80. AUFGABE DER WOCHE

Hier ist eine praktische Aufgabe:

Man befestige einen Knopf mit beliebig vielen Löchern an jeweils einem seiner Löcher mit einem Gummiband an einem Punkt im Raum (z.B. an einer Flasche), sodaß letztendlich der Knopf an (z.B. drei) geraden Gummibändern gespannt im Raum hängt. Nun drehe man den Knopf einmal komplett um eine beliebige Achse. Gelingt es den Knopf im Raum zu fixieren (d.h. festzuhalten) und die Bänder so zu entwirren, dass sie sich wieder in der Ausgangslage befinden (d.h. gerade gespannt)? Gelingt dies, nachdem man den Knopf ein zweites Mal komplett um die gleiche Achse gedreht hat?

Die Frage ist also: Gilt für alle Wege $a : [0,1] \to \mathbf{SO}(3)$ für die $a(0) = a(1) = e$ gilt, wobei $\mathbf{SO}(3)$ die spezielle (reelle) orthogonalen Gruppe bezeichne und e das neutrale Element darin, daß aa homotop relativ $\{0,1\}$ ist zu dem neutralen Weg?

(Ist auch a schon homotop relativ $\{0,1\}$ zu dem neutralen Weg? Was hat das mit dem obigen Beispiel zutun?)

(Der Weg $aa : [0,1] \to \mathbf{SO}(3)$ ist homotop relativ $\{0,1\}$ zu dem neutralen Weg genau dann, wenn es eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{SO}(3)$ gibt, sodaß $H(t,0) = H(t,1) = H(1,s) = e$ und $H(0,s) = aa(s)$ für alle $0 \le t,s \le 1$. Der neutrale Weg ist die stetige Abbildung $[0,1] \to \mathbf{SO}(3)$ mit $s \mapsto e$ für alle $0 \le s \le 1$. Die stetige Abbildung $aa : [0,1] \to \mathbf{SO}(3)$ bezeichne den Weg mit $s \mapsto a(2s)$ für $0 \le s \le 1/2$ und $s \mapsto a(2s-1)$ für $1/2 \le s \le 1$.)

Die 'Aufgabe der Woche' ist eine inoffizielle Belustigung. Für den Urheber der ersten Lösung liegt in V4-206 ein namhafter Schokoriegel bereit. Vorschläge für schöne neue Aufgaben werden dankend aber schokoriegelfrei in V4-206 angenommen. Den Lösungsstatus einer Aufgabe, sowie die normalerweise montags neu erscheinende Aufgabe findet man unter http://www.math.uni-bielefeld.de/∼florian/adw/ .