17. AUFGABE DER WOCHE

Diese Woche hätte Herr Zwiwesa aufgrund des folgenden interessanten Phänomens fast seinen Lieblingssatz vergessen:

Seien b und s natürliche Zahlen mit $b \geq 2$ und $s \geq 1$ und bezeichne für natürliche a und b mit $a \geq b$ den bei der Disivion von a durch b mit Rest anfallenden Rest mit $a (\text{mod } b)$.
Sei O_+ (bzw. O_-) die Abbildung, die eine s-stellige Zahl $(z_s ... z_1)_b$ zur Basis b auf die s-stellige Zahl $(z_{i_m} ... z_{i_1})_b$ zur Basis b abbildet, wobei $(z_{i_m}, ..., z_{i_1})$ das bezüglich der Größe der z_i absteigend (bzw. aufsteigend) geordnete s-Tupel $(z_s, ..., z_1)$ ist.

Nun betrachte man für ein $n \leq b^s - 1$ das folgende Verfahren zur Konstruktion einer Folge $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

- Wähle $c_0 := n$.
- Setze $c_{i+1} := O_+(c_i) (\text{mod } O_-(c_i))$.

Sie Frage ist nun: Gibt es für jedes natürliche $n \leq b^s - 1$ eine Stelle $i \in \mathbb{N}$ in der obigen Folge, sodass $c_i = (0...0)_b$?
Falls ja, gilt für die kleinste solche Stelle i_0, daß $i_0 \leq b$?

Beispiel:
Sei $b = 10$, $s = 4$ und $n = 1234$.
Dann gilt

$$
\begin{aligned}
c_0 &= (1234)_{10}.\\
c_1 &= (4321)_{10} (\text{mod } (1234)_{10}) = (0619)_{10},\\
c_2 &= (9610)_{10} (\text{mod } (0169)_{10}) = (0146)_{10},\\
c_3 &= (6410)_{10} (\text{mod } (0146)_{10}) = (0132)_{10},\\
c_4 &= (3210)_{10} (\text{mod } (0123)_{10}) = (0012)_{10} \text{ und}\\
c_5 &= (2100)_{10} (\text{mod } (0012)_{10}) = (0000)_{10}.
\end{aligned}
$$

und $5 \leq 10$.

http://www.math.uni-bielefeld.de/~florian/adw/.