38. AUFGABE DER WOCHE

Seien n und m positive natürliche Zahlen und d eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Für eine endliche Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ setze

$$A(S) = |\{d(s_1, s_2) \mid s_1, s_2 \in S \text{ und } s_1 \neq s_2\}|$$

als die Anzahl der von S definierten Abstände. Sei nun $D(\mathbb{R}^n, d, m)$ die größte (Supremum) Mächtigkeit einer Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $A(S) = m$, falls eine solche Menge S existiert und Null sonst.

Mit der euklidischen Metrik e sieht man zum Beispiel, daß $D(\mathbb{R}^n, e, 1) = n+1$ und $D(\mathbb{R}^2, e, 2) \geq 5$ (reg. Pentagon). Die Frage ist nun: Ist $D(\mathbb{R}^n, e, m)$ stets endlich?

(Interessant sind auch die Fragen: Gibt es positive natürliche n und m, sodass $D(\mathbb{R}^n, e, m) = 0$? Was ist $D(\mathbb{R}^n, e, 2)$? Es gilt $D(\mathbb{R}^n, e, 2) \leq (n+1)(n+4)/2$. Wie sieht $D(X, d, m)$ bei anderen metrischen Räumen (X, d) (oder zumindest für $X = \mathbb{R}^n$) aus?)

Die 'Aufgabe der Woche' ist eine inoffizielle Belustigung. Für den Urheber der ersten Lösung liegt in V4-206 ein namhafter Schokoriegel bereit. Vorschläge für schöne neue Aufgaben werden dankend aber schokoriegelfrei in V4-206 angenommen. Den Lösungsstatus einer Aufgabe, sowie die normalerweise montags neu erscheinende Aufgabe findet man unter http://www.math.uni-bielefeld.de/~florian/adw/ .