $I_x := I + (x)$ und $I_y := I + (y)$. Ist $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal über I, so gilt $xy \in \mathfrak{p}$, also $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$, also $I \subsetneq I_x \subseteq \mathfrak{p}$ oder $I \subsetneq I_y \subseteq \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{p}$ ist auch ein minimales Primideal über I_x oder I_y. Es müssen also unendlich viele der unendlich vielen minimalen Primideale $\mathfrak{p}$ über I auch minimale Primideale über I_x oder über I_y sein. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von I. □

Satz A.19 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Ist A ein noetherscher Ring, so ist auch jeder Polynomring $A[X_1, \dots, X_n]$ in endlich vielen Variablen noethersch.*

Da Bilder noetherscher Ringe unter Ringhomomorphismen wieder noethersch sind folgt aus dem Hilbertschen Basissatz:

$$A \text{ ist noethersch} \implies \text{Jede } A\text{-Algebra von endlichem Typ ist noethersch.}$$

Beispiel A.20. Unterringe noetherscher Ringe sind nicht unbedingt wieder noethersch wie das Beispiel $k[X, XY, XY^2, \dots] \subseteq k[X,Y]$ zeigt, denn hier wird die aufsteigende Idealkette $(X) \subsetneq (X, XY) \subsetneq (X, XY, XY^2) \subsetneq \dots$ nicht stationär.

Die *(Krull-)Dimension* $\dim(A)$ eines Ringes A ist definiert als das Supremum über die Länge $d \geq 0$ von aufsteigenden Primidealketten

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_d.$$

Insbesondere gilt $\dim(0) = -\infty$ und ein Körper hat die Dimension Null. Ist $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein gewähltes Primideal und betrachtet man nur aufsteigende Primidealketten die mit $\mathfrak{p}_d = \mathfrak{p}$ enden, so heisst das Supremum über deren Länge die *Höhe von* $\mathfrak{p}$. Die Dimension von A ist gleich dem Supremum über die Höhen der maximalen Ideale von A (eine kleinere Kette kann man durch ein maximales Ideal verlängern). Die Höhe eines Primideals $\mathfrak{p} \subseteq A$ ist genau die Krull-Dimension $\dim(A_{\mathfrak{p}})$ des lokalen Rings $A_{\mathfrak{p}}$, wie man mit der Idealkorrespondenz für Lokalisierungen sieht. Die Höhe $\mathrm{ht}(I)$ eines beliebigen echten Ideals $I \subseteq A$ ist definiert als das Infimum über die Höhen der (minimalen) Primideale darüber. Es gilt zusammen mit der Idealkorrespondenz für Quotienten die Ungleichung

$$\mathrm{ht}(I) + \dim(A/I) \leq \dim(A),$$

die nicht unbedingt eine Gleichheit ist, noch nicht einmal für Primideale I.

Satz A.21 (Krullscher Hauptidealsatz / Krullscher Höhensatz)**.** *In einem noetherschen Ring A hat jedes minimale Primideal über $(g_1, \ldots, g_n)$ maximal die Höhe n. Umgekehrt ist jedes Primideal der Höhe n ein minimales Primideal über einem Ideal $(g_1, \ldots, g_n)$.*

Ein lokaler noetherscher Ring hat folglich endliche Krulldimension, was für einen beliebigen noetherschen Ring aber nicht unbedingt gilt. Ist n die minimale Anzahl von Erzeugern des maximalen Ideals eines lokalen noetherschen Rings, so gilt $n \geq \dim(A)$ nach dem Krullscher Höhensatz. Ein solcher Ring heisst *regulär*, wenn diese Ungleichung eine Gleichung ist.

Lemma A.22. *Ein regulärer lokaler Ring ist ein Integritätsbereich.*

Ein beliebiger noetherscher Ring heisst *regulär*, wenn die Lokalisierung an jedem seiner Primideale ein regulärer lokaler Ring ist.

Satz A.23. *Ist A ein noetherscher Ring, so gilt*

$$\dim(A[X_1, \ldots, X_n]) = \dim(A) + n.$$

Sei $f\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Ein Element $b \in B$ heisst *ganz (über A)*, wenn es Nullstelle eines normierten Polynoms

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$$

aus $B[X]$ ist, wobei die a_j im Bild von f liegen. Es gibt eine Faktorisierung von f als

$$A \xrightarrow{\quad \textit{ganz} \quad} \tilde{A} \xhookrightarrow{\textit{ganz abgeschlossen}} B$$

durch Ringhomomorphismen, wobei $\tilde{A} := \{b \in B \mid \ b \text{ ist ganz über } A\}$ der *ganze Abschluss (von A in B)* heisst (Dies ist eine idempotente Konstruktion, d.h. der ganze Abschluss von $\tilde{A}$ in B ist wieder $\tilde{A}$). Diese Faktorisierung wird respektiert von einer beliebigen Lokalisierung nach einer multiplikativen Teilmenge $S \subseteq A$. Ist $A = \tilde{A}$ so heisst f *ganz abgeschlossen* und ist $\tilde{A} = B$ so heisst f *ganz*. Für einen Integritätsbereich A und den Ringhomomorphismus $A \hookrightarrow \mathrm{Quot}(A)$ heisst $\tilde{A}$ die *Normalisierung von A* und A heisst *normal*, falls $A = \tilde{A}$. Jeder faktorielle und jeder reguläre Ring ist normal.

Lemma A.24. *Ist $f\colon A \hookrightarrow B$ ganz und injektiv, so gilt* $\dim(A) = \dim(B)$.

Lemma A.25. *Für einen Ringhomomorphismus gilt*

$$\textit{endlich} \iff \textit{von endlichem Typ und ganz.}$$

Satz A.26 (Noether-Normalisierung)**.** *Sei k ein Körper und $B \neq 0$ eine k-Algebra von endlichem Typ. Dann gibt es eine Faktorisierung*

$$k \hookrightarrow k[X_1, \ldots, X_d] \xhookrightarrow[\textit{injektiv}]{\textit{endlich}} B$$

des Strukturmorphismus von B.

Eine Körpererweiterung $f\colon k \hookrightarrow B$ (also ein Ringhomomorphismus $\neq 0$ zwischen Körpern) heisst *algebraisch*, wenn f ganz ist und andernfalls *transzendent*. Der *Transzendenzgrad* $\operatorname{trdeg}_k(B)$ einer Körpererweiterung ist das größte $n \geq 0$, sodass es einen injektiven Ringhomomorphismus

$$f\colon k[X_1, \dots, X_n] \hookrightarrow B$$

gibt. Durch die universelle Eigenschaft der Lokalisierung faktorisiert dieser natürlich über $k(X_1, \dots, X_n) := \operatorname{Quot}(k[X_1, \dots, X_n]) \hookrightarrow B$. Eine Körpererweiterung heisst *rein transzendent*, falls $k(X_1, \dots, X_n) \cong B$ ein Isomorphismus ist. Für jede Körpererweiterung $k \hookrightarrow B$ gibt es eine Faktorisierung

$$k \longrightarrow k(X_1, \dots, X_n) \xhookrightarrow[\text{injektiv}]{\text{ganz}} B$$

in eine rein transzendente und eine (nicht unbedingt endliche) algebraische Körpererweiterung. Durch die Noether Normalisierung sieht man, dass eine Körpererweiterung von endlichem Typ (als Algebra) schon algebraisch ist. Insbesondere ist der Ringhomomorphismus $k[X_1, \dots, X_n] \hookrightarrow k(X_1, \dots, X_n)$ nicht von endlichem Typ.

Der Durchschnitt aller maximalen Ideale eines Rings heisst das *Jacobson-Radikal* $\operatorname{Jac}(A)$. Nach dem Satz über das Nilradikal gilt $\operatorname{Nil}(A) \subseteq \operatorname{Jac}(A)$.

Bemerkung A.27. Für einen Ring A gilt $\operatorname{Nil}(A[X]) = \operatorname{Jac}(A[X])$.

Lemma A.28 (Nakayama)**.** *Für ein Ideal $I \subseteq A$ und einen endlich erzeugten A-Modul M gilt:*

$$\begin{array}{ccc} M = IM & \Longrightarrow & \begin{array}{c}\text{Es gibt ein } i \in I \text{ mit} \\ m = im \\ \text{für alle } m \in M\end{array} \\ \Updownarrow & & \\ M \otimes_A A/I = 0 & \overset{I \subseteq \operatorname{Jac}(A)}{\Longleftrightarrow} & M = 0 \end{array}$$

Korollar A.29. *Für einen lokalen Ring $(A, \mathfrak{m})$ und einen endlich erzeugten A-Modul M gilt:*

$$g_1, \dots, g_n \text{ erzeugen } M \Longleftrightarrow \bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n \text{ erzeugen den } k(\mathfrak{m})\text{-Vektorraum } M \otimes_A k(\mathfrak{m}),$$

wobei $\bar{\cdot}$ den surjektiven A-Modulhomomorphismus $M \twoheadrightarrow M/\mathfrak{m}M = M \otimes_A k(\mathfrak{m})$ bezeichne.

Korollar A.30. *Ist M ein endlich erzeugter A-Modul, so ist ein surjektiver Modulhomomorphismus $M \to M$ auch injektiv.*

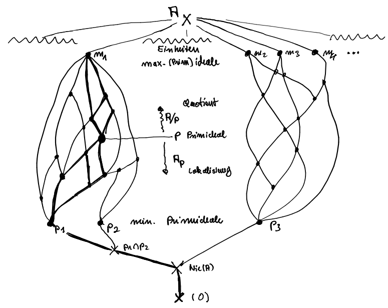

Abbildung 2: Skizze der Ideale ($\times$) und Primideale ($\bullet$) eines Rings A

Aufgabe A.31. Sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}''$ eine Kette von Primidealen. Man zeige, dass es *unendlich viele verschiedene* Primideale $\mathfrak{p}$ mit dieser Eigenschaft gibt.
(Hinweis: Man benutze die Primvermeidung und den Krullschen Höhensatz.)

Aufgabe A.32. Man zeige, dass ein Ring A reduziert ist genau dann, wenn alle Lokalisierungen $A_\mathfrak{p}$ an Primidealen reduziert sind. Außerdem zeige man, dass A nicht irreduzibel sein muss, obwohl alle Lokalisierungen $A_\mathfrak{p}$ an Primidealen irreduzibel sind.

Literatur

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London Don Mills, Ont., 1969.
[2] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra: Volume 1, Basic Category Theory* Cambridge University Press 1994.
[3] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic geometry I*, Advanced Lectures in Mathematic, Vieweg + Teubner, Wiesbaden 2010.
[4] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
[5] G. Kemper, *A course in commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 256, Springer, Heidelberg, 2011.
[6] Q. Liu, *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002.
[7] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Mathematics Lecture Note Series, vol. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.
[8] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, Online (version dated August 31, 2017) available at stacks.math.columbia.edu, 2017.

E-mail address: `florian.strunk@ur.de`